This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.
+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.
+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.
+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse http://books.google.com

Nieuport

Nicoport

MÉLANGES
MATHÉMATIQUES.

MÉLANGES

MATHÉMATIQUES,

OU

MÉMOIRES sur différens sujets de MATHÉMATIQUES tant pures qu'appliquées,

Par le Commandeur C. F. *DE NIEUPORT, de l'Ordre de Malte, Membre de l'Académie Impériale & Royale des Sciences & Belles-Lettres de Bruxelles.*

PREMIER RECUEIL

CONTENANT DEUX PLANCHES.

Forsan et hæc aliquis, nostri post ultima quondam
Fata memor, legat ac extincto fausta precetur.
O tunc dulce mihi veniat vox illa sub imos
Manes, et gelidâ antiquus cinis æstuet urnâ!

ASTOR LIBRARY NEW-YORK

A BRUXELLES,

Chez M. LEMAIRE, Imprimeur-Libraire, rue de l'Impératrice.

M. DCC. LXXXXIV.

AVANT-PROPOS.

En présentant ce recueil de mélanges au public, j'ai cru devoir y joindre un exposé préliminaire des différens sujets qui y sont traités; avec une analyse raisonnée des méthodes que j'ai suivies, des progrès que j'ai faits, & des difficultés qui m'ont arrêté. Un pareil exposé réunit à l'avantage d'instruire le lecteur de tout ce qui est contenu dans un ouvrage, celui de préparer en même tems son esprit à en saisir plus facilement la marche. Au reste, je n'ai rien négligé de ce qui m'a semblé propre à rendre moins pénible la lecture de ces Mémoires : au risque même de paroître quelquefois observer trop minutieusement la série des conséquences, d'où dépend souvent la clarté du raisonnement. Loin de moi cette puérile vanité de n'être entendu que de quelques Géomètres du premier rang ! J'ai cherché au contraire à me mettre à la portée d'un plus grand nombre de lecteurs, en reprenant toujours les choses d'assez loin, et en citant, pour des détails ultérieurs, les Auteurs les plus familiers. Mon but a été, non-seulement de reculer de

quelques pas les bornes des connoissances que m'ont transmises ceux qui m'ont précédé dans cette carrière, mais encore d'en faciliter l'accès à ceux qui voudroient y entrer après moi.

Le premier de ces Mémoires concerne l'Algèbre pure. Il eſt tiré, en partie, de deux Mémoires que je présentai successivement, il y a plusieurs années, à l'Académie Royale des Sciences de Paris, et dont j'appris, quelque tems après, que *le premier devoit* être imprimé parmi ceux des Savans étrangers. Las des retards continuels qu'éprouvoit l'impression de ce volume, et me trouvant du loisir, je suis revenu sur cette matière. Une foule de vérités nouvelles s'est présentée à moi, et je me suis enfin determiné à refondre ces deux Mémoires en un seul, tel que je le donne ici. Je n'y considère que les équations différentielles régulières; c'est-à-dire, celles qui sont susceptibles d'une intégrale de l'ordre immédiatement inférieur: mais j'ai déjà rassemblé quelques matériaux sur les équations irrégulières, et je ne désespère pas de parvenir un jour à traiter ce nouveau genre d'équations, beaucoup plus difficile que le premier; et d'autant plus difficile, qu'à peine entré dans cette carrière on la trouve hérissée de calculs presqu'intraitables, qui semblent interdire tout espoir de pénétrer plus avant.

Ce Mémoire est divisé en plusieurs chapitres; dont le premier traite des équations du premier ordre et du premier degré entre trois variables; c'est-à-dire, des équations qui ne contiennent que des différences partielles du premier ordre, lesquelles ne sont ni multipliées entr'elles, ni élevées à aucune puissance au-dessus de l'unité. Après y avoir exposé très-brièvement une méthode uniforme, pour intégrer toutes les équations ordinaires de cette classe, je passe à l'équation générale la plus compliquée; et je donne, pour l'intégrer, une méthode nouvelle, qui est une méthode de tâtonnement très-étendue, dont l'artifice consiste à faire disparoître le terme sans différence partielle, ce que je démontre être toujours possible; et qui réussit dans tous les cas où l'équation à intégrer contient visiblement tous les termes qu'elle doit contenir; c'est-à-dire, où quelques-uns des termes qui doivent former les deux équations de tâtonnement ne s'entredétruisent point. A la suite de cette méthode, on en trouve une autre beaucoup moins étendue, mais plus directe et qui, comme la précédente, porte sur la connoissance d'une seule intégrale particulière de la proposée. Je démontre enfin que l'intégration de l'équation la plus générale de cette espèce, dépend de celle d'une équation à quatre variables; et dans le cours de cette démonstration, je détermine l'équation de condition qui doit avoir

lieu, entre les coëfficiens d'une équation aux différences partielles à trois variables, pour qu'elle soit susceptible d'intégration, dans le sens dont il s'agit ici.

Dans le chapitre second, je traite des équations du premier ordre qui, étant ordonnées par rapport aux différences partielles, sont d'un degré quelconque. La méthode très-simple que je donne pour intégrer ces équations, est beaucoup plus générale que toutes les méthodes connues. Elle ne conduit pas directement à leur intégration, mais elle les ramène aux équations du premier degré; et il faut remarquer qu'il ne s'agit encore ici que des équations, dont l'intégrale est telle, que le premier membre se réduise à la variable principale, ou à une fonction de cette variable seule. J'étends ensuite ma méthode au cas où ce premier membre est une fonction quelconque des trois variables, que personne encore, que je sache, n'a examiné. Enfin, comme les équations finies aux fonctions arbitraires, qui résultent de ces intégrations, sont d'une forme différente des équations ordinaires de ce genre, j'enseigne le moyen d'en déterminer les fonctions arbitraires, d'après les conditions accessoires du problème.

Le chapitre troisième concerne les équations aux différences partielles du premier ordre et du premier degré entre quatre variables, pour lesquelles je suis dabord la même

même marche que pour celles à trois variables, en fesant remarquer à chaque pas leur analogie. Je parviens à intégrer généralement toutes les équations de ce genre, dont les coëfficiens ne renferment pas la variable principale; pourvu que l'une des trois fonctions qui constituent leur intégrale, ne contienne que deux des trois variables ordinaires; la seconde pouvant les contenir toutes trois; et la troisième toutes les quatre, y compris la variable principale. Lorsque les coëfficiens de la proposée renferment cette dernière variable, le terme sans différence partielle étant zéro, je trouve que, de ces trois mêmes fonctions, l'une doit se réduire à la variable principale; la seconde peut contenir cette variable avec deux autres; et enfin la troisième peut les contenir toutes quatre. Je détermine ensuite, comme dans les équations à trois variables, l'équation de condition qui doit avoir lieu, pour qu'une équation à quatre variables soit susceptible d'intégration. Quant aux autres équations qui échappent aux méthodes précédentes, après en avoir fait une énumération raisonnée, je remarque que leur intégration pourra s'effectuer, en y appliquant ma méthode de tâtonnement, que je développe pour ce nouveau cas, afin d'en faire disparoître le terme sans différence partielle. La difficulté se réduit alors à intégrer une équation à quatre variables,

dans laquelle ce terme est nul; soit que les coëfficiens contiennent la variable principale, ou non; mais sans que, dans l'un ou l'autre de ces deux cas, ces coëfficiens satisfassent à la condition qu'exigent les méthodes précédentes. Ceci me ramène à la méthode, que je n'ai fait qu'indiquer dans le premier chapitre, qui consiste à intégrer les équations à trois variables au moyen de celles à quatre ; méthode que je développe complettement à cette occasion ; et je conclus qu'en prenant l'inverse de cette même méthode, j'intègrerai facilement les équations à quatre variables, dont les coëfficiens ne sont pas compliqués de la variable principale, au moyen de celles à trois variables. Quant aux équations dont les coëfficiens renferment la variable principale, je les ramène à celles à cinq variables, à l'intégration desquelles je ne m'arrête qu'autant qu'il est nécessaire pour cet objet.

Le quatrième chapitre traite des équations aux différences partielles à trois variables, du second ordre et du premier degré, telles qu'on a coûtume de les comprendre sous cette dénomination; c'est-à-dire, dans lesquelles chaque terme, excepté le dernier, est caractérisé par une certaine différence partielle ; ſoit du premier; ſoit du ſecond ordre qui s'y rencontre ſeule; tous les coëfficiens, auſſi bien que le dernier terme, ne contenant que des

quantités finies. Pour intégrer ces équations du second ordre, je suppose que leur intégrale est donnée par une équation, dont le premier membre est la formule la plus générale du premier ordre, et le second membre est une fonction arbitraire. La forme que doit avoir, en vertu de ma définition, l'équation du second ordre, exige quelque restriction dans celle du premier, ce que je détermine dabord : et je parviens ensuite facilement, au moyen de la comparaison terme à terme, à connoître toutes les indéterminées que la supposition a introduites. Ayant appliqué ma méthode à l'équation des cordes vibrantes, je fais observer que le cas de la corde uniformément épaisse n'est pas le seul qui admette une intégration de l'ordre immédiatement inférieur; et j'assigne la formule qui comprend tous ceux qui jouissent de la même propriété. Parmi les formules générales que je donne, pour la détermination des indéterminées, il en est une qui en certains cas devient identique, et dont on ne peut conséquemment rien conclure. Je m'arrête à bien développer l'origine de cette circonstance, à laquelle on a fait jusqu'ici assez peu d'attention; et j'indique la conduite qu'il faudra tenir dans cette occasion. Je parcours ensuite les différens cas, où l'absence d'un ou de deux termes du second ordre pourroit causer quelque difficulté : et je termine enfin ce chapitre par distin-

guer différentes équations du second ordre; dont les unes ont deux premières intégrales complettes; les autres n'en ont qu'une: et d'autres enfin n'ont d'intégrale, que l'intégrale finie, sans en avoir d'intermédiaire du premier ordre. Ces dernières sont du nombre de celles que je nomme *irrégulières.*

Dans le cinquième chapitre, j'étends la même méthode aux équations du troisième ordre. Le cas de la formule qui devient *identique*, se présente encore ici: son développement est plus compliqué, mais parfaitement analogue à celui du second ordre. Enfin, je démontre que la même méthode s'applique, avec un égal succès, aux équations d'un ordre quelconque.

Le sixième chapitre concerne encore les équations du second ordre et du premier degré, mais d'un genre beaucoup plus compliqué. C'étoit le sujet du second Mémoire dont j'ai parlé au commencement de ce Discours; mais, depuis ce tems-là, je l'ai considérablement augmenté et perfectionné: et je crois pouvoir assurer que cette partie est entièrement neuve. On a dû remarquer combien la formule du chapitre quatrième étoit resserrée: celle que je traite ici, a toute son étendue. Chaque terme n'est pas caractérisé par une seule différence partielle; ou du moins, il ne l'est que par une différence partielle du second ordre, celles

du premier ordre se confondant avec les quantités finies. La formule intégrale d'une pareille équation est $\Psi = \phi : \Pi$; Ψ et Π étant des fonctions quelconques données de toutes les quantités finies et des différences partielles du premier ordre. En fesant disparoître de cette formule la fonction arbitraire, on parvient à une équation du second ordre qui comprend quatre termes; dont trois sont distingués, chacun par une des trois différences partielles linéaires du second ordre; et dont le quatrième ne contient que des quantités finies et des différences partielles du premier ordre. Mais il y entre de plus deux termes; dans l'un desquels, deux des différences du second ordre sont multipliées entr'elles; et dans l'autre, la troisième est élevée au quarré. Je commence par supposer que ces deux termes sont nuls, et je vois qu'il faut pour cela, que Ψ & Π ne contiennent les différences partielles du premier ordre, que sous une même forme s, qui peut d'ailleurs être *fonctionnée* avec les autres variables, d'une manière différente dans l'une et dans l'autre. Par-là, ces équations seront, dans le sens le plus étendu, des équations du second ordre et du premier degré, susceptibles d'une première intégrale complette. Pour parvenir à l'intégration de ces équations, je commence par déterminer la fonction qui doit être égale à s, et je lui substitue l'expression s

qui devient une seconde variable principale variant, comme la première, par les deux variables ordinaires : et je parviens ensuite, pour déterminer les fonctions Ψ ou Π, à quatre équations du premier ordre entre quatre variables. Je conclus de ces quatre équations, la valeur de Ψ, d'une manière bien simple et bien neuve, et qui peut être d'un très-grand usage dans toutes les équations de condition. Pour cela, je prouve dabord que ces quatre équations ne sont que les quatre *résultats* de la différentiation d'une même formule à quatre variables, en supposant successivement chacune de ces variables constante. Ayant donc intégré une qnelconque de ces quatre équations, je parviens à assigner la forme la plus générale indéterminée que puisse prendre cette intégrale, pour satisfaire en même tems aux trois autres ; et par une comparaison terme à terme, j'achève de la déterminer complettement. Je donne ensuite un moyen très-expéditif, pour éliminer de la proposée les différences partielles du second ordre qu'elle contient, en y substituant celles du premier ordre de la fonction ou seconde variable principale s ; et il résulte de-là, ce que je nomme une *transformée imparfaite*, où il ne faudra plus que substituer de même s finie à la fonction qu'elle représente. J'examine en passant s'il ne faudra pas quelquefois préparer la transformée imparfaite, à recevoir cette der-

nière substitution, et je trouve qu'il y a un seul cas où cette préparation soit nécessaire. Je détermine, pour ce cas, la forme que doit avoir le facteur, par lequel il faudra multiplier la transformée en question. Je parcours ensuite rapidement plusieurs incidens, qui présentent au premier coup-d'œil quelque difficulté. Pour mieux faire comprendre toutes ces règles, j'applique ma méthode à l'équation des surfaces engendrées par le mouvement d'une droite toujours parallèle à un même plan ; et je prouve que celle des surfaces dont l'aire est un *maximum*, quoiqu'en apparence peu différente de la précédente, n'admet cependant point une pareille intègration. Je fais de plus remarquer que par cette méthode on pourroit intégrer, dans toute sa généralité, l'équation du second ordre, telle que nous l'avons vu, dans le quatrième chapitre, résulter de la formule intégrale supposée, avant les restrictions que nous y avons mises. Je termine enfin ce chapitre par donner les moyens d'intégrer de nouveau les équations du premier ordre, résultantes de ces premières intégrations, lorsqu'elles en seront susceptibles.

Dans le chapitre septième, j'étends la même méthode aux équations du troisième ordre ; mais il est aisé de prévoir qu'elle deviendra beaucoup plus compliquée. Aussi, pour parvenir à l'intégrale de ces équations, faut-il passer

par deux transformations successives. La méthode d'intégration, que j'ai enseignée dans le chapitre précédent, pour un système de plusieurs équations simultanées aux différences partielles, est encore d'un très-grand usage dans celui-ci : et j'ose presque regarder cette méthode, toute simple qu'elle est, comme une découverte essentielle en algèbre. Sans entrer dans de plus longs détails sur ce chapitre, il en résulte que l'on parviendra à intégrer de pareilles équations, de quelque ordre qu'elles soient, dans tous les cas où l'intégrale cherchée sera telle que, σ, σ', &c. représentant des fonctions déterminées des différences partielles de chaque ordre, on puisse l'exprimer par $\Psi = \phi : \Pi$; Ψ & Π étant des fonctions quelconques déterminées de toutes les variables finies et de σ, σ', etc.

On se souviendra que dans le chapitre sixième, j'ai supposé nuls deux termes de l'équation générale; dans l'un desquels deux des différences partielles du second ordre étoient multipliées entr'elles; et dans l'autre, la troisième de ces différences étoit élevée au quarré : j'entreprends, dans le chapitre huitième, d'intégrer cette même équation, en laissant subsister ces deux termes, afin de parvenir à l'intégration de toutes les équations aux différences partielles, dont l'intégrale peut être exprimée par $\Psi = \phi : \Pi$; ces deux fonctions contenant, d'une manière quelconque,

quelconque, les trois variables finies et les différences partielles du premier ordre. Pour cela, je commence par examiner les cas les plus simples. Le premier est, sans contredit, celui où ces deux termes sont seuls; mais il est si facile et si connu, que peu de mots suffisent. Je suppose secondement que ce soit le terme sans différence partielle qui soit nul, et j'enseigne à intégrer cette équation; ayant soin d'expliquer la forme extraordinaire que présente cette solution dans le résultat. J'attaque enfin cette même équation dans toute sa généralité, et je parviens, au moyen d'une méthode dont il seroit difficile de faire l'extrait, à l'intégrer dans un grand nombre de cas très-compliqués. Un exemple auquel j'applique ces règles, est l'équation qui résulte en cherchant les surfaces engendrées par la circonférence d'un cercle qui se meut de manière que son plan soit toujours perpendiculaire à la courbe que parcourt son centre, d'après la propriété commune à ces surfaces d'avoir un des deux rayons de courbure constant, et égal au rayon du cercle générateur; et je parviens au même résultat que trouve M. Monge (1), par une voie directement opposée; savoir, en considérant la formation

(1) Voyez Mém. de l'Acad. R. des Sciences de Turin, années 1784 et 1785, première partie, page 21. *Expres. analyt. de la générat. des surf. courbes par M. Monge.*

même de ces surfaces. Il est également impossible de rendre compte du reste de ce chapitre, sans entrer dans des détails presqu'aussi longs que dans le Mémoire lui-même. Mais on y trouvera encore des applications fréquentes et assez compliquées, de ma méthode d'intégration pour un système d'équations simultanées.

Enfin, dans le neuvième chapitre, je traite des équations d'un ordre et d'un degré quelconques. La méthode que j'employe, est une extension de celle dont j'ai fait usage dans le chapitre second, pour intégrer les équations du premier ordre et d'un degré quelconque. Cette théorie sera très-utile pour l'intégration ultérieure des intégrales qu'on a appris à trouver dans les chapitres précédens.

Ce Mémoire est terminé par un Tableau *récapitulatif* qui facilitera considérablement les recherches, lorsqu'on aura quelqu'équation à intégrer par les méthodes que j'ai enseignées. C'est là que le lecteur verra, d'un coup-d'œil, si cette équation est contenue dans l'une ou l'autre de mes dix formules générales; et dans ce cas, quelle est celle de ces méthodes qui lui convient, et où elle se trouve décrite.

Le second Mémoire concerne encore l'algèbre pure. J'y donne la manière d'intégrer une équation différentielle à

trois variables, qui n'est point intégrable dans le sens ordinaire : et ayant fait voir qu'une pareille équation désigne une famille de courbes à double courbure, j'en conclus que le système de deux pareilles équations, entre les mêmes co-ordonnées, doit désigner une seule courbe de ce genre, commune aux deux familles. Mais je m'apperçois bientôt, que ma méthode d'intégration ne sauroit s'appliquer au cas de ces deux équations simultanées. J'en employe donc une autre très-facile et très-simple : et le résultat en est, une équation aux différences partielles à quatre variables, dont l'intégrale contient deux fonctions, qu'il ne faudra plus qu'égaler, chacune à une constante indéterminée; pour avoir les deux équations finies qui sont l'intégrale cherchée. J'étends ensuite cette même méthode à un système de deux équations du second ordre; et je retrouve encore ici l'utilité de la méthode d'intégration pour un système de plusieurs équations aux différences partielles, que j'ai donnée dans le Mémoire précédent. Je conclus enfin que, quel que soit l'ordre des deux équations, la difficulté se réduira toujours à l'intégration d'équations aux différences partielles, semblables à celle qu'on trouve pour le cas où les deux équations sont du premier ordre. Après ces premiers succès, il est naturel d'essayer d'appliquer cette même méthode à un système de trois

équations simultanées entre quatre variables. Je trace l'esquisse de la solution qui, en suivant l'analogie, se présente assez naturellement, et qui laisse entrevoir une possibilité de parvenir par ce moyen à intégrer les équations au système du monde. Mais le résultat des calculs ne s'accorde pas avec ces raisonnemens; et je suis obligé de me borner à un apperçu de solution, qui présente encore des difficultés assez considérables à surmonter.

Le troisième Mémoire appartient à l'Hydrodynamique. C'est le développement d'une idée bien simple; si simple même, que je ne puis encore me persuader que je sois le premier, à qui elle s'est présentée. J'y considère un tuyau cylindrique vertical, entièrement ouvert par les deux extrémités; et je suppose que le fluide, qui s'en échappe librement par l'orifice inférieur, soit continuellement remplacé, de manière que ce tuyau se maintienne toujours plein à la même hauteur. Tous les Géomètres conviennent que ce nouveau fluide affluent est entraîné par le fluide inférieur; mais ils regardent seulement comme tel, celui qui est contenu dans le tuyau (1), au lieu de prendre, comme il me paroît indispensable, la colonne entière de fluide, jusqu'au point où elle est interrompue.

---

(1) Voyez à l'art. 18 de ce Mémoire une preuve de cette assertion.

C'est donc d'après ce dernier principe que je calcule le mouvement du fluide : et pour cela, je considère trois cas ; le premier, lorsque le fluide ne rencontrant aucun obstacle, la colonne va toujours en croissant ; le second, lorsque la colonne est interrompue par un obstacle fixe, le fluide s'échappant aussitôt ; ou, ce qui revient au même, lorsque cette colonne, se terminant à une surface du même fluide d'une étendue indéfinie, demeure constamment la même ; et enfin le troisième, lorsque le fluide, se précipitant dans un vase fini, s'élève de plus en plus dans ce vase, et que la colonne va toujours en diminuant. Je compare enfin le résultat du premier cas, avec celui que fournit, dans la même supposition d'un tuyau cylindrique ouvert par ses deux extrémités, la méthode qu'on trouve dans l'Hydrodynamique de M. l'abbé Bossut ; et il s'ensuit de cette comparaison, que la différence entre ces deux résultats, provient uniquement de la différente manière d'évaluer la colonne de fluide inférieur. Ces questions amènent quelques réflexions sur le cas où, au lieu d'un tuyau cylindrique, il s'agiroit d'un vase de figure quelconque ; et je conclus que, dans tous les cas, ce principe doit avoir une certaine influence sur le mouvement du fluide. Je termine enfin ce Mémoire par une esquisse de la manière, dont il me paroît qu'il faudroit résoudre

ces problèmes, si on vouloit parvenir à des solutions tout-à-fait rigoureuses.

Le quatrième Mémoire concerne l'Hydrostatique. J'y enseigne une nouvelle manière de traduire en langue algébrique; c'est-à-dire, d'appliquer au calcul le principe d'égalité de pression. Je commence par déduire de cette méthode, en un seul problème, toutes les loix de l'Hydrostatique ordinaire. J'examine en second lieu le cas d'une force centrale quelconque, dirigée vers un point fixe. De-là, je passe à combiner cette force avec le mouvement de rotation, et n'ayant jusqu'ici regardé la masse fluide que comme une surface, je finis par résoudre ce dernier problème, en considérant cette masse sous ses trois dimensions. Si dans ces différentes questions, on suppose la densité variable, on trouve aussi-tôt, dans la solution même, la détermination de la manière dont cette variation peut avoir lieu.

Enfin, le cinquième Mémoire est une collection de six petits Mémoires sur différens sujets.

Dans le premier, je démontre un principe qu'on se contente de supposer dans le calcul des variations; savoir, que l'équation d'une courbe étant $y = \phi : x$, celle de toute autre courbe, infiniment peu différente, pourra être exprimée par $y + \delta y = \phi : (x + \delta x)$.

Le second contient une théorie du mouvement simple, tant uniforme que varié. On sent que le mérite d'un pareil Mémoire ne peut consister que dans la clarté et l'ordre qui y règnent. C'est aussi le seul but que je me sois proposé, et c'est au lecteur à juger si j'ai réussi.

Le troisième de ces Mémoires a pour objet un problême d'algèbre commune. Il s'agit de rendre rationnelle, au moyen d'un facteur, une fonction quelconque irrationnelle; ce qui peut être utile entr'autres, pour faciliter certaines intégrations.

Le quatrième concerne un point de Statique. La machine que j'y calcule est très-simple, et d'un usage facile.

Le cinquième contient la solution d'un problême de Géométrie élémentaire, auquel j'ai appliqué le calcul d'une manière assez neuve. C'est une propriété du cercle très-connue; savoir, que quelle que soit la ligne qui le coupe en deux points, tous les angles qui, ayant leur sommet à sa circonférence d'un même côté de cette ligne, sont appuyés sur ses deux extrémités, seront égaux entr'eux.

Enfin, le dernier de ces Mémoires présente quelques réflexions, sur la résiſtance que nous éprouvons de la part des corps pesants. C'est encore un sujet très-élémentaire, mais qui m'a paru mériter d'être éclairci; d'autant que personne, que je sache, ne s'en est occupé.

MÉLANGES

MÉLANGES
MATHÉMATIQUES.

PREMIER MEMOIRE.

Recherches sur l'intégration des équations aux différences partielles qui admettent une intégration de l'ordre immédiatement inférieur.

CHAPITRE PREMIER.

Des équations du premier ordre & du premier degré, entre trois variables z, x, y.

1°. JE regarderai toujours z comme la variable principale qui est censée fonction des deux autres x, y. Si les différences partielles du premier ordre $\frac{dz}{dy}$, $\frac{dz}{dx}$ ne sont élevées à aucune puissance ni

multipliées entr'elles, l'équation du premier ordre fera auffi du premier degré, & elle fera repréfentée généralement par....(P)

$$M\frac{dz}{dy}+N\frac{dz}{dx}+P=0,$$

où M, N, P peuvent contenir z, x, y. Pour conclure de-là la valeur de z, je fuppoferai $\frac{dz}{dx}=p$; d'où réfulte $\frac{dz}{dy}=-\frac{P+pN}{M}$, &

$$dz=\frac{dz}{dx}dx+\frac{dz}{dy}dy=p\,dx-\frac{P+pN}{M}dy;$$

ce qui fournit l'équation aux différentielles ordinaires entre trois variables....(Q)

$$Mdz-Mp\,dx+(P+pN)\,dy=0,$$

où p eft indéterminée. Il faut cependant que p fatisfaffe à une certaine condition indifpenfable, pour que z ait réellement une valeur; favoir, que l'équation Q foit de nature à devenir une différentielle exacte, en la multipliant par un certain facteur; ce qui, comme on fait, n'a pas toujours lieu dans les équations à plus de deux variables. Cette condition eft exprimée par l'équation....(R) *

$$PM\frac{dp}{dz}-MN\frac{dp}{dx}-M^2\frac{dp}{dy}+p^2\left(N\frac{dM}{dz}-M\frac{dN}{dz}\right)+p\left(N\frac{dM}{dx}-M\frac{dN}{dx}+P\frac{dM}{dz}-M\frac{dP}{dz}\right)+P\frac{dM}{dx}-M\frac{dP}{dx}=0.$$

La valeur complette de z feroit donc donnée par deux équations, dont la première feroit, en fuppofant μ le facteur propre à rendre l'équation Q une différentielle exacte.....(S)

$$\int(M\mu\,dz-M\mu p\,dx+\mu[P+pN]\,dy)=\text{Conft.},$$

& la feconde feroit une équation aux fonctions arbitraires réful-

---

* Voyez Leçons de Calc. Différ. & Intég. de M. Coufin, page 291.

tante de celle R, & qui contiendroit la valeur générale de p. Ainſi, après avoir, pour chaque cas particulier, déterminé p, on ſubſtitueroit ſa valeur dans S; & prenant μ telle que l'exige cette valeur de p, on intègreroit cette équation, & on auroit la valeur de z. Mais comme l'équation R eſt beaucoup plus compliquée que la proposée, il faudra, pour le préſent (§ 36), renoncer à la méthode générale, & examiner ſéparément les différens cas où il eſt poſſible de ſimplifier cette recherche.

2. Le premier qui ſe préſente eſt celui où M & N ne contiennent pas z. On peut alors écrire ainſi l'équation Q,

$$M\,dz + P\,dy = p\,(M\,dx - N\,dy);$$

ou multipliant cette ſeconde fonction différentielle par le facteur μ qui la rend une différentielle exacte, & feſant $\int(\mu M\,dx - \mu N\,dy) = s$,

$$M\,dz + P\,dy = \frac{p}{\mu}\,ds.$$

Je prendrai, de cette ſuppoſition, la valeur de x en s & y, que je ſubſtituerai dans $M\,dz + P\,dy$, qui par-là ne contiendra plus que z, y & s. Je multiplierai enſuite toute l'équation par ϖ, qui eſt le facteur de $M\,dz + P\,dy$ dans l'hypothèſe de s conſtante, & ſuppoſant que $\Psi\,ds$ ſoit le terme qui feroit provenu de la différentiation par s, j'aurai

$$M\varpi\,dz + P\varpi\,dy + \Psi\,ds = \left(\frac{\varpi p}{\mu} + \Psi\right)ds:$$

& comme le premier membre eſt une différentielle exacte; ſavoir, celle de l'intégrale des deux premiers termes intégrés en ſuppoſant s conſtante, je le nommerai dT, & j'aurai

$$dT = \left(\frac{\varpi p}{\mu} + \Psi\right)ds;$$

ou parce que le coëfficient, à cause de l'arbitraire p, ne représente aussi qu'une quantité arbitraire, en la nommant K, cette équation se réduira à $dT=Kds$, ou $dT-Kds=0$, dont l'intégrale est $F:(T,s)=0$; ce qui signifie une fonction quelconque de T & de s, s ne contenant que x & y, mais T pouvant renfermer de plus la variable z.

3. Ordinairement de $dT=Kds$, on conclut immédiatement $T=F:s$; ce qui borne la valeur de K à être une fonction de s seule. Il m'a paru que la forme $F:(T,s)=0$ étoit plus générale, puisqu'elle résulte de la supposition que K est une fonction quelconque de T & s. En effet, la différentielle d'une fonction de deux variables t, u est $A\,dt+B\,du$: on tire donc de même, de $F:(T,s)=0$, $A\,dT+B\,ds=0$, ou $dT+\frac{B}{A}ds=0$, qui en supposant $\frac{B}{A}=-K$, se change en $dT-Kds=0$, comme ci-dessus, K étant telle fonction de T & s qu'on voudra imaginer. Au reste, ces deux résultats sont au fond les mêmes; & lorsque de l'équation $F:(T,s)=0$, on voudra tirer la valeur de T, ce sera par la formule $T=F:s$; tout comme de l'équation $z^2+x^2-a^2=0$, on conclut $z=\sqrt{a^2-x^2}$.

4. Le second cas est celui où, M & N renfermant z, x & y, on a $P=0$. Dans ce cas la formule se réduit à

$$dz=p\left(dx-\frac{N}{M}dy\right),$$

ou multipliant par le facteur μ, à

$$dz=\frac{p}{\mu}\left(\mu\,dx-\frac{\mu N}{M}dy\right),$$

dont le second membre constitue une différentielle exacte, dans laquelle z a été traitée comme constante. Soit $\Psi\,dz$ le terme qui seroit provenu de la différentiation par z, & on aura

$$\left(\frac{\Psi p}{\mu}+1\right)dz=\frac{p}{\mu}ds,$$

s étant l'intégrale de $\mu dx-\frac{\mu N}{M}dy$ en regardant z comme constante; expression qui peut se réduire, comme ci-dessus, à

$$dz-Kds=0, \text{ d'où } F:(z,s)=0.$$

Ces deux cas déja connus, sont les seuls qui admettent une solution aussi simple & aussi directe. Je vais présentement examiner celui où M, N & P contiennent les trois variables.

5. Soit donc l'équation

$$M\frac{dz}{dy}+N\frac{dz}{dx}+P=0;$$

M, N & P contenant, ou pouvant contenir z, x, y, de quelque manière que ce soit. On vient de voir que cette équation s'intègre toujours, dans le cas ou $P=0$: il est naturel d'essayer de ramener à ce cas, par des transformations convenables, toutes les équations comprises dans cette formule générale; c'est-à-dire, de faire évanouir le terme sans différence partielle: & il est facile de démontrer que cela est toujours possible. En effet, l'équation la plus compliquée qui puisse résulter de l'intégration d'une équation aux différences partielles du premier ordre & du premier degré, est $F:(\Pi,\Psi)=0$ (§ 3), Π & Ψ représentant deux fonctions données de x, y & z. On tire de-là, comme ci-dessus, $d\Pi-Kd\Psi=0$; c'est-à-dire, en développant $d\Pi$ & $d\Psi$... (E)

$$Adz+Bdx+Cdy-K(Jdz+Qdx+Rdy)=0.$$

Prenant ensuite les différences partielles, on aura les deux équations

$$A\frac{dz}{dx}+B-K(J\frac{dz}{dx}+Q)=0,$$

$$A\frac{dz}{dy}+C-K(J\frac{dz}{dy}+R)=0,$$

d'où éliminant l'arbitraire K, il vient pour résultat

$$(BJ-AQ)\frac{dz}{dy}+(AR-CJ)\frac{dz}{dx}+(BR-CQ)=0,$$

qui représente généralement toutes les équations aux différences partielles à trois variables z, x & y, du premier ordre, & du premier degré. Or, pour que $BR-CQ=0$, il suffit que B & $C=0$, ou que R & $Q=0$. La première supposition réduit l'équation E à

$$A\,dz-K(J\,dz+Q\,dx+R\,dy)=0;$$

c'est-à-dire, que le premier terme ne contiendra ni x ni y, & sera par conséquent une fonction de z seule. La seconde conduiroit évidemment au même résultat, & on peut conclure que, pour réduire l'équation

$$M\frac{dz}{dy}+N\frac{dz}{dx}+P=0$$

à avoir son terme $P=0$, il suffit de transformer l'équation $F:(\Pi,\Psi)=0$, en une autre de la forme $F:(u,\omega)=0$; u étant une nouvelle variable, & ω pouvant renfermer u, x & y. Or, il est évident que cela est toujours possible; car il suffit de supposer l'une ou l'autre des fonctions Π, Ψ, la première par exemple, $=u$, & ayant tiré de-là la valeur de z en u, x & y, de la substituer dans la seconde. On aura par-là une équation de la forme $F:(u,\omega)=0$, d'où résultera une équation aux différences partielles de la forme

$$M'\frac{du}{dy}+N'\frac{du}{dx}=0;$$

c'est-à-dire, que toute équation

$$M\frac{dz}{dy}+N\frac{dz}{dx}+P=0$$

peut se transformer en une autre

$$M'\frac{du}{dy}+N'\frac{du}{dx}=0.$$

6. Supposons qu'on ait l'équation

$$(2zxy+2zy\sqrt{zx+y^2})\frac{dz}{dy}-(zx^2+2zx\sqrt{zx+y^2}+2xy^2)\frac{dz}{dx}$$
$$-z^2x+2zy^2=0.$$

Si on fait $z=\frac{xy}{u}$, elle devient

$$(2uy+x^2+2x\sqrt{\frac{x^2y}{u}+y^2})\frac{du}{dx}-(2xy+2y\sqrt{\frac{x^2y}{u}+y^2})\frac{du}{dy}=0,$$

d'où

$$Mdx-Ndy=-(2xydx+2y\sqrt{\frac{x^2y}{u}+y^2}dx+2uydy+$$
$$x^2dy+2x\sqrt{\frac{x^2y}{u}+y^2}dy),$$

qui est la même chose que

$$Mdx-Ndy=-2u\sqrt{\frac{x^2y}{u}+y^2}\,d(\sqrt{\frac{x^2y}{u}+y^2}+\frac{xy}{u}).$$

Multipliant donc par $\frac{1}{2u\sqrt{\frac{x^2y}{u}+y^2}}$, j'aurai (§ 4)

$$s=\sqrt{\frac{x^2y}{u}+y^2}+\frac{xy}{u};$$

&, à cause de $F:(u,s)=0$,

$$F:(u,\sqrt{\frac{x^2y}{u}+y^2}+\frac{xy}{u})=0;$$

& remettant pour u sa valeur $\frac{xy}{z}$,

$$F:\left(\frac{xy}{z},\ z+\sqrt{zx+y^2}\right)=0.$$

Il est clair qu'on seroit parvenu au même but, si au lieu de supposer $\frac{xy}{z}=u$, on eût fait l'autre fonction $z+\sqrt{zx+y^2}=u$. On peut même trouver une infinité de fonctions qui produisent le même effet ; car au lieu de $F:(\Pi,\Psi)=0$, rien n'empêcheroit d'écrire

$$F:\{(\Pi,\Psi),[\Pi,\Psi]\}=0;$$

(Π,Ψ) & $[\Pi,\Psi]$ étant deux fonctions quelconques déterminées de Π & Ψ.

4. Mais on réussiroit bien rarement, par de simples tâtonnemens, à découvrir une de ces fonctions qu'il faut faire $=u$. Voici une méthode propre à faciliter, dans beaucoup d'occasions, cette recherche. Supposons cette fonction connue, & déduisons-en la valeur de z, qui soit fonction de u, x, y. On conclura de-là

$$dz=A\,du+B\,dx+C\,dy;\ \frac{dz}{dx}=A\frac{du}{dx}+B;\ \frac{dz}{dy}=A\frac{du}{dy}+C,$$

& en substituant ces valeurs, & représentant par ϑ la valeur supposée de z, on aura, dans le même exemple,

$$2\vartheta y^2-\vartheta^2x+(2\vartheta xy+2\vartheta y\sqrt{\vartheta x+y^2})\left(A\frac{du}{dy}+C\right)$$
$$-(\vartheta x^2+2\vartheta x\sqrt{\vartheta x+y^2}+2xy^2)\left(A\frac{du}{dx}+B\right)=0,$$

& comme, par hypothèse, le terme P, qui est celui sans différence particlle, est $=0$, on aura

$$2\vartheta y^2-\vartheta^2x+2c\vartheta xy+2c\vartheta y\sqrt{\vartheta x+y^2}-B\vartheta x^2-$$
$$2B\vartheta x\sqrt{\vartheta x+y^2}-2Bxy^2=0.$$

Il

Il s'agit donc de trouver au moins une valeur de B, C & ϑ, qui annulle cette quantité. Pour cela, fesons d'abord disparoître les termes affectés du signe radical, ce qui exige que $Cy = Bx$. Il faut de plus que le reste

$$2\vartheta y^2 - \vartheta^2 x + 2C\vartheta xy - B\vartheta x^2 - 2Bxy^2 = 0,$$

ou, mettant pour Bx sa valeur Cy,

$$C\vartheta xy - 2Cy^3 - \vartheta^2 x + 2\vartheta y^2 = 0,$$

qui, divisant par $\vartheta x - 2y^2$, laisse $Cy - \vartheta = 0$. On a donc les deux équations $Cy = Bx$, & $Cy = \vartheta$. Je commence par déduire de-là deux autres équations, dont chacune ne contient que B ou C, ce qui me donne $Bx = \vartheta$, $Cy = \vartheta$; d'où, à cause de $B = \frac{d\vartheta}{dx}$, & $C = \frac{d\vartheta}{dy}$, on conclura

$$x\frac{d\vartheta}{dx} - \vartheta = 0, \ \& \ y\frac{d\vartheta}{dy} - \vartheta = 0.$$

Il faut maintenant faire en sorte que dans ces deux équations, $\frac{d\vartheta}{dx}$ & $\frac{d\vartheta}{dy}$ ayent le même coëfficient; c'est-à-dire, qu'on multipliera la première par y, & la seconde par x; & on aura

$$xy\frac{d\vartheta}{dx} - \vartheta y = 0 \ \&$$

$$xy\frac{d\vartheta}{dy} - \vartheta x = 0.$$

Multipliant ensuite la première de celles-ci par dx & la seconde par dy, & les ajoutant ensemble, il en résultera enfin

$$xy\left(\frac{d\vartheta}{dx}dx + \frac{d\vartheta}{dy}dy\right) - \vartheta(y\,dx + x\,dy) = 0, \text{ ou}$$

$$xy\,d\vartheta - \vartheta(y\,dx + x\,dy) = 0,$$

qui étant multipliée par $\frac{1}{x^2y^2}$ & intégrée, donne $\frac{\vartheta}{xy}$ = const.; & il est

évident que cette conſtante eſt en général une fonction de u, puiſque ϑ n'a point varié par u, quoiqu'elle renferme néceſſairement cette variable. Ainſi

$$z = \vartheta = xyf:u;$$

formule dont la valeur $\frac{xy}{u}$ que j'ai employée ci-deſſus, eſt un cas particulier.

Mais il eſt aiſé de voir que l'équation de condition à laquelle on parvient pour annuller le terme ſans différence partielle, eſt la même que la propoſée, puiſque la transformation ſe réduit à mettre ϑ pour z; $B = \frac{d\vartheta}{dx}$ pour $\frac{dz}{dx}$; $C = \frac{d\vartheta}{dy}$ pour $\frac{dz}{dy}$. On pourroit donc ſe diſpenſer de toute transformation; pourvu qu'on regardât z comme fonction de trois variables x, y, u. Soit, par exemple,

$$(x^2 + xy - 2z^2)\frac{dz}{dx} + (2z^2 - xy - y^2)\frac{dz}{dy} + zx - zy = 0.$$

Je ſuppoſerai

$$(xy - 2z^2)\frac{dz}{dx} - (xy - 2z^2)\frac{dz}{dy} = 0, \text{ ou } \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}; \ \&$$

$$x^2\frac{dz}{dx} - y^2\frac{dz}{dy} + zx - zy = 0.$$

De ces deux équations, on conclut celles

$(x^2 - y^2)\frac{dz}{dy} + z(x-y) = 0$, ou diviſant par $x-y$, $(x+y)\frac{dz}{dy} + z = 0$,

$$\& \ (x+y)\frac{dz}{dx} + z = 0$$

Je multiplie la première par dy, & la ſeconde par dx, & leur ſomme donne

$$(x+y)\,dz + z(dx + dy) = 0,$$

dont l'intégrale eſt

$$z(x+y) = f:u, \text{ ou ſeulement} = u;$$

puisque rien ne détermine la forme de cette fonction. Ainsi $z x + z y = u$, est une transformation convenable.

Pour en trouver une seconde, je ferai

$$(x^2 + xy)\frac{dz}{dx} = (xy + y^2)\frac{dz}{dy}, \text{ ou } x\frac{dz}{dx} = y\frac{dz}{dy}; \&$$

$$2z^2\frac{dz}{dy} - 2z^2\frac{dz}{dx} = zy - zx, \text{ ou } 2z\frac{dz}{dy} - 2z\frac{dz}{dx} = y - x.$$

On tire de ces deux équations,

$$2z\frac{dz}{dy} + x = 0, \&$$

$$2z\frac{dz}{dx} + y = 0.$$

d'où résulte, comme ci-dessus,

$$2z\,dz + x\,dy + y\,dx = 0, \;\&\; z^2 + xy = u$$

qui est la seconde transformation convenable, & on peut immédiatement conclure de-là que l'intégrale de la proposée est

$$\phi : (z x + z y, z^2 + xy) = 0.$$

9. Il suffit donc, pour connoître l'intégrale complette d'une pareille équation, d'en trouver une intégrale particulière; & la méthode de tâtonnement que je viens d'indiquer, pourra être d'une grande ressource dans cette recherche. Voici une autre manière plus directe de trouver une intégrale particulière, dans les cas où l'équation a trois variables

$$M\,dz - Mp\,dx + (P + pN)\,dy = 0 \;(\S\, 1)$$

devient intégrable, en donnant à p une certaine valeur constante. Du moins la difficulté se bornera à assigner le facteur propre à rendre exacte une différentielle ordinaire à trois variables, qui est susceptible de le devenir. J'en ferai l'application à un exem-

ple très-ſimple en apparence, mais ſur lequel la méthode de tâtonnement n'a pu réuſſir. Soit

$$a\frac{dz}{dy} - z\frac{dz}{dx} + 2x - 2y = 0.$$

J'ai $M = a$, $N = -z$, $P = 2x - 2y$; d'où

$$a\,dz - ap\,dx + (2x - 2y - pz)\,dy = 0,$$

p étant déterminée par l'équation R (§ 1)

$$(2x - 2y)\frac{dp}{dz} + z\frac{dp}{dx} - a\frac{dp}{dy} + p^2 - 2 = 0.$$

On voit tout de ſuite que $p = \sqrt{2}$ ſatisfait à cette équation; puiſqu'alors $\frac{dp}{dz}, \frac{dp}{dx}, \frac{dp}{dy} = 0$ (& la même choſe aura lieu toutes les fois que, dans l'équation R, le terme ſans différence partielle ne contiendra aucune des variables). Subſtituant cette valeur de p, on aura

$$a\,dz - z\sqrt{2}\,dy - 2y\,dy + 2x\,dy - a\sqrt{2}\,dx = 0,$$

ou, feſant $z - x\sqrt{2} = \mu$,

$$a\,d\mu - dy(\mu\sqrt{2} + 2y) = 0,$$

dont l'intégrale eſt

$$a\log.(a + \mu + y\sqrt{2}) - y\sqrt{2} = \text{conſt.}$$

Ainſi remettant pour μ ſa valeur,

$$a\log.(a + z + [y - x]\sqrt{2}) - y\sqrt{2} = \text{conſt.}$$

Maintenant il eſt clair que, ſi on eût conſidéré z comme fonction des trois variables x, y & u, dont la dernière n'a pas varié, la conſtante auroit dû être une fonction arbitraire de cette variable u; je ferai donc ce changement (§ 8), & comme rien ne détermine cette fonction, je la ſuppoſerai ſimplement u. J'aurai par-là

$$a\log.(a + z + (y - x)\sqrt{2}) - y\sqrt{2} = u.$$

d'où

$$z = e^{\frac{y\sqrt{2}+u}{a}} + (x-y)\sqrt{2} - a.$$

Cette substitution changera la proposée en

$$a\frac{du}{dy} - \left(e^{\frac{u+y\sqrt{2}}{a}} + (x-y)\sqrt{2} - a\right)\frac{du}{dx} = 0,$$

dont l'intégrale est (§ 4)

$$F : \left(a(x-y)e^{\frac{y\sqrt{2}}{a}} + \frac{a}{2\sqrt{2}}e^{\frac{u+2y\sqrt{2}}{a}}, u\right) = 0;$$

& comme on a la valeur de u en z, x & y, on aura l'intégrale complette de la proposée.

10. Quelqu'indirecte que soit la manière indiquée (§ 7), de chercher, pour ainsi dire à tâtons, une intégrale particulière de la proposée, elle sera de la plus grande utilité dans bien des circonstances. Le seul cas où il soit impossible d'en faire usage, est celui où quelques-uns des termes, qui devroient constituer l'équation, s'entredétruisent. C'est par cette raison que l'équation de l'article précédent

$$a\frac{dz}{dy} - z\frac{dz}{dx} + 2x - 2y = 0$$

n'a pu s'intégrer par cette méthode. En effet, il est aisé de voir d'après son intégrale, que si tous les termes s'y trouvoient, cette équation auroit la forme

$$a\frac{dz}{dy} - z\frac{dz}{dx} + 2x - 2y + z\sqrt{2} - z\sqrt{2} = 0;$$

& on réussiroit en supposant

$$a\frac{dz}{dy} + 2(x-y) - z\sqrt{2} = 0; \text{ \&}$$

$$z\frac{dz}{dx} - z\sqrt{2} = 0, \text{ ou } \frac{dz}{dx} = \sqrt{2};$$

ce qu'il eſt impoſſible de deviner, puiſqu'il ne reſte aucun veſtige des deux termes $+z\sqrt{2}$ & $-z\sqrt{2}$, qui s'entredétruiſent.

Cette méthode ſera d'ailleurs très-utile dans les cas même les plus ſimples. Soit, par exemple,

$$(xy+y)\frac{dz}{dy} - (xy+x)\frac{dz}{dx} + xy^2 - x^2y = 0,$$

on parviendroit, en ſuivant les règles preſcrites (§ 2) à

$$dz = \frac{p}{\mu M}ds - \frac{xy-x^2}{x+1}dy, \text{ où } s = x+y+\log. xy.$$

Mais, comme il eſt impoſſible d'avoir la valeur de x en s & y; ni celle de y en s & x, on ſe trouvera tout-à-fait arrêté; quoique l'intégrale de cette propoſée ſoit

$$F:(x+y+\log. xy,\ z-xy) = 0$$

On peut, dans ce cas, employer avec ſuccès ma méthode. En effet, on trouve, pour l'équation qui fait évanouir le terme ſans différence partielle,

$$Cxy + Cy - Bxy - Bx + xy^2 - x^2y = 0.$$

Suppoſons $Cy - Bx = 0$, & $C - B + y - x = 0$, on aura, en éliminant C, $B = y$, & par conſéquent $C = x$; d'où

$$dz = d\vartheta = y\,dx + x\,dy;\ z = xy + u, \text{ ou } z - xy = u.$$

Par cette ſubſtitution, on parviendra à l'équation

$$F:(x+y+\log. xy,\ u) = 0.$$

où il ne faut plus que remettre pour u, ſa valeur $z - xy$.

11. Je reprends l'équation générale

$$M\frac{dz}{dy} + N\frac{dz}{dx} + P = 0$$

où M, N & P peuvent contenir, d'une manière quelconque, les

trois variables z, x & y. L'intégration de cette équation dépendra toujours de celle d'une équation à quatre variables. Cette démonstration tient à la proposition suivante, que je commence par établir.

En différentiant, comme ci-dessus, (§ 5) la formule générale $F:(\Pi, \Psi) = 0$, on parvient au résultat

$$\left(\frac{d\Pi}{dx}\frac{d\Psi}{dz} - \frac{d\Pi}{dz}\frac{d\Psi}{dx}\right)\frac{dz}{dy} + \left(\frac{d\Pi}{dz}\frac{d\Psi}{dy} - \frac{d\Pi}{dy}\frac{d\Psi}{dz}\right)\frac{dz}{dx} + \frac{d\Pi}{dx}\frac{d\Psi}{dy} - \frac{d\Pi}{dy}\frac{d\Psi}{dx} = 0,$$

qui est évidemment la forme que doit avoir toute équation

$$A\frac{dz}{dy} + B\frac{dz}{dx} + C = 0,$$

afin d'être une équation différentielle exacte; c'est-à-dire, telle qu'elle résulte immédiatement de l'opération, par laquelle on fait évanouir le signe de la fonction arbitraire F.

On se convaincra facilement que cette forme est telle, qu'en différentiant le coëfficient de $\frac{dz}{dy}$ par y; celui de $\frac{dz}{dx}$ par x; & enfin le terme sans différence partielle (qu'on peut regarder comme le coëfficient de $\frac{dz}{dz}$) par z; on se convaincra, dis-je, facilement que la somme des deux premiers est égale au dernier; c'est-à-dire, que

$$\frac{dA}{dy} + \frac{dB}{dx} - \frac{dC}{dz} = 0.$$

Maintenant; en fesant $A = \mu M$, $B = \mu N$, $C = \mu P$, & substituant ces valeurs dans cette équation de condition, on aura

$$\mu\left(\frac{dM}{dy} + \frac{dN}{dx} - \frac{dP}{dz}\right) + M\frac{d\mu}{dy} + N\frac{d\mu}{dx} - P\frac{d\mu}{dz} = 0,$$

qui exprimera la condition nécessaire pour que l'équation

$$M\frac{dz}{dy} + N\frac{dz}{dx} + P = 0$$

puisse devenir une différentielle exacte, dans le sens dont il s'agit ici, étant multipliée par un facteur μ : & on voit que cette condition se borne à donner à μ une certaine valeur.

On peut conclure de-là que, lorsqu'une équation satisfera à cette condition par elle-même; c'est-à-dire, lorsque

$$\frac{dM}{dy} + \frac{dN}{dx} - \frac{dP}{dz} = 0,$$

le facteur μ sera déterminé par l'équation aux différences partielles à quatre variables

$$M\frac{d\mu}{dy} + N\frac{d\mu}{dx} - P\frac{d\mu}{dz} = 0.$$

Or, dans ce cas, le facteur μ ne peut être que constant, ce qui est évident; ou de la forme $\mu = f:(\Pi, \Psi)$, ce qui me reste à prouver de la manière suivante.

Pour que l'équation

$$\mu\left(M\frac{dz}{dy} + N\frac{dz}{dx} + P\right) = 0$$

soit une différentielle exacte, en même tems que celle

$$M\frac{dz}{dy} + N\frac{dz}{dx} + P = 0,$$

sans que μ soit une constante, il faut que la première dérive immédiatement d'une intégrale qui, sous une autre forme, soit cependant la même chose que $F:(\Pi, \Psi) = 0$ d'où dérive la seconde. Une pareille intégrale ne peut être en général que

$$\phi:(F:(\Pi, \Psi)) = 0,$$

ce qui désigne une fonction quelconque de cette fonction arbitraire; comme qui diroit, mais d'une manière plus circonscrite, $\overline{F:(\Pi, \Psi)}^m = 0$; & on trouvera facilement qu'il résulteroit de-là une équation de la forme

(M

$$\left(M\frac{dz}{dy}+N\frac{dz}{dx}+P\right)\phi':\left(F:[\Pi,\Psi]\right)=0,$$

où ϕ' désigne à l'ordinaire la différentiation de ϕ ; comme $dz\,\phi':z = d.\phi:z$. Le facteur μ ne peut donc être que $\phi':(F:[\Pi,\Psi])$, ou simplement $f:(\Pi,\Psi)$; c'est-à-dire, que les deux fonctions qui constitueront la valeur de μ, qu'on déduira de l'équation à quatre variables

$$M\frac{d\mu}{dy}+N\frac{d\mu}{dx}-P\frac{d\mu}{dz}=0.$$

& qu'on verra plus bas être

$$\mu=\phi:(\Pi,\Psi),$$

feront exactement les mêmes que les deux fonctions Π, Ψ, qui constituent l'intégrale de l'équation à trois variables

$$M\frac{dz}{dy}+N\frac{dz}{dx}+P=0;$$

Ces deux intégrations dépendent donc l'une de l'autre, comme je l'ai avancé au commencement de cet article.

Soit, par exemple, proposée l'équation

$$(xy-zy)\frac{dz}{dy}+(zx-xy)\frac{dz}{dx}+zx-zy=0.$$

J'ai ici $M=xy-zy$, $N=zx-xy$, $P=zx-zy$. Je forme avec ces mêmes coëfficiens, l'équation à quatre variables

$$M\frac{d\mu}{dy}+N\frac{d\mu}{dx}-P\frac{d\mu}{dz}=0;$$

c'est-à-dire,

$$(xy-zy)\frac{d\mu}{dy}+(zx-xy)\frac{d\mu}{dx}+(zy-zx)\frac{d\mu}{dz}=0,$$

dont l'intégrale donne, comme on verra plus bas, pour valeur de μ,

$$\mu=F:(zxy,\ z+x+y).$$

Partant celle de la proposée sera

$$\phi:(z x y,\ z+x+y)=c.$$

On parviendroit donc à intégrer généralement, & d'une manière directe, toutes les équations aux différences partielles à trois variables, lors même que les deux fonctions Π, Ψ contiendront ces trois variables, si on réussissoit à intégrer généralement l'équation à quatre variables

$$M\frac{d\mu}{dy}+N\frac{d\mu}{dx}-P\frac{d\mu}{du}=0,$$

où M, N, P ne contiennent que les trois variables u, x & y. Mais, avant de passer à l'examen de ces nouvelles équations, je crois devoir m'occuper de celles à trois variables, dont les différences partielles ne sont pas linéaires.

CHAPITRE SECOND.

Des équations du premier ordre & d'un degré quelconque, entre trois variables z, x, y.

12. DANS les équations que je viens d'examiner, les différences partielles $\frac{dz}{dy}$, $\frac{dz}{dx}$ étoient linéaires. Il peut arriver que ces mêmes différences soient, ou multipliées entr'elles, ou élevées à un degré quelconque. L'illustre Euler donne, dans le troisième volume de son *Calcul intégral* *, plusieurs méthodes très-ingénieuses, pour intégrer cette sorte d'équation dans certains cas, particuliers à la vérité, mais fort étendus. Celle que je donne ici est générale pour tous ces mêmes cas; & elle en comprend beau-

* Voyez aussi Leçons de Calc. Différ. & Intég. de M. Cousin.

coup d'autres. Elle ne conduit pas directement à l'intégration de ces équations ; mais elle les ramène à celles du premier degré.

Ayant une pareille équation, on l'ordonnera par rapport à la différence partielle la moins élevée ; supposons que ce soit $\frac{dz}{dy}$. Ayant nommé $\frac{dz}{dx}=p$, on tirera, par les règles ordinaires, la valeur linéaire de $\frac{dz}{dy}$ qui soit $=K$, ou plus généralement $=\frac{v}{w}$; cette fraction pouvant contenir, de quelque manière que ce soit, z, x, y & p. On conclut de-là

$$dz=p\,dx+\frac{v}{w}dy,\text{ ou } w\,dz-wp\,dx-v\,dy=0;$$

& on aura de plus, comme ci-dessus (§ 1), une équation de condition pour déterminer p, qui sera évidemment encore plus compliquée. J'abandonne donc cette solution générale, pour me borner à un cas particulier où cette recherche se simplifie considérablement ; c'est celui où K ne contient, outre p, que deux des trois variables z, x, y. Ce cas renferme lui seul tous ceux dont je viens de parler.

En effet, nommant $\frac{dz}{dx}=p$, $\frac{dz}{dy}=q$, on peut voir, dans l'ouvrage déja cité de M. Cousin, qu'ils se réduisent aux suivans ;

1°. $R=0$, R étant fonction de p, q & d'une seulement des trois variables z, x, y ;

2°. $q=Vx+U$, V & U étant fonctions de p & y ;

3°. $y=Vx+U$, V & U étant fonctions de p & q ;

4°. $P=Q$, P étant fonction de p, x, & Q de q, y ;

qui sont évidemment tous renfermés, & ne sont qu'une partie du

cas que j'examine, où $R=o$, R étant fonction de p, q, & de deux quelconques des trois variables. Les seules équations qui échappent à ce cas, sont donc celles où K contient tout à la fois p, z, x & y. Encore verra-t-on qu'il y a une restriction à mettre à cette exception (§ 17).

13. Voici comme j'intègre ces équations. J'ai $dz=pdx+Kdy$, où, par hypothèse, K ne contient que p, x, y; ou p, z, x; ou enfin p, z, y.

Dans le premier cas, je laisse $dz=pdx+Kdy$;

Dans le second, j'en tire . . . $dy=\frac{dz-pdx}{K}$;

Et dans le troisième . . . . . . $dx=\frac{dz-Kdy}{p}$;

& je trouve, en intégrant, les trois formules,

$$z=\int(pdx+Kdy),$$

$$y=\int\left(\frac{dz-pdx}{K}\right),$$

$$x=\int\left(\frac{dz-Kdy}{p}\right),$$

où il ne s'agit plus que de faire ensorte que les quantités qui sont sous le signe, deviennent des différentielles exactes; ce qui est toujours possible au moyen de l'indéterminée p : & on aura

pour la première, $\frac{dp}{dy}-\frac{dK}{dx}=o$;

pour la seconde, $K\frac{dp}{dz}-p\frac{dK}{dz}-\frac{dK}{dx}=o$;

& pour la troisième, $K\frac{dp}{dz}+\frac{dp}{dy}-p\frac{dK}{dz}=o$;

qui sont des équations de la nature de celles que j'ai examinées;

dans le Chapitre précédent. Pour éclaircir ceci, je joindrai quelques exemples, dont chacun aura son but particulier.

14. Le premier sera un exemple très-simple, tiré de l'ouvrage que j'ai cité ci-dessus, afin de comparer entr'eux nos différens résultats.

Soit $\frac{dz}{dy}\frac{dz}{dx}=1$;

En fesant $\frac{dz}{dx}=p$, on aura $\frac{dz}{dy}=\frac{1}{p}$, &

$$dz=p\,dx+\frac{1}{p}dy,\text{ d'où } z=\int(p\,dx+\frac{1}{p}dy);$$

& pour déterminer p, on a

$$p^2\frac{dp}{dy}+\frac{dp}{dx}=0;$$

dont l'intégrale est $F:(p^2x-y,p)=0$;

Il est aisé de démontrer l'identité de ces deux équations, avec celles qui résultent de la méthode que rapporte M. Cousin (*pag.* 616).

En effet, on tire ici de la dernière

$$p^2x-y=F:p,\ \&\ x=\frac{y}{p^2}+\frac{F:p}{p^2}=\frac{y}{p^2}+\phi':p;$$

& la première est la même chose que

$$z=px+\frac{y}{p}-\int(x-\frac{y}{p^2})dp=px+\frac{y}{p}-\int dp\,\phi':p=px+\frac{y}{p}-\phi:p$$

(§ 11)

(en prenant ϕ' & ϕ dans la même signification que F' & F à l'endroit cité); c'est-à-dire, en remettant pour x sa valeur,

$$z=\frac{2y}{p}+p\phi':p-\phi:p.$$

Mais en même tems on sent bien que cette identité d'expressions n'est pas nécessaire; puisqu'on ne parvient pas réellement à

la valeur de z, qui effectivement doit être *une*, mais seulement à deux équations, de la combinaison desquelles elle doit résulter.

15. Soit maintenant $\frac{dz^2}{dx} + \frac{dz}{dx}\frac{dz}{dy} = 1$;

On a donc $\frac{dz}{dy} = \frac{1-p^2}{p}$, & $z = \int (p\,dx + \frac{1-p^2}{p}\,dy)$; & de plus,

$$p^2 \frac{dp}{dy} + (1+p^2)\frac{dp}{dx} = 0,$$

dont l'intégrale est

$$F:(p^2 x - p^2 y - y, p) = 0, \text{ ou } p^2 x - p^2 y - y = \phi : p;$$

cette dernière forme étant suffisante pour l'objet que je me propose ici : & ce sont là les deux équations qui concourent à déterminer la valeur de z.

La proposée a été ordonnée par rapport à $\frac{dz}{dy}$; & ce seroit chercher les difficultés, que de s'y prendre autrement. Il est cependant clair qu'on parviendroit également à l'intégrale complette de cette équation, en l'ordonnant par $\frac{dz}{dx}$; & quoiqu'elle ne puisse manquer de se présenter sous une autre forme, il est hors de doute qu'elle ne soit la même.

Soit donc $\frac{dz}{dy} = q$, d'où $\frac{dz}{dx} = -\frac{1}{2}q \pm \sqrt{1 + \frac{1}{4}q^2}$, &

$$z = \int (q\,dy - \frac{1}{2}q\,dx \pm \sqrt{1+\frac{1}{4}q^2}\,dx).$$

On a de plus

$$(2\sqrt{1+\frac{1}{4}q^2} - q)\frac{dq}{dy} + 4\sqrt{1+\frac{1}{4}q^2}\frac{dq}{dx} = 0,$$

dont l'intégrale se réduit (§ 4) à

$$\pm(2x - 4y)\sqrt{1+\frac{1}{4}q^2} - qx = \phi : q.$$

Nous ferons à ce ſujet quelques remarques.

1°. Il eſt clair que lorſque la différence partielle, par laquelle on ordonne une pareille équation, eſt du degré n, on aura n racines; & par conſéquent n valeurs de dz : mais il suffit d'en conſidérer une. En effet, on peut toujours regarder ces équations comme appartenant à une certaine *famille* de ſurfaces courbes. Ainſi les différentes intégrales complettes qui réſulteront de ces différentes valeurs, ne feroient chacune que celle d'une portion de ces ſurfaces (j'appelle *portion* d'une ſurface, ce qu'on appelle *branche* dans les courbes), & conſéquemment lorſque, pour avoir une intégrale particulière, on ſubſtituera à la fonction arbitraire, une fonction quelconque déterminée, on parviendra par l'évanouiſſement des radicaux au même réſultat, quelque racine qu'on ait employée.

2°. Il faut cependant diſtinguer le cas où cette équation du degré n pourroit ſe décompoſer en pluſieurs autres. Alors on feroit ſur chacune d'elles le même raiſonnement, & on concluroit que pluſieurs familles de ſurfaces courbes répondent à la queſtion : comme il arrive lorſque, cherchant une ſurface par quelque propriété de *maximum*, on parvient en même tems à celle qui détermine le *minimum* de la même propriété.

3°. Nous venons de trouver deux différentes expreſſions de z; ſavoir, par la première opération,

$$z = \int \left(p\,dx + \frac{1-p^2}{p} dy \right), \text{ \&}$$

$$p^2 x - p^2 y - y = F:p;$$

& par la ſeconde

$$z = \int (q\,dy - \tfrac{1}{2} q\,dx \pm \sqrt{1 + \tfrac{1}{4} q^2}\,dx), \text{ \&}$$

$$\pm (2x - 4y) \sqrt{1 + \tfrac{1}{4} q^2} - qx = F : q;$$

or, le résultat de ces deux opérations doit être le même : supposons donc, dans la première, $F : p = 0$; on aura $p^2 = \frac{y}{x - y}$, &

$$z = \int \frac{y\,dx + x\,dy - 2y\,dy}{\sqrt{xy - y^2}} = 2\sqrt{xy - y^2} + C.$$

Qu'on demande présentement la valeur de $F : q$ dans la seconde, pour parvenir au même résultat. Je commencerai d'abord par établir que

$$2\sqrt{xy - y^2} + C = z = \int (q\,dy - \tfrac{1}{2} q\,dx \pm \sqrt{1 + \tfrac{1}{4} q^2}\,dx);$$

d'où différentiant,

$$\frac{y\,dx - x\,dy - 2y\,dy}{\sqrt{xy - y^2}} = q\,dy - \tfrac{1}{2} q\,dx \pm \sqrt{1 + \tfrac{1}{4} q^2}\,dx,$$

équation qui doit être identique; donc

$$q = \frac{x + 2y}{\sqrt{xy - y^2}}, \text{ \&} \pm \sqrt{1 + \tfrac{1}{4} q^2} - \tfrac{1}{2} q = \frac{y}{\sqrt{xy - y^2}},$$

en égalant entr'eux les coëfficiens de dy, & dx dans les deux membres. Au moyen de ces deux équations, on prendra la valeur de x & de y en q, pour la substituer dans

$$\pm (2x - 4y) \sqrt{1 + \tfrac{1}{4} q^2} - qx = F : q.$$

On a d'abord $\sqrt{xy - y^2} = \frac{x - 2y}{q}$; donc

$$\pm \sqrt{1 + \tfrac{1}{4} q^2} - \tfrac{1}{2} q = \frac{qy}{x - 2y}; \text{ \&}$$

$$\pm(2x-4y)\sqrt{1+\frac{1}{4}q^2}-qx=0, \text{ d'où } F:q=0.$$

De même, en ſuppoſant dans la première, $F:p=ap^2$, on aura

$$z=2\sqrt{xy-y^2}-ay,$$

& on trouvera que, pour avoir la même valeur de z dans la ſeconde, il faut faire

$$F:q=2a\sqrt{1+\frac{1}{4}q^2}-aq.$$

16. Pour donner un exemple relatif au cas où K contient p, x & y, je choiſirai celui

$$\frac{dz^2}{dx}-xy^2\frac{dz}{dy}\frac{dz}{dx}+x^4y^2=0,$$

qu'on verra ne pouvoir ſe ranger à aucune des formules ci-deſſus (§ 12). J'en tire à l'ordinaire,

$$dz=p\,dx+\frac{x^4y^2+p^2}{pxy^2}dy,$$

& pour déterminer p,

$$p^2x^2y^2\frac{dp}{dy}+(x^5y^2-p^2x)\frac{dp}{dx}+p^3-3px^4y^2=0,$$

d'où il faudra faire diſparoître le terme ſans différence partielle (§ 7), en ſuppoſant

$$\frac{p^2-4x^2y}{x^2}=u, \text{ ou } p=x\sqrt{4y+u};$$

& ſubſtituant cette valeur de p, on aura

$$(4xy^3+uxy^2)\frac{du}{dy}+(x^2y^2-u-4y)\frac{du}{dx}=0,$$

qu'on intègrera ſelon l'article 4; & on aura, pour déterminer z, les trois équations

1°. $z=\int(p\,dx+\frac{x^4y^2+p^2}{pxy^2}dy)$

2°. $p^2 = 4x^2y + ux^2$,

3°. $u = F : \left\{ \frac{x^2}{\sqrt{4y+u}} + \int \frac{4y+u}{y^2\sqrt{(4y-u)^3}} dy \right\}$ en intégrant par y seule.

Si par exemple cette fonction $= 0$, on aura $u = 0$, $p^2 = 4x^2y$, & une intégrale particulière sera

$$z = x^2\sqrt{y} - \frac{4}{\sqrt{y}} = \frac{x^2y-4}{\sqrt{y}}.$$

17. Si l'on avoit l'équation

$$zx^2\frac{dz^2}{dx} - \frac{dz}{dy}\frac{dz}{dx} + z^3x = 0,$$

on en concluroit

$$dz = p\,dx + \frac{z^3x + zp^2x^2}{p}dy,$$

& comme c'est le cas où K ne contient que p, z & x, on laisseroit dy seule; c'est-à-dire,

$$dy = \frac{p\,dz - p^2dx}{z^3x + p^2zx^2}.$$

Ainsi tout se réduit à trouver la valeur de p, qui rende cette quantité une différentielle exacte, en considérant z comme une simple variable.

Ce seroit la même chose, si la proposée étoit

$$zy^2\frac{dz^2}{dx} - \frac{dz}{dy}\frac{dz}{dx} + z^3y = 0; \text{ d'où}$$

$$dz = p\,dx + \frac{p^2zy^2 + z^3y}{p}dy, \&$$

$$dx = \frac{p\,dz - (p^2zy^2 + z^3y)dy}{p^2}.$$

Il est encore évident que le même procédé s'appliqueroit au cas où, K' étant fonction de p, z & x, on auroit $K = K'Y$. Car de

$$dz = p\,dx + K'Y\,dy,$$

on tireroit

$$\int Y\,dy = \int \frac{dz - p\,dx}{K'}.$$

C'eſt là la reſtriction dont j'ai fait mention plus haut (§ 12). On voit que la propoſée contient dans ce cas les trois variables z, x, y; mais toutes les y finiſſent par ſe réunir en une ſeule fonction Y, qui multiplie dy.

Ceci ne ſauroit avoir lieu pour l'autre variable x, parce que dx n'a jamais que p pour coëfficient. Ce feroit le contraire, ſi l'équation étoit ordonnée par $\frac{dz}{dx}$; & alors le ſeul coëfficient de dy feroit q. Il ſera donc à propos, dans le cas où la propoſée contient les trois variables, d'ordonner ſucceſſivement l'équation par $\frac{dz}{dy}$ & par $\frac{dz}{dx}$; ou, ſi on l'aime mieux, après avoir eſſayé par celle $\frac{dz}{dy}$, de permuter entr'elles les variables; c'eſt-à-dire, de faire y ce qui étoit x, & x ce qui étoit y, & de recommencer l'opération.

Qu'on ait, par exemple,

$$\frac{dz^2}{dx^2}\frac{dz}{dy} = zx + xy:$$

ſi on ordonne cette équation par $\frac{dz}{dy}$, on a $\frac{dz}{dy} = \frac{zx + xy}{p^2}$, &

$$dz = p\,dx + \frac{zx + xy}{p^2}dy; \text{ d'où},$$

$$p^2 dz - p^3 dx - (zx + xy)\,dy = 0,$$

que je ne puis intégrer, parce que le premier membre n'eſt pas ſuſceptible d'être partagé en deux parties, dont la première ne contienne qu'une ſeule variable, & la ſeconde contienne les deux

D 2

autres, avec l'indéterminée p. Si au contraire je l'ordonne par $\frac{dz}{dx}$, il me vient $\frac{dz}{dx} = \sqrt{\frac{zx+xy}{q}}$; &

$$dz = q\,dy + \sqrt{\frac{zx+xy}{q}}\,dx;$$ d'où

$$\sqrt{q}\,dz - q\sqrt{q}\,dy - \sqrt{z+y}\sqrt{x}\,dx = 0,$$ & enfin

$$\frac{\sqrt{q}\,dz - q\sqrt{q}\,dy}{\sqrt{z+y}} = \sqrt{x}\,dx.$$

18. En donnant plus d'étendue à ces formules, l'analyfe mène naturellement à examiner, pour les équations qui ne s'y trouvent pas comprifes, la formule plus générale

$$\Pi = \int(\varpi\,dx + K\,dy);$$

Π étant une fonction donnée de z, x & y, telle que

$$d\Pi = A\,dz + B\,dx + C\,dy.$$

On tire de-là,

$$A\frac{dz}{dx} + B = \varpi;\ \&\ A\frac{dz}{dy} + C = K.$$

Et, éliminant ϖ au moyen de ces deux équations, on parviendra à une équation aux différences partielles, dont le degré & la forme dépendront de la manière dont K contient ϖ & les autres variables. Etant donc donnée une équation aux différences partielles, fi on favoit quelle fonction de ϖ & des autres variables doit être K, pour convenir à cette équation, en éliminant ϖ, on parviendroit à une équation indéterminée qui feroit, par hypothèfe, la même que la propofée; & il feroit très-facile, par la comparaifon terme à terme, de déterminer A, B & C, & conféquemment $d\Pi$ & Π. Soit, par exemple,

$$x^2y^2\frac{dz^2}{dx^2} + 2zxy^2\frac{dz}{dx} - xy\frac{dz}{dy} + x^2 + z^2y^2 - zx = 0.$$

& qu'on fache que $K = \varpi^2 + x^2$: éliminant ϖ des deux équations

$$A\frac{dz}{dx} + B = \varpi,\ A\frac{dz}{dy} + C = K = \varpi^2 + x^2,$$

il en réfulte

$$A^2\frac{dz^2}{dx} + 2AB\frac{dz}{dx} - A\frac{dz}{dy} + B^2 - C + x^2 = 0,$$

qui, comparée terme à terme avec la propofée, après avoir multiplié cette dernière par un facteur indéterminé ϵ, qu'on peut toujours fuppofer être difparu par la divifion, donne
$A^2 = \epsilon x^2 y^2$, $2AB = 2\epsilon z x y^2$, $A = \epsilon x y$, $B^2 - C + x^2 = \epsilon(x^2 + z^2 y^2 - z x)$.
De la première & de la troifième, on tire $\epsilon = 1$, $A = xy$; d'où & de la feconde, $B = zy$. Enfin, on conclut de la quatrième, $C = zx$; donc

$$d\Pi = xy\,dz + zy\,dx + zx\,dy;\ \&$$

$$\Pi = zxy = \int(\varpi\,dx + [\varpi^2 + x^2]\,dy).$$

Mais cette vraie équation entre K & ϖ étant inconnue, on fe trouve réduit à en fuppofer une plus générale qu'elle; & telle, qu'éliminant par fon moyen ϖ, il en réfulte une équation indéterminée, qui contienne la propofée; c'eft-à-dire, qui par la détermination convenable des indéterminées qui la compofent, puiffe produire la propofée.

Cette équation qu'on peut fuppofer entre K & ϖ, fe trouvera toujours, en prenant refpectivement les mêmes puiffances de K & ϖ, que celles de $\frac{dz}{dy}$, $\frac{dz}{dx}$ contenues dans la propofée, & leur donnant des coëfficiens indéterminés. Ainfi, dans l'exemple déja cité, on trouve les termes $\frac{dz^2}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$ & un terme fans différence

partielle : je prendrai donc l'équation indéterminée

$$aK + b\varpi + c\varpi^2 + e = 0.$$

En effet, si je substitue, pour K & ϖ, leurs valeurs $A\frac{dz}{dy} + C$, & $A\frac{dz}{dx} + B$, l'équation résultante contiendra les mêmes termes que la proposée, mais d'une manière beaucoup plus générale ; puisque les coëfficiens de ces termes sont indéterminés & qu'au lieu de $\frac{dz}{dy}, \frac{dz}{dx}$, il s'y trouve les mêmes puissances de $A\frac{dz}{dx} + C$, $A\frac{dz}{dx} + B$, quantités dont les premières ne sont qu'un cas particulier, auquel on peut toujours les ramener. J'exprimerai donc, dans ce cas-ci, la loi qui règne entre K & ϖ, par l'équation ci-dessus ; ou, ce qui ne change rien, par

$$K = M\varpi^2 + H\varpi + N;$$

& au moyen de cette équation & des deux formules

$$A\frac{dz}{dx} + B = \varpi, \quad A\frac{dz}{dy} + C = K,$$

je conclurai, pour équation hypothétique,

$$MA^2\frac{dz^2}{dx} + (2MAB + AH)\frac{dz}{dx} - A\frac{dz}{dy} + MB^2 + HB + N - C = 0:$$

d'où, comparant terme à terme, il me vient

$$MA^2 = 6x^2y^2, \quad 2MAB + AH = 26zxy, \quad A = 6xy,$$
$$MB^2 + HB + N - C = 6(x^2 + z^2y^2 - zx);$$

& je cherche, au moyen de ces équations, les valeurs de A, B, C. Les première & troisième me donnent $M = \frac{1}{6}$, $MA = xy$; d'où & de la seconde, $B = 6zy - \frac{6H}{2}$. Or,

$$A\,dz + B\,dx, \text{ ou } \beta\,xy\,dz + (\beta\,zy - \beta\tfrac{H}{2})\,dx$$

doit être une différentielle exacte, en supposant y constante ; donc, fesant $H = 0$, puisque rien ne la détermine, j'aurai β égal au facteur de $xy\,dz + zy\,dx$, y étant constante ; ainsi $\beta = \text{const.} = 1$, $M = 1$, $A = xy$, $B = zy$. De plus, C est le coëfficient de dy, en fesant varier $\int(A\,dz + B\,dx)$ ou zxy par y ; donc $C = zx$. Et enfin, en vertu de la quatrième équation, $N = x^2$; qui sont les mêmes valeurs que ci-dessus.

19. Supposons maintenant une équation plus compliquée,

$$y^2 \frac{dz^2}{dx}\frac{dz}{dy} + (zy + xy)\frac{dz^2}{dx} + 2y^2\frac{dz}{dx}\frac{dz}{dy} + (2zy + 2xy)\frac{dz}{dx} + y^2\frac{dz}{dy} + zy + xy - x = 0.$$

Je la multiplie par β, & je remarque, selon ce que je viens de dire, que l'équation entre K & ϖ, d'après les termes qui se trouvent dans la proposée, doit être

$$a\varpi^2 K + b\varpi^2 + c\varpi K + e\varpi + fK + g = 0.$$

J'en devrois donc conclure

$$K = \frac{-b\varpi^2 - e\varpi - g}{a\varpi^2 + c\varpi + f};$$

mais, comme je puis absolument obtenir les mêmes termes qui sont dans la proposée, sans avoir une équation aussi générale, j'essayerai, pour simplifier le calcul, de la réduire à

$$K = \frac{N\varpi^2 + M}{\varpi^2} = \frac{M}{\varpi^2} + N,$$

au risque, si cela ne réussit pas, de prendre la formule en son entier; ce qui devient quelquefois nécessaire. Ayant donc substitué pour K cette valeur, & éliminé ϖ, j'aurai, pour équation hy-

pothétique,

$$A^3\frac{dz^2}{dx}\frac{dz}{dy}+2A^2B\frac{dz}{dx}\frac{dz}{dy}+AB^2\frac{dz}{dy}+(A^2C-A^2N)\frac{dz^2}{dx}+$$
$$2AB(C-N)\frac{dz}{dx}+B^2(C-N)-M=0.$$

En comparant chaque terme avec le terme correſpondant de la propoſée, j'ai

$$A^3=\varepsilon y^2, A^2B=\varepsilon y^2, AB^2=\varepsilon y^2, A^2(C-N)=\varepsilon y(z+x),$$
$$AB(C-N)=\varepsilon y(z+x), B^2(C-N)-M=\varepsilon y(z+x)-\varepsilon x.$$

Des deux premières, je tire $A=B$, ce qui s'accorde avec la troiſième; & je vois que ε peut être $=y$. J'aurai donc $A=B=y$; & par la quatrième, $C-N=z+x$, ce qui s'accorde avec la cinquième. Enfin la dernière me donne

$$y^2(z+x)-M=y^2(z+x)-xy, \text{ ou } M=xy.$$

Ainſi, en réſumant, $A=B=y, M=xy, C-N=z+x$; or C, d'après les valeurs de A & B, ne peut manquer d'être $=z+x$; donc $N=0$. En ſubſtituant ces valeurs dans la formule différentielle, il réſulte

$$y\,dz+y\,dx+(z+x)\,dy=\varpi\,dx+\frac{xy}{\varpi^3}dy;$$

& intégrant

$$zy+xy=\int(\varpi\,dx+\frac{xy}{\varpi^3}dy),$$

où il ne faut plus que déterminer ϖ, de manière que la quantité ſous le ſigne devienne une différentielle exacte.

20. Dans ces exemples, on eſt parvenu à des valeurs de M, N, &c. qui ne contenoient pas z; & où conſéquemment K étoit fonction de ϖ, x, y ſeulement. Mais il peut arriver que ces mêmes

mes valeurs ſoient compliquées de z. Alors, au lieu de la formule

$$\Pi = \int (\varpi\, dx + K\, dy),$$

on tireroit de

$$A\, dz + B\, dx + C\, dy, \text{ ou } d\Pi = \varpi\, dx + K\, dy,$$

(en ſubſtituant pour z ſa valeur en Π) 1°. Si K étoit fonction de Π & y ſeulement,

$$\frac{d\Pi - K\, dy}{\varpi} = dx, \text{ \& } x = \int \frac{d\Pi - K\, dy}{\varpi};$$

où ϖ pourra être fonction de Π & y; 2°. & dans le cas contraire, où K contiendroit ſeulement Π & x, ou ſeroit en général une fonction K' de Π & x, multipliée par une fonction Y de y,

$$\int Y\, dy = \int \frac{d\Pi - \varpi\, dx}{K'},$$

ϖ étant fonction de Π & x; en obſervant pour ce dernier cas, ce que j'ai dit à la fin de l'article 17.

21. Soit $z x^3 y^5 \frac{dz^2}{dx} + 2 z^2 x^2 y^5 \frac{dz}{dx} - xy \frac{dz}{dy} + z^3 x y^5 - z x = 0.$ Je compare cette équation avec la réſultante de la ſuppoſition $K = M\varpi^2 + N$ (§ 18), & je trouve

$MA^2 = \varepsilon z x^3 y^5$, $MAB = \varepsilon z^2 x^2 y^5$, $A = \varepsilon xy$, $MB^2 + N - C = \varepsilon z^3 x y^5 - \varepsilon z x$.

De la première & de la troiſième, j'ai $M = \frac{z x y^3}{\varepsilon}$; & des trois premières $B = \varepsilon z y$. Et comme $A\, dz + B\, dx$; c'eſt-à-dire, $\varepsilon xy\, dz + \varepsilon z y\, dx$ doit être une différentielle exacte; j'en conclus $\varepsilon =$ conſt. $= 1$. Par là $A = xy$, $B = zy$, $M = z x y^3$, & enfin la dernière équation donne $N - C = -z x$. Or, en conſéquence des valeurs de A & B, C doit être $= z x$; donc $N = 0$, &

$$x y\, d z + z y\, d x + z x\, d y = \varpi\, d x + z x y^3 \varpi^2\, d y;$$

ou, fesant $x y z = \Pi$,

$$d\Pi = \varpi\, d x + y^2 \Pi \varpi^2\, d y, \text{ \&}$$

$$\int \frac{d\Pi - \varpi\, d x}{\Pi \varpi^2} = \frac{1}{3} . y^3,$$

où il ne faut plus que déterminer ϖ en Π & x, de manière que la quantité ſous le ſigne ſoit une différentielle exacte.

22. Lorſqu'on eſt parvenu à l'intégrale complette d'une équation aux différences partielles, il reſte encore à déterminer les fonctions arbitraires, par quelque condition acceſſoire. Voici la manière ſimple dont on ſe ſervira, pour les équations que je viens de réſoudre dans ce chapitre. Je me bornerai à l'appliquer à un exemple.

Soit (A) . . . . . . $z = \int (p\, d x + [r^2 + p^2]\, d y)$,

& (B) . . . . . . $p = F : (x + 2 p y)$;

& qu'il faille que, quand $x = y^2$, $z = r x = r y^2$. Je tire de cette dernière équation

$$d z = r\, d x = 2 r y\, d y;$$

& de l'équation A, en mettant pour x ſa valeur y^2,

$$d z = (2 p y + r^2 + p^2)\, d y.$$

Egalant ces deux valeurs de $d z$, diviſant enſuite par $d y$, j'aurai

$$y = \frac{p^2 + r^2}{2(r - p)}.$$

Je mets, dans l'équation B, y^2 pour x; & pour y, cette valeur que je viens de trouver, d'où

$$p = F : \left\{ \frac{r^4 + 4 r^3 p - 2 r^2 p^2 + 4 r p^3 - 3 p^4}{(2r - 2p)^2} \right\}.$$

Il ne faut plus que ſuppoſer toute cette quantité $= u$, pour en

conclure la valeur de p en u, qui ſoit $= V$, & on aura $F : u = V$; ce qui détermine la forme de la fonction F. Feſant enſuite, dans V, $u = x + 2py$, il en réſultera l'expreſſion de $F : (x + 2py)$ de l'équation B ci-deſſus.

Cette méthode ne préſenteroit pas plus de difficulté, ſi le premier membre de l'intégrale, au lieu d'être ſimplement z, étoit une fonction quelconque déterminée de z, x, y qui ſoit Π; puiſqu'il eſt toujours également poſſible d'en conclure une valeur de dz, qui ne contienne que y, en mettant pour x ſa valeur donnée en cette même variable.

CHAPITRE TROISIEME.

Des équations du premier ordre & du premier degré, entre quatre variables z, u x, y.

23. EN regardant toujours z comme la variable principale, l'équation générale du premier ordre & du premier degré entre quatre variables ſera

$$M\frac{dz}{dy} + N\frac{dz}{dx} + P\frac{dz}{du} + Q = 0,$$

M, N, P, Q pouvant contenir z, u, x, y. Soit $\frac{dz}{dx} = p$, $\frac{dz}{dy} = q$, $\frac{dz}{du} = r$: on aura les deux équations

$$Mq + Np + Pr + Q = 0, \&$$
$$dz = q\,dy + p\,dx + r\,du,$$

d'où éliminant l'une des indéterminées p, q, r, par exemple q, il viendra . . . . . (P)

$$M d z - M p d x - M r d u + (N p + P r + Q) d y = 0,$$

équation aux différentielles ordinaires entre quatre variables, dans laquelle il faudroit déterminer les indéterminées p, r, de manière qu'elle devînt intégrable. On peut prévoir que ce procédé général d'intégration ne réussira pas mieux ici, que dans les équations à trois variables : je suivrai donc encore la même méthode, en examinant séparément les différens cas qui admettent une solution plus facile.

24. Le premier qui se présente est celui où M, N, P ne contiennent que u, x, y; Q pouvant en outre contenir z. L'équation P prendra alors une forme plus simple; &, éliminant successivement p, q, r, on aura les trois formules

$$M d z + Q d y = p (M d x - N d y) + r (M d u - P d y),$$
$$N d z + Q d x = q (N d y - M d x) + r (N d u - P d x),$$
$$P d z + Q d u = q (P d y - M d u) + p (P d x - N d u).$$

En supposant $Q = 0$, & laissant $d z$ seule dans le premier membre, on retrouve les trois formules que rapporte Mr. Cousin dans l'ouvrage déja cité; d'où on conclut les valeurs de z, dans certains cas très-limités; savoir, quand chacun des termes $M d x - N d y$, &c. peut se réduire à la différentielle d'une fonction de deux variables seulement.

Mais on peut considérer ces formules sous un point de vue bien plus étendu, de la manière que voici. Je me fixerai à la première, les mêmes raisonnemens s'appliquant également aux deux autres, & je l'écrirai sous cette forme . . . . . (E)

$$(M d z + Q d y) - p (M d x - N d y) - r (M d u - P d y) = 0.$$

En supposant que les trois termes qui constituent cette formule,

puissent devenir chacun, par quelque moyen que ce soit, une différentielle exacte, je les représenterai par $d\Pi$, $d\Psi$. $d\Omega$; & prenant G & K pour deux arbitraires, je réduirai cette formule à

$$d\Pi + G d\Psi + K d\Omega = 0.$$

Maintenant, si je restreins G & K à ne contenir respectivement que Ψ & Ω, l'intégrale ne peut être que

$$\Pi + F:\Psi + f:\Omega = 0;$$

si je donne à ces coëfficiens arbitraires plus d'étendue, en admettant qu'ils renferment tous deux Ψ & Ω, elle se changera en

$$\Pi + \phi:(\Psi, \Omega) = 0;$$

mais si je veux leur donner toute la capacité dont ils sont susceptibles, je les regarderai comme pouvant être fonctions des trois lettres Π, Ψ, Ω; & dès-lors cette formule devient la formule générale des équations différentielles ordinaires, à trois variables Π, Ψ, Ω; & il est clair que l'intégrale d'une pareille équation ne peut être que

$$F:(\Pi, \Psi, \Omega) = \text{const.}, \text{ ou simplement } = 0;$$

puisque la fonction arbitraire comprend en elle telle constante qu'on voudroit y ajouter.

Il reste à savoir déterminer, d'après la proposée, les trois fonctions Π, Ψ, Ω, & à assigner dans quelles circonstances on peut y parvenir. Je vais prouver que la seule restriction à la généralité de cette méthode, en supposant cependant toujours que M, N, P ne renferment pas la variable principale z, est que l'une de ces trois fonctions ne contienne que deux des trois variables u, x, y; la seconde pouvant les contenir toutes trois; & la troisième, toutes les quatre, y compris la variable principale z; ce qu'au-

cun analyſte n'a encore remarqué juſqu'à préſent, que je ſache.

Je ſuppoſe donc dans la formule E, que $\frac{N}{M}$ ne contienne que x & y; & multipliant le terme $Mdx - Ndy$ par ſon facteur μ, j'en prends l'intégrale, que je nomme Ψ. Je tire de-là la valeur de x en y & Ψ, & je la ſubſtitue dans $Mdu - Pdy$, qui conſéquemment contiendra u, y & Ψ. Je multiplierai encore ce dernier terme par ſon facteur ρ en ſuppoſant Ψ conſtante, & j'aurai

$$(Mdz + Qdy) - \frac{p}{\mu} d\Psi - \frac{r}{\rho}(M\rho du - P\rho dy) = 0.$$

Soit $Td\Psi$ ce qui proviendroit de la différentiation par Ψ, & j'aurai

$$(Mdz + Qdy) - \left(\frac{p}{\mu} - \frac{r}{\rho} T\right) d\Psi - \frac{r}{\rho}(M\rho du - P\rho dy + Td\Psi) = 0,$$

ou, nommant Ω l'intégrale de cette dernière fonction,

$$(Mdz + Qdy) + Gd\Psi + Kd\Omega = 0.$$

J'ai donc la valeur de x en y & Ψ, & celle de u en y & Ω, que je ſubſtitue dans $Mdz + Qdy$, qui ne contiendra plus que z, y, Ψ & Ω. Je la multiplierai par ſon facteur λ dans l'hypothèſe de Ψ & Ω conſtantes, & ajoutant $Vd\Psi + Ud\Omega$, qui ſeroient provenues de la différentiation par Ψ & Ω, j'aurai, en nommant Π l'intégrale de $\lambda Mdz + \lambda Qdy$ par z & y ſeulement,

$$d\Pi + (\lambda G - V) d\Psi + (\lambda K - U) d\Omega = 0,$$

ou ſimplement

$$d\Pi + Gd\Psi + Kd\Omega = 0.$$

puiſque G & K ſont arbitraires; & enfin intégrant,

$$F:(\Pi, \Psi, \Omega) = 0,$$

où les trois fonctions ſont connues, & telles que Ψ ne contient

que les deux variables x, y; Ω, les trois u, x, y; & enfin Π, les quatre z, u, x, y.

25. Un exemple achèvera d'éclaircir ceci. Soit

$x^2y\frac{dz}{dy}-x^2y\frac{dz}{dx}+(ux^2+uxy)\frac{dz}{du}-zxy+2uxy+uy^2=0$;

j'ai $M=x^2y$, $N=-x^2y$, $P=ux^2+uxy$, $Q=uy^2+2uxy-zxy$. Ainsi

$$Mdx-Ndy=x^2y(dx+dy),$$

& multipliant par $\mu=\frac{1}{x^2y}$, $\Psi=x+y$. Ensuite

$$Mdu-Pdy=x^2ydu-(ux^2+uxy)dy;$$

&, mettant pour x sa valeur $\Psi-y$,

$$Mdu-Pdy=(\Psi-y)\{y(\Psi-y)du-u\Psi dy\},$$

qui multipliée par son facteur $\frac{1}{y^2(\Psi-y)}$ & intégrée donne, en nommant Ω cette nouvelle fonction, $\frac{u(\Psi-y)}{y}=\Omega$. Ainsi la proposée est déja réduite à

$(x^2ydz+[uy^2+2uxy-zxy]dy)+Gd\Psi+Kd\Omega=0$,

où Ψ & Ω sont connues. Je mets dans le premier terme, pour x, sa valeur $\Psi-y$, & pour u, la sienne $\frac{\Omega y}{\Psi-y}$; & il se change en

$$y(\Psi-y)\left\{(\Psi-y)dz-zdy+\frac{2y\Omega dy}{(\Psi-y)}+\frac{y^2\Omega dy}{(\Psi-y)^2}\right\}$$

dont l'intégrale, qui est la valeur de Π, se trouve, en le multipliant par $\frac{1}{y(\Psi-y)}$, être

$$\Pi=z(\Psi-y)+\frac{y^2\Omega}{\Psi-y};$$

& il ne faudra plus que substituer ces valeurs de Π, Ψ, Ω dans l'intégrale $F:(\Pi,\Psi,\Omega)=0$; ce qui la changera en

$$F:(\zeta x+uy,\frac{ux}{y},x+y)=0.$$

26. Pour ſuivre la même marche que dans les équations à trois variables, j'examinerai en ſecond lieu le cas où les coëfficiens M, N, P pourroient, outre les trois variables u, x & y, contenir auſſi la quatrième ζ, mais Q étant $=0$. On va voir qu'on parvient à la ſolution de ces équations dans les mêmes circonſtances, que lorſque les coëfficiens ne renferment pas ζ, ce qu'on n'avoit encore remarqué que pour les équations à trois variables. Je conſidère toujours la première formule en y feſant $Q=0$,

$$d\zeta-p\left(dx-\frac{N}{M}dy\right)-r\left(du-\frac{P}{M}dy\right)=0.$$

Il faut, ſelon ce que je viens de dire (§ 24), que l'une des deux fonctions $dx-\frac{N}{M}dy$, ou $du-\frac{P}{M}dy$ puiſſe ſe réduire à la différentielle d'une fonction de deux variables ſeulement, outre ζ qui eſt traitée comme conſtante; c'eſt-à-dire, que $\frac{N}{M}$ & $\frac{P}{M}$ ſoient telles, que l'une des deux ne contienne outre ζ; que x & y, ſi c'eſt la première; ou u & y, ſi c'eſt la ſeconde.

Suppoſons que ce ſoit $\frac{N}{M}$ qui ſoit fonction de x, y & ζ. Je multiplie $dx-\frac{N}{M}dy$ par ſon facteur μ en ſuppoſant ζ conſtante, & je nomme cette différentielle exacte, $d\Psi$; $Td\zeta$ étant la différentielle de Ψ par ζ. J'ai donc

$$d\zeta+\frac{pT}{\mu}d\zeta-\frac{p}{\mu}d\Psi-r\left(du-\frac{P}{M}dy\right)=0.$$

Je ſubſtitue dans ce dernier terme, pour x, ſa valeur en Ψ & y; & il n'y reſte que u, y, Ψ & ζ Je le multiplie enſuite par ſon

ſon facteur ρ dans l'hypotheſe de z & Ψ conſtantes; & ſuppoſant que $V dz$ & $U d\Psi$ ſoient ce qu'auroit produit la différentiation par z & Ψ, j'aurai la nouvelle équation

$$\left(1+\frac{pT}{\mu}+\frac{rV}{\rho}\right)dz+\left(\frac{rU}{\rho}-\frac{p}{\mu}\right)d\Psi-\frac{r}{\rho}d\Omega=0,$$

Ω étant l'intégrale de $\rho\, du-\frac{p}{M}\rho\, dy$, ou ſimplement

$$dz+G\,d\Psi+K\,d\Omega=0,$$

qui donne, en intégrant, $F:(z,\Psi,\Omega)=0$. On voit que, dans ce ſecond cas, des trois fonctions qui conſtituent l'intégrale, l'une ſe réduit à z; la ſeconde contient, outre z, deux des trois variables u, x, y; & la troiſième peut les contenir toutes quatre.

27. Ce qui précède ſuffit pour prouver que la formule la plus générale, qui réſulte de l'intégration d'une équation aux différences partielles du premier ordre & du premier degré à quatre variables, eſt $F:(\Pi,\Psi,\Omega)=0$; Π, Ψ, Ω pouvant contenir les quatre variables z, u, x, y; & z étant la variable principale qui eſt regardée comme fonction des autres; & conſéquemment l'équation la plus générale de ce genre ſera

$$\left\{\frac{d\Pi}{dx}\frac{d\Psi}{du}\frac{d\Omega}{dz}-\frac{d\Pi}{dx}\frac{d\Psi}{dz}\frac{d\Omega}{du}+\frac{d\Pi}{dz}\frac{d\Psi}{dx}\frac{d\Omega}{du}-\frac{d\Pi}{dz}\frac{d\Psi}{du}\frac{d\Omega}{dx}+\frac{d\Pi}{du}\frac{d\Psi}{dz}\frac{d\Omega}{dx}-\frac{d\Pi}{du}\frac{d\Psi}{dx}\frac{d\Omega}{dz}\right\}\frac{dz}{dy}$$
$$+\left\{\frac{d\Pi}{dz}\frac{d\Psi}{du}\frac{d\Omega}{dy}-\frac{d\Pi}{dz}\frac{d\Psi}{dy}\frac{d\Omega}{du}+\frac{d\Pi}{dy}\frac{d\Psi}{dz}\frac{d\Omega}{du}-\frac{d\Pi}{dy}\frac{d\Psi}{du}\frac{d\Omega}{dz}+\frac{d\Pi}{du}\frac{d\Psi}{dy}\frac{d\Omega}{dz}-\frac{d\Pi}{du}\frac{d\Psi}{dz}\frac{d\Omega}{dy}\right\}\frac{dz}{dx}$$
$$+\left\{\frac{d\Pi}{dx}\frac{d\Psi}{dz}\frac{d\Omega}{dy}-\frac{d\Pi}{dx}\frac{d\Psi}{dy}\frac{d\Omega}{dz}+\frac{d\Pi}{dy}\frac{d\Psi}{dx}\frac{d\Omega}{dz}-\frac{d\Pi}{dy}\frac{d\Psi}{dz}\frac{d\Omega}{dx}+\frac{d\Pi}{dz}\frac{d\Psi}{dy}\frac{d\Omega}{dx}-\frac{d\Pi}{dz}\frac{d\Psi}{dx}\frac{d\Omega}{dy}\right\}\frac{dz}{du}$$
$$+\left\{\frac{d\Pi}{dx}\frac{d\Psi}{du}\frac{d\Omega}{dy}-\frac{d\Pi}{dx}\frac{d\Psi}{dy}\frac{d\Omega}{du}+\frac{d\Pi}{dy}\frac{d\Psi}{dx}\frac{d\Omega}{du}-\frac{d\Pi}{dy}\frac{d\Psi}{du}\frac{d\Omega}{dx}+\frac{d\Pi}{du}\frac{d\Psi}{dy}\frac{d\Omega}{dx}-\frac{d\Pi}{du}\frac{d\Psi}{dx}\frac{d\Omega}{dy}\right\}=0.$$

D'où on conclura que, pour annuller le terme Q, qui eſt celui

ſans différence partielle, il ſuffit que l'une ou l'autre des trois fonctions Π, Ψ, Ω ſe réduiſe à z; ce qui eſt conforme à ce qui a lieu dans les équations à trois variables; & à ce qu'on a vu dans l'article précédent.

Une autre obſervation non moins importante qui réſulte de cette formule générale, eſt la détermination de la forme que doit avoir une équation aux différences partielles à quatre variables, pour être une différentielle exacte, dans le ſens de cette méthode. On trouvera en effet que dans ce cas, l'équation

$$M\frac{dz}{dy}+N\frac{dz}{dx}+P\frac{dz}{du}+Q=0$$

doit être telle, qu'on ait en même tems celle

$$\frac{dM}{dy}+\frac{dN}{dx}+\frac{dP}{du}-\frac{dQ}{dz}=0;$$

& que ſi la propoſée n'eſt pas telle, mais qu'elle puiſſe ſeulement le devenir, au moyen d'un facteur μ, ce facteur ſera donné par l'équation

$$\mu\left\{\frac{dM}{dy}+\frac{dN}{dx}+\frac{dP}{du}-\frac{dQ}{dz}\right\}+M\frac{d\mu}{dy}+N\frac{d\mu}{dx}+P\frac{d\mu}{du}-Q\frac{d\mu}{dz}=0;$$

ce qui eſt encore analogue à ce qu'on a obſervé plus haut, au ſujet des équations à trois variables (§ 11).

28. En réuniſſant tout ce que j'ai dit juſqu'ici, il eſt aiſé de voir que la formule générale

$$M\frac{dz}{dy}+N\frac{dz}{dx}+P\frac{dz}{du}+Q=0,$$

préſente trois claſſes d'équations, auxquelles la méthode ci-deſſus ne ſauroit s'appliquer.

La première appartient à la forme $F:(\Pi, \Psi, \Omega)=0$, dans laquelle les deux fonctions ſans z contiennent en même tems les

trois variables u, x, y. C'eſt celle où les coëfficiens M, N, P ne renferment à la vérité que ces trois variables ; mais pas d'une manière à ce que l'une ou l'autre des fractions $\frac{M}{N}$, $\frac{M}{P}$, $\frac{N}{P}$ ſoit fonction des deux variables ſeulement, qui déſignent la variation des deux termes, auxquels le numérateur & le dénominateur de cette fraction ſervent de coëfficiens dans la propoſée ; c'eſt-à-dire, de manière que $\frac{M}{N}$ ſoit fonction de x & y ; $\frac{M}{P}$, de u & y ; ou enfin $\frac{N}{P}$, de u & x ſeulement.

La ſeconde eſt celle dont l'intégrale a la forme $F:(z, \Psi, \Omega)=0$, où Ψ & Ω contiennent z & les trois variables u, x, y en même tems. Dans ce cas Q eſt à la vérité $=0$; mais aucune des fractions $\frac{M}{N}$, $\frac{M}{P}$, $\frac{N}{P}$ ne ſatisfait à la condition dont je viens de parler ; ſavoir, de ne contenir, outre z, que deux des trois variables.

Enfin la troiſième claſſe eſt celle qui a rapport à l'intégrale $F:(\Pi, \Psi, \Omega)=0$; ces trois fonctions, ou du moins deux d'entr'elles, contenant, outre u, x & y, la variable principale z. Le caractère diſtinctif de ces équations, eſt que les coëfficiens M, N, P renferment cette même variable, ſans que $Q=0$.

En ſuppoſant, dans le premier cas, l'une ou l'autre des fonctions ; c'eſt-à-dire, celle qui contient z, égale à une variable t, & mettant dans la propoſée, à la place de z, ſa valeur en t, u, x, y qui réſulte de cette ſuppoſition, le terme Q s'évanouira, comme il eſt évident par l'article précédent ; & on aura à intégrer une équation de la forme $M'\frac{dt}{dy}+N'\frac{dt}{dx}+P'\frac{dt}{du}=0$, dans laquelle

M', N', P' ne contiendront que x, y, u; mais ne satisferont pas davantage à la question énoncée ci-dessus, que les coëfficiens mêmes de la proposée.

En fesant la même supposition dans le troisième cas, le terme Q disparoîtra également. Alors, ou les coëfficiens de la transformée feront tels que l'exige la méthode, ce qui lèvera toute difficulté; ou finon, cette transformée rentrera dans les équations de la feconde classe.

Ainsi la difficulté est réduite; 1°. à trouver le moyen de reconnoître, dans une équation proposée, la fonction de z, u, x, y, qu'il faut faire $= t$, afin d'anéantir le terme Q; & 2°. à intégrer les équations de la forme

$$M\frac{dz}{dy}+N\frac{dz}{dx}+P\frac{dz}{du}=0,$$

dont les coëfficiens M, N, P ne fatisfont pas à la condition prescrite (§ § 24, 26); soit qu'ils renferment la variable principale, ou non.

29. Pour parvenir au premier point, je supposerai, comme dans les équations à trois variables (§ 7), que la valeur de z, tirée de l'équation $\Pi = t$ (en regardant Π comme la fonction affectée de z, qu'on veut réduire à une simple variable t) soit $z = \vartheta$, & telle que

$$dz = A\,dt + B\,dx + C\,dy + D\,du.$$

On aura par-là

$$\frac{dz}{dy}=A\frac{dt}{dy}+C;\ \frac{dz}{dx}=A\frac{dt}{dx}+B;\ \frac{dz}{du}=A\frac{dt}{du}+D;$$

& il faudra, après avoir substitué ces valeurs dans la proposée, égaler à zéro le terme sans différence partielle qui en résulte. On

trouvera encore ici (§ 8) que l'équation à résoudre sera la proposée elle-même, dans laquelle on auroit mis ϑ pour z, $C = \frac{d\vartheta}{dy}$ pour $\frac{dz}{dy}$, &c. On pourra donc, sans autre préparatif, faire ces substitutions dans la proposée; ou même n'en point faire du tout, si on le préfère, en se conduisant d'une manière analogue à ce qui a été dit à l'article cité.

Soit la proposée

$$2u^2 z \frac{dz}{dy} + \frac{4u^2 zy}{\sqrt{(u^2 z^2 + x^2 y^2)}} \frac{dz}{dx} - u^3 z^3 \frac{dz}{du} - x^2 y^2 u z \frac{dz}{du} + 2x^2 y + \frac{4xy^3}{\sqrt{(u^2 z^2 + x^2 y^2)}} - u^2 z^4 - x^2 y^2 z^2 = 0,$$

j'aurai par ma transformation,

$$2u^2 \vartheta C + \frac{4u^2 \vartheta y B}{\sqrt{(u^2 \vartheta^2 + x^2 y^2)}} - u^3 \vartheta^3 D - x^2 y^2 u \vartheta D + 2x^2 y + \frac{4xy^3}{\sqrt{(u^2 \vartheta^2 + x^2 y^2)}} - u^2 \vartheta^4 - x^2 y^2 \vartheta^2 = 0.$$

Je supposerai donc premièrement

$$4u^2 \vartheta y B + 4xy^3 = 0, \text{ ou } \vartheta u^2 B + xy^2 = 0,$$

ce qui fait évanouir les deux termes affectés de radicaux; en second lieu

$$2u^2 \vartheta C + 2x^2 y = 0, \text{ ou } \vartheta u^2 C + x^2 y = 0;$$

& enfin

$$u^3 \vartheta^3 D + x^2 y^2 u \vartheta D + u^2 \vartheta^4 + x^2 y^2 \vartheta^2 = 0,$$

ou, divisant par $u^2 \vartheta^3 + x^2 y^2 \vartheta$, $uD + \vartheta = 0$.

Je multiplie ensuite la première de ces trois équations par dx; la seconde par dy, & la troisième par $\vartheta u du$, & les ayant ajoutées ensemble, j'ai

$$\vartheta u^2 (B dx + C dy + D du) + xy^2 dx + x^2 y dy + \vartheta^2 u du = 0;$$

ou comme $B = \frac{d\vartheta}{dx}$, $C = \frac{d\vartheta}{dy}$, $D = \frac{d\vartheta}{du}$,

$$\vartheta u^2 d\vartheta + \vartheta^2 u du + xy^2 dx + x^2 y dy = 0,$$

dont l'intégrale eſt $u^2 \vartheta^2 + x^2 y^2 = \text{conſt.}$, ou

$$u^2 z^2 + x^2 y^2 = \text{conſt.};$$

& cette conſtante ſera, par la même raiſon que nous avons dit ci-deſſus (§ 7, 8), une fonction de la variable t, qu'on pourra déterminer à volonté; c'eſt-à-dire, que l'intégrale ſera

$$z^2 u^2 + x^2 y^2 = t^2;$$

& $\sqrt{z^2 u^2 + x^2 y^2}$ eſt une valeur convenable de Π. Je ferai donc $z = \frac{\sqrt{t^2 - x^2 y^2}}{u}$; ce qui changera la propoſée en

$$2ut \frac{dt}{dy} + 4uy \frac{dt}{dx} - t^3 \frac{dt}{du} = 0,$$

qui a la forme demandée.

Cette méthode ne diffère, comme on voit, de celle que j'ai employée pour les équations à trois variables, qu'en ce qu'ici les tâtonnemens ſeront néceſſairement plus compliqués, à cauſe de l'augmentation d'une variable; & de même que dans celles-ci, l'intégrale étant repréſentée par $F:(\Pi, \Psi) = 0$, ſi Π & Ψ contiennent toutes deux z, il y a deux fonctions qui, étant égalées à u (§ 5), feront diſparoître le terme ſans différence partielle; de même, dans les équations à quatre variables dont l'intégrale eſt $F:(\Pi, \Psi, \Omega) = 0$, le nombre des fonctions propres à anéantir le terme ſans différence partielle, eſt le même que celui des fonctions Π, Ψ, Ω qui contiendront la variable principale z. Ce nombre pourra même être augmenté à l'infini, par les différentes

manières de combiner entr'elles ces trois fonctions, comme je l'ai fait remarquer ci-dessus (§ 6).

30. Ayant ainsi réduit toute équation qui ne se résout pas par la méthode que j'ai indiquée, à la forme

$$M\frac{dz}{dy}+N\frac{dz}{dx}+P\frac{dz}{du}=0,$$

il arrivera quelquefois que la transformée sera devenue intégrable par cette opération ; ce qui pourra avoir lieu dans celles qui proviendront des équations de la troisième classe (§ 28). Sinon, je distinguerai deux cas ; le premier, lorsque les coëfficiens M, N, P ne contiennent que les trois variables u, x, y ; le second, lorsqu'ils contiennent de plus la variable principale z, mais sans que dans l'un ou l'autre cas, les fractions $\frac{M}{N}, \frac{M}{P}, \frac{N}{P}$ satisfassent à la condition dont j'ai fait mention, & dont dépend la possibilité d'employer la méthode en question. Je commencerai par le premier cas ; ce qui exige que je reprenne la chose d'un peu plus haut.

J'ai dit que, si on savoit intégrer complettement toute équation à quatre variables de la forme

$$M\frac{d\mu}{dy}+N\frac{d\mu}{dx}+P\frac{d\mu}{dz}=0,$$

dans laquelle M, N, P ne contiennent point μ, on auroit, par-là même, l'intégrale complette de toute équation à trois variables

$$M\frac{dz}{dy}+N\frac{dz}{dx}-P=0,$$

dans laquelle M, N, P, outre les deux variables x, y, contiendroient encore la variable principale z (§ 11). Quoique nous ne soyons point en possession d'une méthode aussi générale pour l'intégration des premières, nous sommes du moins en état, par ce

que j'ai dit ci-dessus, d'intégrer toutes celles qui se rapportent au cas, où l'une seulement des deux fonctions Ψ, Ω, qui constituent l'intégrale $F:(z, \Psi, \Omega) = 0$, ou $z = \phi : (\Psi, \Omega)$, ne contient que deux variables; ce qui peut être d'une très-grande utilité dans les équations à trois variables. En effet, on intègrera par ce moyen toute équation, dont l'intégrale sera $F:(\Pi, \Psi) = 0$; Π & Ψ contenant, toutes les deux, la variable principale z; mais l'une des deux ne contenant, en outre, que l'une ou l'autre des deux variables x, y; & cette méthode mérite, sans contredit, la préférence sur celle de tâtonnement, toutes les fois qu'on pourra l'employer. Pour en faire l'application à un exemple, soit l'équation à trois variables

$$(2x^2z + x^3 - z^3)\frac{dz}{dy} - (2zy^2 + xy^2)\frac{dz}{dx} - zy^2 = 0.$$

En la comparant à la formule

$$M\frac{dz}{dy} + N\frac{dz}{dx} - P = 0,$$

j'ai $M = 2x^2z + x^3 - z^3$, $N = -(2zy^2 + xy^2)$, $P = zy^2$; & je forme, avec les mêmes coëfficiens, l'équation à quatre variables (§ 11),

$$M\frac{d\mu}{dy} + N\frac{d\mu}{dx} + P\frac{d\mu}{dz} = 0;$$

& comme $\frac{N}{P} = -\frac{2z + x}{z}$, cette équation peut se rapporter à la troisième formule (§ 24), en fesant $Q = 0$, & mettant μ, au lieu de z, pour variable principale; & z, au lieu de u, pour troisième variable simple. J'ai par-là

$$zy^2 d\mu = q(zy^2 dy - [2x^2z + x^3 - z^3]dz)$$
$$+ p(zy^2 dx + [2z + x]y^2 dz).$$

Je

Je multiplie ce dernier terme par son facteur $\frac{1}{y^2}$, & il devient $Kd\Omega$, Ω étant $= z\,x + z^2$. Je remets ensuite dans l'autre terme, pour x, sa valeur $\frac{\Omega - z^2}{z}$, ce qui le change en

$$q\left(zy^2\,dy - \left[2\frac{(\Omega - z^2)^2}{z} + \frac{(\Omega - z^2)^3}{z^3} - z^3\right]dz\right);$$

& multipliant par $\frac{3}{z}$, en $G\,d\Psi$, Ψ étant $= y^3 + z^3 + \frac{(\Omega - z^2)^3}{z^3}$; & G, K représentant toujours deux arbitraires. Donc, à cause de $\mu = F:(\Psi, \Omega)$, on a

$$\mu = F:(z^3 + x^3 + y^3,\ z^2 + z\,x),$$

en remettant pour Ψ & Ω leurs valeurs : & conséquemment, l'intégrale de la proposée sera

$$F:(z^3 + x^3 + y^3,\ z^2 + z\,x) = 0.$$

31. On pourra de même, en prenant l'inverse de la méthode, ramener l'intégration des équations à quatre variables, comprises dans la formule

$$M\frac{dz}{dy} + N\frac{dz}{dx} + P\frac{dz}{du} = 0,$$

M, N, P contenant x, y & u, à celle des équations à trois variables u, x, y, de la forme

$$M\frac{du}{dy} + N\frac{du}{dx} - P = 0;$$

c'est-à-dire, qu'étant donnée l'équation

$$M\frac{dz}{dy} + N\frac{dz}{dx} + P\frac{dz}{du} = 0,$$

si avec les mêmes coëfficiens on forme la nouvelle équation

$$M\frac{du}{dy} + N\frac{du}{dx} - P = 0,$$

on aura l'intégrale complette de la proposée, toutes les fois qu'on parviendra à intégrer celle-ci indépendamment de l'autre; & c'est à quoi ma méthode de tâtonnement peut être très-utile.

Soit, par exemple, l'équation à quatre variables . . . . . (R)

$$(x^3y^2+4ux^2y+2y)\frac{dz}{dy}+(x^4y-2x)\frac{dz}{dx}-2ux^3y\frac{dz}{du}=0,$$

j'en conclus, d'après mon principe, la transformée . . . . . (P)

$$(x^3y^2+4ux^2y+2y)\frac{du}{dy}+(x^4y-2x)\frac{du}{dx}+2ux^3y=0,$$

dont je ferai disparoître le dernier terme (§ 7). Je forme pour cela la nouvelle transformée

$$x^3y^2C+4\vartheta x^2yC+2yC+x^4yB-2xB+2\vartheta x^3y=0.$$

Supposant ensuite

$$2yC-2xB=0, \text{ \&}$$

$$x^3y^2C+4\vartheta x^2yC+x^4yB+2\vartheta x^3y=0,$$

j'aurai $xyB+2\vartheta B+\vartheta y=0$, ou $(xy+2\vartheta)\frac{d\vartheta}{dx}+\vartheta y=0$,

& $xyC+2\vartheta C+\vartheta x=0$, ou $(xy+2\vartheta)\frac{d\vartheta}{dy}+\vartheta x=0$.

J'en conclus

$$(xy+2\vartheta)d\vartheta+\vartheta(y\,dx+x\,dy)=0,$$

dont l'intégrale est

$$\vartheta^2+\vartheta xy=\text{const.},$$

ou, comme ϑ est la valeur supposée de u (qui remplace ici z de l'article 7),

$$u^2+uxy=\text{const.};$$

& cette constante sera une fonction quelconque d'une variable, qui (§ 7) étoit u, & qu'ici je nommerai t, parce que u est déja employée. Il suit de-là que $u^2+uxy=t$ est une transformation

convenable; & elle donne pour résultat,

$$\left(2y - x^3y^2 + 4x^2y\sqrt{\tfrac{1}{4}x^2y^2 + t}\right)\frac{dt}{dy} + \left(x^4y - 2x\right)\frac{dt}{dx} = 0.$$

En comparant cette équation avec celle de l'article 4, on a

$$Mdx - Ndy = \left(2y - x^3y^2 + 4x^2y\sqrt{\tfrac{1}{4}x^2y^2 + t}\right)dx - \left(x^4y - 2x\right)dy,$$

dont il faut trouver le facteur en supposant t constante.

Pour faciliter cette recherche, je ferai

$$\sqrt{\tfrac{1}{4}x^2y^2 + t} = \tfrac{1}{2}xy + \lambda,$$

ce qui donne

$$xy = \frac{t - \lambda^2}{\lambda}, \ \& \ \tfrac{1}{2}xy + \lambda = \sqrt{\tfrac{1}{4}x^2y^2 + t} = \frac{t + \lambda^2}{2\lambda}.$$

Eliminant y au moyen de ces valeurs, & réduisant, j'aurai

$$\frac{(t - \lambda^2)(t + \lambda^2)}{\lambda^3}\left(x^2d\lambda + 2\lambda x dx\right) - 2\frac{t + \lambda^2}{\lambda^3}\lambda d\lambda,$$

qui devient une différentielle exacte, en la multipliant par $\frac{\lambda^3}{(t - \lambda^2)(t + \lambda^2)}$; d'où

$$s = \lambda x^2 + \log.\left(t - \lambda^2\right)$$

ou remettant pour λ sa valeur, qui sans autre opération est évidemment $= u$ (puisque nous avons vu, un peu plus haut, que la valeur de $u\ (= \vartheta)$ est la même que celle que je viens de supposer à λ)

$$s = ux^2 + \log.\left(t - u^2\right) = ux^2 + \log. uxy,$$

en mettant encore pour t, sa valeur $u^2 + uxy$. Donc l'intégrale $F:(t, s) = 0$ devient

$$F:\left(u^2 + uxy,\ ux^2 + \log. uxy\right) = 0,$$

qui eſt l'intégrale complette de la transformée P', & on en conclura, pour celle de la propoſée R,

$$F:(z,\ u^2+uxy,\ ux^2+\log.uxy)=0.$$

32. On voit aſſez, qu'au lieu de la variable u, on pouvoit prendre indiſtinctement celle x, ou celle y, pour la conſidérer dans la transformée P', comme variable principale. Ainſi, en arrangeant la propoſée de la manière ſuivante,

$$P\frac{dz}{du}+N\frac{dz}{dx}+M\frac{dz}{dy}=0,$$

on auroit formé la nouvelle équation

$$P\frac{dy}{du}+N\frac{dy}{dx}-M=0,$$

dans laquelle y eſt devenue la variable principale. On auroit pu, par la même raiſon, adopter l'équation

$$P\frac{dx}{du}+M\frac{dx}{dy}-N=0,$$

& le réſultat eût été le même. Il eſt cependant préférable de prendre pour variable principale, la variable la moins compliquée, afin de faciliter les opérations de la transformation, lorſqu'on veut faire diſparoître le terme ſans différence partielle; ce que j'ai obſervé dans cet exemple.

33. On a vu (§ 11) que l'équation à trois variables

$$M\frac{dz}{dy}+N\frac{dz}{dx}+P=0$$

pouvoit ſe réſoudre au moyen de celle à quatre variables.

$$M\frac{d\mu}{dy}+N\frac{d\mu}{dx}-P\frac{d\mu}{dz}=0.$$

On vient de voir (§ 31) que réciproquement, cette dernière équation ſe réduit à

$$M\frac{dz}{dy}+N\frac{dz}{dx}+P=0,$$

& (§ 32) qu'on pouvoit également la réduire à une des deux équations

$$M\frac{dx}{dy}-P\frac{dx}{dz}-N=0;$$

$$N\frac{dy}{dx}-P\frac{dy}{dz}-M=0;$$

il suit de-là que les trois équations

$$M\frac{dz}{dy}+N\frac{dz}{dx}+P=0,$$

$$M\frac{dx}{dy}-P\frac{dx}{dz}-N=0,$$

$$N\frac{dy}{dx}-P\frac{dy}{dz}-M=0,$$

expriment la même chose : & en effet, on verra aisément que ce sont les trois résultats d'une même équation $F:(\Pi, \Psi)=0$, différentiée en traitant successivement chacune des variables z, x, y comme variable principale. On pourroit se servir utilement de ces transformations : si, par exemple, dans la proposée

$$M\frac{dz}{dy}+N\frac{dz}{dx}+P=0,$$

M, N, P contenoient z & y d'une manière quelconque; mais que M & P ne continssent pas x; on auroit recours à la transformée

$$M\frac{dx}{dy}-P\frac{dx}{dz}-N=0,$$

dans laquelle N contiendroit seule la variable principale x, & qui conséquemment se résoudroit par la méthode générale (§ 2).

Il en seroit de même, si N & P ne contenoient pas y; on feroit alors de y, la variable principale; mais il est évident que ce genre de solution est au fond le même que celui (§ 30).

34. Quant aux équations comprifes dans le fecond cas (§ 30), elles ne pourront s'intégrer par cette méthode ; puifqu'elles appartiennent à des intégrales de la forme $F : (z, \Psi, \Omega) = o$, Ψ & Ω étant en général des fonctions de quatre variables, qui ne peuvent conféquemment être déterminées par une équation à trois variables.

La raifon pour laquelle l'intégration de ces dernières équations, lorfque dans leur intégrale $F : (\Pi, \Psi) = o$, Π & Ψ contiennent toutes deux z, dépend de celle d'une équation à quatre variables, fe préfente affez naturellement. En effet, tant que l'une de ces deux fonctions Π, Ψ fe réduit à z feule, ou qu'elle ne contient que x & y, il n'y a réellement qu'une fonction à déterminer ; dans le premier cas, parce qu'on cherche d'abord la valeur de z, ce qui détermine déja une des deux fonctions qui eft z elle-même ; dans le fecond, parce que l'on commence par déterminer la fonction de x & y fans z. Il n'en eft pas de même, lorfque Π & Ψ font toutes les deux fonctions de z & d'une ou des deux autres variables x, y. Dans ce dernier cas, le calcul ne peut les produire que toutes les deux à la fois, n'y ayant entr'elles aucun caractère diftinctif ; tout comme, dans l'Algèbre ordinaire, il produit néceffairement en même tems deux ou plufieurs valeurs qui répondent à une même queftion : & la forme des équations à quatre variables eft feule propre à fatisfaire à cette condition, par le nombre de fonctions que comprend leur intégrale.

En appliquant ce même raifonnement aux équations à quatre variables, l'analogie nous conduit à en chercher la folution dans

celles à cinq variables : ce qui exige que je m'occupe en peu de mots de ces dernières ; & pour autant seulement, qu'elles ont du rapport avec les précédentes. On a déja dû entrevoir ce rapport, par ce que j'ai dit plus haut (§ 27). Il est évident qu'on peut en tirer, comme (§ 11), la conséquence, que l'intégration de l'équation à quatre variables

$$M\frac{dz}{dy}+N\frac{dz}{dx}+P\frac{dz}{du}-Q=0,$$

dépend de celle de l'équation à cinq variables

$$M\frac{d\mu}{dy}+N\frac{d\mu}{dx}+P\frac{d\mu}{du}+Q\frac{d\mu}{dz}=0,$$

de même que l'on a vu que l'équation à trois variables

$$M\frac{dz}{dy}+N\frac{dz}{dx}-P=0,$$

s'intégroit au moyen de celle à quatre variables

$$M\frac{d\mu}{dy}+N\frac{d\mu}{dx}+P\frac{d\mu}{dz}=0.$$

35. Soit donc

$$M\frac{dz}{dy}+N\frac{dz}{dx}+P\frac{dz}{du}+Q\frac{dz}{dt}=0$$

une équation aux cinq variables z, y, x, u, t. Je fais $\frac{dz}{dy}=q$, $\frac{dz}{dx}=p$, $\frac{dz}{du}=r$, $\frac{dz}{dt}=w$, & j'ai les deux équations

$$dz=q\,dy+p\,dx+r\,du+w\,dt, \&$$
$$Mq+Np+Pr+Qw=0,$$

d'où éliminant successivement q, p, r, w, je tire quatre équations de la forme

$$dz=q\,dy+p\,dx+r\,du-\frac{Mq+Np+Pr}{Q}dt,$$

qui fourniront les quatre formules

$$dz - p\left(dx - \frac{N}{Q}dt\right) - q\left(dy - \frac{M}{Q}dt\right) - r\left(du - \frac{P}{Q}dt\right) = 0,$$

$$dz - p\left(dx - \frac{N}{P}du\right) - q\left(dy - \frac{M}{P}du\right) - w\left(dt - \frac{Q}{P}du\right) = 0,$$

$$dz - q\left(dy - \frac{M}{N}dx\right) - r\left(du - \frac{P}{N}dx\right) - w\left(dt - \frac{Q}{N}dx\right) = 0,$$

$$dz - p\left(dx - \frac{N}{M}dy\right) - r\left(du - \frac{P}{M}dy\right) - w\left(dt - \frac{Q}{M}dy\right) = 0.$$

Les conditions néceſſaires pour qu'on puiſſe intégrer ces formules ſont ;

1°. Qu'un des termes qui les compoſe ; c'eſt-à-dire, $dx - \frac{N}{Q}dt$, ou $dy - \frac{Q}{M}dt$, ou &c. ne contienne que deux variables (§ 24) ;

2°. Qu'un ſecond terme ne contienne, outre les deux variables dont il comprend les différentielles, que la variable du terme précédent ;

3°. Le troiſième terme pourra renfermer les quatre variables ſans la principale ;

4°. Et enfin, ſi la propoſée eût été complette, c'eſt-à-dire, que le terme ſans différence partielle n'eût point été $= 0$, auquel cas, au lieu de dz, on eût eu un terme de plus, ce terme auroit pu contenir les quatre mêmes variables, avec la variable principale.

Appliquons ceci à la première formule. Je ſuppoſe que $\frac{P}{Q}$ ne contienne que t & u ; je multiplie ce terme par ſon facteur μ, & j'en nomme l'intégrale Γ : j'ai donc une équation entre t, u, Γ. Je ſuppoſe en ſecond lieu, que $\frac{M}{Q}$ contienne t, y & u ; en ſubſtituant à u ſa valeur en t & Γ, ce ſecond terme ne contiendra plus que t, y & Γ ; & le multipliant par ſon facteur ρ en ſuppoſant Γ conſtante, & nommant Ω l'intégrale dans cette hypothèſe, &

$A\,d\Gamma$

$A\,d\Gamma$ ce qui feroit provenu en différentiant Ω par Γ, j'aurai

$$dz - p\left(dx - \frac{N}{Q}\,dt\right) - \frac{q}{\rho}\left(d\Omega - A\,d\Gamma\right) - \frac{r}{\mu}\,d\Gamma = 0.$$

Enfin, $\frac{N}{Q}$ contenant t, u, x, & y, je mettrai, pour u, fa valeur en t & Γ, & pour y, la fienne en t, Γ, Ω; d'où $\frac{N}{Q}$ ne contiendra plus que x, t, Γ, Ω; & multipliant ce terme par fon facteur σ, en regardant Γ & Ω comme conftantes; nommant de plus Ψ fon intégrale dans cette hypothèfe, & $B\,d\Gamma$, $E\,d\Omega$ les différentielles de Ψ par Γ & Ω, j'aurai

$$dz - \frac{p}{\sigma}\left(d\Psi - B\,d\Gamma - E\,d\Omega\right) - \frac{q}{\rho}\left(d\Omega - A\,d\Gamma\right) - \frac{r}{\mu}\,d\Gamma = 0, \text{ ou}$$

$$dz - \frac{p}{\sigma}\,d\Psi - \left(\frac{q}{\rho} - \frac{pE}{\sigma}\right)d\Omega - \left(\frac{r}{\mu} - \frac{qA}{\rho} - \frac{pB}{\sigma}\right)d\Gamma = 0;$$

c'eft-à-dire, G, H, K, étant des arbitraires,

$$dz + G\,d\Psi + H\,d\Omega + K\,d\Gamma = 0,$$

& intègrant,

$F:(z, \Psi, \Omega, \Gamma) = \text{conft.} = 0$ (§ 24), d'où $z = \phi:(\Psi, \Omega, \Gamma)$.
On aura donc de même, pour la valeur de μ réfultante de l'équation $M\frac{d\mu}{dy} + N\frac{d\mu}{dx} + P\frac{d\mu}{du} + Q\frac{d\mu}{dz} = 0$,

$$\mu = F:(\Psi, \Omega, \Gamma);$$

& conféquemment, l'intégrale complette de celle à quatre variables

$$M\frac{dz}{dy} + N\frac{dz}{dx} + P\frac{dz}{du} - Q = 0,$$

fera $F:(\Psi, \Omega, \Gamma) = 0$.

36. Étant donnée une équation à quatre variables

$$M\frac{dz}{dy} + N\frac{dz}{dx} + P\frac{dz}{du} - Q = 0,$$

dont les coëfficiens ne soient pas tels que l'exige la méthode expliquée ci-dessus, pour l'intégration de ces équations, on formera, avec les mêmes coëfficiens, l'équation à cinq variables

$$M\frac{d\mu}{dy}+N\frac{d\mu}{dx}+P\frac{d\mu}{du}+Q\frac{d\mu}{dz}=0,$$

qu'on parviendra à résoudre, comme je viens de le montrer; pourvu que les trois fonctions Ψ, Ω, Γ, qui composent l'intégrale, soient telles, que l'une ne contienne que deux variables; une autre, les deux mêmes variables avec une troisième; & enfin, que la troisième seule contienne les quatre variables. Je donnerai un exemple de cette opération, le plus simple que je pourrai.

Soit l'équation à quatre variables

$$(3z^2x+2xyz)\frac{dz}{dy}+ux^2\frac{dz}{dx}-(u^2x+2uxz)\frac{dz}{du}+ux^2=0,$$

où les coëfficiens contiennent z, quoique le terme sans différence partielle ne soit point $=0$, & qui est conséquemment insoluble par la méthode expliquée ci-dessus (§. 26). On a ici $M=3z^2x+2xyz$, $N=ux^2$, $P=-(u^2x+2uxz)$, $Q=-ux^2$. Je forme, avec les mêmes coëfficiens, l'équation à cinq variables.

$$(3z^2x+2xyz)\frac{d\mu}{dy}+ux^2\frac{d\mu}{dx}-(u^2x+2uxz)\frac{d\mu}{du}-ux^2\frac{d\mu}{dz}=0.$$

Je trouve maintenant que les trois fractions $\frac{N}{Q}=-1$, $\frac{P}{Q}=\frac{u+2z}{x}$, & $\frac{M}{Q}=-\frac{3z^2+2zy}{ux}$ ont les qualités requises; & comme cette équation appartient à la première formule (§ 35), j'ai d'abord $dx-\frac{N}{Q}dt=dx+dz$ (z remplace ici la lettre t qui se trouve dans la formule); ainsi la première fonction $\Gamma=x+z$, d'où $x=\Gamma-z$. J'ai en-

ſuite $du - \frac{P}{Q}dt$, qui devient $du - \frac{u+2z}{\Gamma - z}dz$, & qui, étant multipliée par $\Gamma - z$ & intégrée, donne pour la ſeconde fonction Ω, $\Omega = \Gamma u - zu - z^2$; c'eſt-à-dire, mettant pour Γ ſa valeur, $\Omega = ux - z^2$; donc $ux = \Omega + z^2$. De plus, $dy - \frac{M}{Q}dt$ ſe change en $dy + \frac{3z^2 + 2yz}{\Omega + z^2}dz$; & multipliant par $\Omega + z^2$, on a pour la troiſième fonction Ψ, $\Psi = (\Omega + z^2)y + z^3 = z^3 + uxy$. Ainſi l'intégrale complette de la propoſée à quatre variables eſt

$$F:(z^3 + uxy,\ z^2 - ux,\ z + x) = 0.$$

Cette méthode pourra s'appliquer à l'équation R de l'article premier, & ſervir conſéquemment, en certains cas, à la ſolution de l'équation à trois variables

$$M\frac{dz}{dy} + N\frac{dz}{dx} + P = 0,$$

qui en dépend. Mais ce ſera ſouvent ſans ſuccès, à cauſe des conditions qui doivent avoir lieu entre les coëfficiens : telle eſt, entr'autres, l'équation de l'art. 9, qui ne peut s'intégrer par cette méthode.

37. On pourroit ici, comme dans les équations à trois variables, ramener réciproquement l'équation

$$M\frac{d\mu}{dy} + N\frac{d\mu}{dx} + P\frac{d\mu}{du} - Q\frac{d\mu}{dz} = 0$$

à celle, ou plutôt (§ 33) à l'une des quatre

$$M\frac{dz}{dy} + N\frac{dz}{dx} + P\frac{dz}{du} + Q = 0,$$

$$M\frac{du}{dy} + N\frac{du}{dx} - Q\frac{du}{dz} - P = 0,$$

$$M\frac{dx}{dy} + P\frac{dx}{du} - Q\frac{dx}{dz} - N = 0,$$

$$N\frac{dy}{dx}+P\frac{dy}{du}-Q\frac{dy}{dz}-M=0,$$

& conclure auſſi que, dans les cas où les coëfficiens de la propoſée

$$M\frac{dz}{dy}+N\frac{dz}{dx}+P\frac{dz}{du}+Q=0$$

ne ſe prêtent pas à la méthode de ſolution, il faudroit la transformer en l'une ou l'autre des trois ſuivantes, qui ſont ce que deviendroit cette même propoſée, en y traitant ſucceſſivement u, x, y comme la variable principale : mais il eſt également clair ici, que ces transformations rameneroient au même point, que l'équation à cinq variables dont elles dérivent.

CHAPITRE QUATRIEME.

Des équations du ſecond ordre & du premier degré, entre trois variables.

38. JE nomme ainſi les équations compriſes dans la formule

$$\alpha\frac{d^2z}{dy^2}+\beta\frac{d^2z}{dxdy}+\gamma\frac{d^2z}{dx^2}+\delta\frac{dz}{dy}+\varepsilon\frac{dz}{dx}+\varpi=0,$$

dans laquelle toutes les différences partielles ſont linéaires. L'équation générale du premier ordre étant

$$M\frac{dz}{dy}+N\frac{dz}{dx}+P=0,$$

je ſuppoſerai que l'intégrale première complette d'une pareille équation du ſecond ordre eſt de la forme

$$M\frac{dz}{dy}+N\frac{dz}{dx}+P=F:Q.$$

Maintenant, si on différentie cette formule successivement par x & par y, en supposant que M, N, P, Q soient fonctions de z, x, & y, & qu'on élimine la fonction arbitraire, on aura

1.

$$\left\{ M\frac{dQ}{dz}\frac{dz}{dx}\frac{d^2z}{dy^2} + N\frac{dQ}{dz}\frac{dz}{dx}\frac{d^2z}{dxdy} - M\frac{dQ}{dz}\frac{dz}{dy}\frac{d^2z}{dydx} - N\frac{dQ}{dz}\frac{dz}{dy}\frac{d^2z}{dx^2} \right\} +$$

$$M\frac{dQ}{dx}\frac{d^2z}{dy^2} + \left(N\frac{dQ}{dx} - M\frac{dQ}{dy}\right)\frac{d^2z}{dxdy} - N\frac{dQ}{dy}\frac{d^2z}{dx^2} +$$

2.

$$\left\{ \frac{dM}{dy}\frac{dQ}{dz} - \frac{dM}{dz}\frac{dQ}{dy} + \frac{dN}{dz}\frac{dQ}{dx} - \frac{dN}{dx}\frac{dQ}{dz} \right\} \frac{dz}{dy}\frac{dz}{dx}$$

3. 4.

$$+ \left\{ \frac{dN}{dy}\frac{dQ}{dz} - \frac{dN}{dz}\frac{dQ}{dy} \right\} \frac{dz^2}{dx} + \left\{ \frac{dM}{dz}\frac{dQ}{dx} - \frac{dM}{dx}\frac{dQ}{dz} \right\} \frac{dz^2}{dy} +$$

$$\left\{ \frac{dQ}{dx}\frac{dM}{dy} - \frac{dQ}{dy}\frac{dM}{dx} + \frac{dQ}{dx}\frac{dP}{dz} - \frac{dQ}{dz}\frac{dP}{dx} \right\} \frac{dz}{dy} +$$

$$\left\{ \frac{dQ}{dz}\frac{dP}{dy} - \frac{dQ}{dy}\frac{dP}{dz} + \frac{dQ}{dx}\frac{dN}{dy} - \frac{dQ}{dy}\frac{dN}{dx} \right\} \frac{dz}{dx} + \frac{dQ}{dx}\frac{dP}{dy} - \frac{dQ}{dy}\frac{dP}{dx} = 0.$$

Je remarque d'abord que tous les termes désignés par les Nos. 1, 2, 3, 4, dans lesquels les différences partielles des différens ordres se trouvent multipliées entr'elles, ou élevées au quarré, sont étrangers à la formule générale. Or, ceux qui sont renfermés sous le No. 1, étant tous différens, ne peuvent disparoître en même tems que par la supposition de $\frac{dQ}{dz} = 0$. Cette supposition anéantit aussi un des termes compris sous les Nos. 3 & 4 : & il est clair que, pour détruire les autres, il faut que $\frac{dM}{dz}$ & $\frac{dN}{dz}$ soient aussi en même tems $= 0$; puisqu'il seroit absurde d'ima-

giner que $\frac{dQ}{dy}$ & $\frac{dQ}{dx}$ fussent $=0$, ou que Q ne contînt ni z, ni x, ni y. Les trois suppositions de $\frac{dQ}{dz}=0$, $\frac{dM}{dz}=0$, $\frac{dN}{dz}=0$ font évanouir le terme 2. Ainsi, elles suffisent pour déterminer l'équation du premier ordre, à pouvoir être l'intégrale d'une équation du second ordre. Il faut donc, pour cela, que z ne se trouve dans aucun des termes M, N, Q; ce qui réduit l'équation générale ci-dessus à

$$M\frac{dQ}{dx}\frac{d^2z}{dy^2}+\left(N\frac{dQ}{dx}-M\frac{dQ}{dy}\right)\frac{d^2z}{dx\,dy}-N\frac{dQ}{dy}\frac{d^2z}{dx^2}+$$
$$\left(\frac{dQ}{dx}\frac{dM}{dy}-\frac{dQ}{dy}\frac{dM}{dx}+\frac{dQ}{dx}\frac{dP}{dz}\right)\frac{dz}{dy}+\left(\frac{dQ}{dx}\frac{dN}{dy}-\frac{dQ}{dy}\frac{dN}{dx}-\frac{dQ}{dy}\frac{dP}{dz}\right)\frac{dz}{dx}+$$
$$\frac{dQ}{dx}\frac{dP}{dy}-\frac{dQ}{dy}\frac{dP}{dx}=0:$$

Et, puisque P peut seule contenir z, il est clair que les seuls termes susceptibles d'être affectés de z, dans les équations du second ordre, sont les coëfficiens de $\frac{dz}{dy}$ & $\frac{dz}{dx}$, & le terme sans différence partielle; c'est-à-dire, dans notre équation générale, δ, ε & ϖ.

39. Si on suppose que ϖ renferme seule z, il faudra que, dans δ & ε, $\frac{dP}{dz}$ se réduise à une fonction de x & y; c'est-à-dire, que P ne contienne z que sous une forme linéaire; d'où il s'ensuit aussi que ϖ ne la contiendra que sous la même forme. L'équation sera alors ce qu'on appelle linéaire, aussi bien que son intégrale première

$$M\frac{dz}{dy}+N\frac{dz}{dx}+P=F:Q;$$

ce qui prouve clairement que la première intégrale complette d'une

équation linéaire du second ordre, est elle-même une équation linéaire du premier ordre.

40. En comparant, terme à terme, l'équation générale du second ordre, avec celle que j'ai déduite par la différentiation, on aura les équations suivantes,

$$M\frac{dQ}{dx}=\alpha,\ N\frac{dQ}{dx}-M\frac{dQ}{dy}=\beta,\ N\frac{dQ}{dy}=-\gamma,\ \frac{dQ}{dx}\frac{dM}{dy}-\frac{dQ}{dy}\frac{dM}{dx}+\frac{dQ}{dx}\frac{dP}{dz}=\delta,\ \frac{dQ}{dx}\frac{dN}{dy}-\frac{dQ}{dy}\frac{dN}{dx}-\frac{dQ}{dy}\frac{dP}{dz}=\varepsilon,\ \frac{dQ}{dx}\frac{dP}{dy}-\frac{dQ}{dy}\frac{dP}{dx}=\varpi;$$

on tire des trois premières,

$$\frac{dQ}{dx}=\frac{\alpha}{M};\ \frac{dQ}{dy}=-\frac{\gamma}{N},\ \&\ \alpha N^2+\gamma M^2=\beta MN;$$

d'où

$$N=\frac{\beta\pm\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}M,$$

que je représente par $N=\sigma M$; σ pouvant, comme on voit, avoir deux valeurs : & on remarquera que toutes ces quantités α, β, γ sont connues, & ne contiennent que x & y (§ 38). La quatrième équation donne

$$\frac{\alpha}{M}\frac{dM}{dy}+\frac{\gamma}{N}\frac{dM}{dx}+\frac{\alpha}{M}\frac{dP}{dz}=\delta;$$

& la cinquième

$$\frac{\alpha}{M}\frac{dN}{dy}+\frac{\gamma}{N}\frac{dN}{dx}+\frac{\gamma}{N}\frac{dP}{dz}=\varepsilon.$$

Multipliant celle-là par $\frac{\gamma}{N}$, & celle-ci par $\frac{\alpha}{M}$; & soustrayant l'une de l'autre, il vient

$$\frac{\alpha\gamma}{MN}\frac{dM}{dy}-\frac{\alpha^2}{M^2}\frac{dN}{dy}+\frac{\gamma^2}{N^2}\frac{dM}{dx}-\frac{\alpha\gamma}{MN}\frac{dN}{dx}=\frac{\gamma\delta}{N}-\frac{\alpha\varepsilon}{M}.$$

Otant enfin les dénominateurs, mettant pour N sa valeur σM,

& ſuppoſant de plus $d\sigma = A\,dx + B\,dy$, cette équation ſe change en . . . . . (R)

$(\sigma\alpha\gamma - \sigma^3\alpha^2)\frac{dM}{dy} + (\gamma^2 - \sigma^2\alpha\gamma)\frac{dM}{dx} = (\sigma\gamma\delta - \sigma^2\alpha\varepsilon + \sigma^2\alpha^2 B +$
$\sigma\alpha\gamma A)M$,

d'où on conclura la valeur de M.

Connoiſſant M & N, il ſera facile de trouver Q, au moyen des deux équations $\frac{dQ}{dx} = \frac{\alpha}{M}, \frac{dQ}{dy} = -\frac{\gamma}{N}$. Il ne reſte plus qu'à chercher P. Nous avons pour cela la ſixième équation

$$N\alpha\frac{dP}{dy} + M\gamma\frac{dP}{dx} = MN\varpi$$

qu'on intégrera, en ſe ſouvenant que P peut contenir x, y & z; c'eſt-à-dire, qu'on la traitera comme une équation à quatre variables : & pour déterminer la fonction arbitraire que cette équation introduira, on ſe ſervira de l'une ou l'autre des deux équations ci-deſſus, qui renferment $\frac{dP}{dz}$; après avoir ſubſtitué pour α, γ, δ; ou pour α, γ, ε, leurs valeurs reſpectives.

41. Soit $xy^2\frac{d^2z}{dy^2} - x^3\frac{d^2z}{dx^2} - 2zy\frac{dz}{dy} + (2zx - 2x^2)\frac{dz}{dx} + 2y^2 = 0$.

Comme cette équation pourroit n'être pas dans ſon état naturel, & qu'un facteur, commun à tous les termes, en eſt peut-être diſparu par la diviſion, je la multiplie par le facteur indéterminé ψ. On a donc

$\alpha = \psi xy^2, \beta = 0, \gamma = -\psi x^3, \delta = -2\psi zy, \varepsilon = 2\psi(zx - x^2)$,
$\varpi = 2\psi y^2$.

Je tire d'abord de-là

$$\sigma = \frac{\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha} = \pm\frac{x}{y};$$

mettant

mettant ensuite, dans l'équation R, $\frac{x}{y}$ pour σ, & pour $\alpha, \gamma, \delta, \varepsilon$, A & B leurs valeurs, elle se réduit à

$$y\frac{dM}{dy} - x\frac{dM}{dx} = 0,$$

d'où, en intégrant, $M = F : xy$; ou, comme il suffit de trouver une valeur déterminée de M, $M = 1$. Donc $N = \frac{x}{y}M = \frac{x}{y}$. Maintenant, les deux équations $\frac{dQ}{dx} = \psi\, xy^2$, $\frac{dQ}{dy} = \psi\, x^2 y$ me donnent

$$dQ = \psi(y^2 x\, dx + x^2 y\, dy),$$

ainsi ψ est le facteur de cette quantité, & par conséquent, $\psi =$ const. $= 2$; d'où $Q = x^2 y^2$. Pour trouver P, j'ai l'équation

$$xy\frac{dP}{dy} - x^2\frac{dP}{dx} = 2y,$$

qui donne

$$P = \frac{y}{x} + F : (z, xy).$$

Différentiant cette équation par z, il vient $\frac{dP}{dz} = Æ$, $Æ$ étant une arbitraire, mais fonction de z & xy seulement. Or, il faut aussi satisfaire à l'équation $\frac{dP}{dz} = \frac{-2z}{xy}$; donc $Æ = -\frac{2z}{xy}$, & $F : (z, xy)$ devient $-\frac{z^2}{xy}$. Résumant les valeurs de M, N, P, Q, on aura enfin, pour intégrale première complette de la proposée,

$$\frac{dz}{dy} + \frac{x}{y}\frac{dz}{dx} + \frac{y}{x} - \frac{z^2}{xy} = F : (x^2 y^2), \text{ ou}$$

$$xy\frac{dz}{dy} + x^2\frac{dz}{dx} + y^2 - z^2 = F : xy.$$

Si on trouvoit deux pareilles intégrales, on en concluroit, comme on fait, l'intégrale finie : au défaut de ce moyen, il faudra intégrer cette équation du premier ordre, selon la méthode ordinaire. On aura (§ 2)

$M = xy$, $N = x^2$, $P = y^2 - z^2 - F : xy$, $M\,dx - N\,dy = xy\,dx - x^2\,dy$, $s = \frac{x}{y}$, $M\,dz + P\,dy = xy\,dz + (y^2 - z^2 - F : xy)\,dy$, ou mettant pour x ſa valeur sy,

$$M\,dz + P\,dy = sy^2 dz + (y^2 - z^2 - F : sy^2)\,dy.$$

Il ne faut plus qu'avoir le facteur qui rend cette quantité une différentielle exacte en ſuppoſant s conſtante; mais, à cauſe de la fonction arbitraire, on ſe trouve arrêté; & il peut ſe faire que de pareilles équations n'aient pas toujours une intégrale complette finie.

42, On a vu (§ 38) que M doit être fonction de x & y ſeulement, ainſi il eſt évident que l'équation R, d'où dérive la valeur de M, ne ſauroit contenir la variable z : cependant, cette équation renferme les deux lettres δ, ε, qui peuvent être affectées de cette variable. Il réſulte de-là que, ſi la valeur qu'on ſubſtitue à σ dans l'équation R eſt véritable, les deux termes $\sigma\gamma\delta - \sigma^2\alpha\varepsilon$ doivent, par leur réunion, faire diſparoître z. Ainſi, on pourra toujours reconnoître ſi une valeur de σ eſt vraie, à ce que la quantité $\sigma\gamma\delta - \sigma^2\alpha\varepsilon$, ou ſimplement $\gamma\delta - \sigma\alpha\varepsilon$ (puiſque σ ne contient jamais z [§ 40]) ſera fonction de x & y ſeulement. Si on trouve deux pareilles valeurs pour σ, on aura deux différentes équations R, qui détermineront M. Mais on auroit tort d'en inférer que la propoſée a néceſſairement deux intégrales complettes : cette condition ne ſuffit pas, comme on va voir.

43. Soit $\frac{d^2z}{dy^2} - \frac{x^2}{y^2}\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dz}{dy} - \frac{1}{y}\frac{dz}{dx} + \frac{2z}{xy} = 0$.

On a $\alpha = \psi$, $\beta = 0$, $\gamma = -\psi\frac{x^2}{y^2}$, $\delta = \frac{\psi}{x}$, $\varepsilon = -\frac{\psi}{y}$, $\varpi = \frac{2\psi z}{xy}$, $N = \pm\frac{x}{y}M$; donc $\sigma = \pm\frac{x}{y}$.

En prenant la valeur positive de σ, on aura

$$\frac{dM}{dy} - \frac{x}{y}\frac{dM}{dx} - \frac{1}{y}M = 0,$$

d'où $M = y F : xy$, ou seulement $M = y$, $N = x$, $Q = xy$; & de

$$x\frac{dP}{dy} - \frac{x^2}{y}\frac{dP}{dx} = 2z,$$

on conclut

$$P = \frac{zy}{x} + F : (z, xy).$$

Or, $\frac{dP}{dz}$ doit être $= \frac{y-x}{x}$; & on a ici $\frac{dP}{dz} = \frac{y}{x} + Æ$; donc $Æ = -1$, &

$$P = \frac{zy}{x} - z = \frac{y-x}{x}z;$$

ainsi une première intégrale complette sera

$$y\frac{dz}{dy} + x\frac{dz}{dx} + \frac{y-x}{x}z = F : xy.$$

Par la seconde valeur de σ; savoir, $\sigma = -\frac{x}{y}$, on aura

$$M = y^{\frac{y}{x}},\ N = -\frac{x}{y}y^{\frac{y}{x}},\ Q = \frac{x}{y},\ P = \frac{2z}{x} + F : (z, \frac{y}{x}),$$

d'où, différentiant la valeur de P par z,

$$\frac{dP}{dz} = \frac{2}{x} + Æ.$$

Mais on a aussi $\frac{dP}{dz} = 0$; donc $Æ = -\frac{2}{x}$, ce qui est impossible puisque $Æ$ ne peut être fonction que de z & $\frac{y}{x}$. Ainsi cette valeur est fausse, quoique la valeur de σ remplisse la condition prescrite par l'article précédent.

Aussi, en intégrant de nouveau à l'ordinaire la première intégrale trouvée, on a, pour l'intégrale complette finie, les deux équations

$$zy^{\frac{1-s}{s}} = \int (y^{\frac{1-2s}{s}} F:[sy^2]) dy + \phi : s; \ \& \ s = \frac{x}{y};$$

s devant être regardée comme constante, en intégrant la quantité sous le signe; d'où il est aisé de voir qu'on ne peut éliminer par une première différentiation, que la fonction $\phi : s$; & conséquemment, que la proposée n'est susceptible que d'une première intégrale complette.

44. J'appliquerai cette méthode à l'équation connue des cordes vibrantes uniformément épaisses; savoir,

$$\frac{d^2z}{dy^2} - C^2 \frac{d^2z}{dx^2} = 0, \text{ où } C \text{ est constante.}$$

On a $\alpha = \psi$, $\beta = 0$, $\gamma = -C^2 \psi$, $\delta = \epsilon = \varpi = 0$. Donc $N = \pm C M$, $\sigma = \pm C$. Ensuite, $\frac{dM}{dy} \mp C \frac{dM}{dx} = 0$, $M = F:(x \pm Cy) = 1$, $N = \pm C$. $Q = x \pm Cy$, $P = 0$. On a donc enfin

$$\frac{dz}{dy} \pm C \frac{dz}{dx} = F:(x \pm Cy);$$

ce qui fournit deux premières intégrales; savoir,

$$\frac{dz}{dy} + C \frac{dz}{dx} = F':(x + Cy),$$

$$\frac{dz}{dy} - C \frac{dz}{dx} = f':(x - Cy).$$

Tirant de ces deux équations, la valeur de $\frac{dz}{dy}$ & de $\frac{dz}{dx}$, on en conclura celle de dz; savoir,

$$2 C dz = (C dy + dx) F':(Cy + x) + (C dy - dx) f':(x - Cy),$$

& on aura enfin, en intégrant,

$$z = F:(x + Cy) + f:(x - Cy).$$

Le cas de la corde uniformément épaisse, n'est pas le seul qui admette une intégrale de l'ordre immédiatement inférieur. C'est

une remarque qui eſt échappée à l'auteur de l'ouvrage très-recommandable, que j'ai déja ſouvent cité. Toutes ces équations peuvent ſe repréſenter par

$$\frac{d^2 z}{dy^2} - X^2 \frac{d^2 z}{dx^2} = 0,$$

& toutes les fois que X ſera compriſe dans la formule $\frac{(ax+b)^2}{c}$, elles s'intègreront par la même méthode. En effet, ſuppoſons $X = x^2$; on aura $\alpha = \psi$, $\beta = 0$, $\gamma = -\psi x^4$, $\delta = \varepsilon = \varpi = 0$; $\sigma = \pm x^2$; donc

$$\mp \frac{dM}{dy} + x^2 \frac{dM}{dx} + x M = 0, \text{ \&}$$

$$M = \frac{\Phi : (\pm \frac{1}{x} - y)}{x}, \text{ ou ſimplement } M = \frac{1}{x}, \text{ \& } N = \pm x.$$

On aura auſſi,

$$\frac{dQ}{dx} = \psi x, \ \frac{dQ}{dy} = \pm \psi x^3, \text{ \& } dQ = \psi (x\,dx \pm x^3\,dy).$$

Donc $\psi = \frac{1}{x^3}$, & $Q = -\frac{1}{x} \pm y$. Enſuite

$$\pm \frac{dP}{dy} - x^2 \frac{dP}{dx} = 0, \text{ \& } P = F : (-\tfrac{1}{x} \pm y, z).$$

Mais $\frac{dP}{dz} = \mp 1$, donc $Æ = \mp 1$, & $P = \mp z$. On a donc les deux intégrales premières complettes

$$\frac{1}{x} \frac{dz}{dy} + x \frac{dz}{dx} - z = F : (-\tfrac{1}{x} + y), \text{ \&}$$

$$\frac{1}{x} \frac{dz}{dy} - x \frac{dz}{dx} + z = f : (-\tfrac{1}{x} - y);$$

d'où on tire

$$\frac{2}{x} \frac{dz}{dy} = F' : (-\tfrac{1}{x} + y) + f' : (-\tfrac{1}{x} - y), \text{ \&}$$

$$2x \frac{dz}{dx} - 2z = F' : (-\tfrac{1}{x} + y) - f' : (-\tfrac{1}{x} - y).$$

Multipliant la première par $x^2 dy$, & la feconde par dx, & les ajoutant, on aura

$$2 x dz - 2 z dx = dx (F' : - f' :) + x^2 dy (F' : + f' :),$$

$$\frac{2 x dz - 2 z dx}{x^2} = \frac{dx}{x^2} (F' : - f' :) + dy (F' : + f' :) = (\frac{dx}{x^2} + dy) F' : -$$
$$(\frac{dx}{x^2} - dy) f' : ,$$

$$\frac{2z}{x} = F : (y - \frac{1}{x}) + f : (y + \frac{1}{x}), \text{ ou enfin}$$

$$z = x (F : [y - \frac{1}{x}] + f : [y + \frac{1}{x}]) :$$

réfultat entiérement conforme à celui que fournit, pour cette hypothèfe, la méthode qu'emploie Mr. Coufin, dans les cas où les équations n'ont pas d'intégrale complette de l'ordre immédiatement inférieur *.

45. Un cas fingulier eft celui où, $\beta^2 - 4 \alpha \gamma$ étant $= 0$, le figne radical difparoît de la valeur de σ, qui par-là devient unique & $= \frac{\beta}{2 \alpha}$. Il réfulte de cette fuppofition une circonftance embarraffante ; favoir, que l'équation R (§ 40), qui fert à déterminer M, devient $0 = 0$. Je vais d'abord démontrer que cela doit toujours avoir lieu. Je mets cette équation fous la forme fuivante . . . . . (H) ;

$$(\gamma - \sigma^2 \alpha) (\sigma \alpha \frac{dM}{dy} + \gamma \frac{dM}{dx}) - (\gamma [\sigma \delta + \sigma \alpha A] - \sigma^2 \alpha$$
$$[\varepsilon - \alpha B]) M = 0,$$

qui, en fuppofant $\sigma \delta + \sigma \alpha A = \varepsilon - \alpha B$, ou $\sigma \delta - \varepsilon + \alpha (\sigma A + B) = 0$, fe réduit à . . . . . . (K)

* Voyez l'ouvrage cité, page 690.

$$(\gamma-\sigma^2\alpha)\left(\sigma\alpha\frac{dM}{dy}+\gamma\frac{dM}{dx}+[\alpha B-\varepsilon]M\right)=0.$$

Je remarque maintenant que $\beta^2-4\alpha\gamma=0$ donne $\gamma-\sigma^2\alpha=0$; ainſi, quand $\beta^2-4\alpha\gamma=0$, pourvu que $\sigma\delta-\varepsilon+\alpha(\sigma A+B)=0$, R ſera toujours $0=0$. Or, on va voir que de $\beta^2-4\alpha\gamma=0$, ou de $\gamma-\sigma^2\alpha=0$, ou enfin de $\sigma=\frac{\beta}{2\alpha}$, il s'enſuit néceſſairement que $\sigma\delta-\varepsilon+\alpha(\sigma A+B)=0$.

En effet, ſi dans cette dernière expreſſion, on met, pour δ, ε, α, A, B, leurs valeurs (§ 40), après avoir ſubſtitué dans celle de ε, σM à N, & $\sigma dM+Md\sigma$ à dN, on aura, toute réduction faite,

$$\sigma\delta-\varepsilon+\alpha(\sigma A+B)=\left(\sigma\frac{dQ}{dx}+\frac{dQ}{dy}\right)\left(\frac{dP}{dz}+M\frac{d\sigma}{dx}\right).$$

De plus $\beta^2-4\alpha\gamma=0$, ou $2\alpha\sigma-\beta=0$ donne, en mettant pour α & β leurs valeurs, $\sigma\frac{dQ}{dx}+\frac{dQ}{dy}=0$; donc, &c.

L'expreſſion $\sigma\delta-\varepsilon+(\sigma A+B)\alpha$ peut, à la vérité, auſſi devenir $=0$, en feſant $\frac{dP}{dz}+M\frac{d\sigma}{dx}=0$. Dans ce cas l'équation R ſera également compriſe dans la formule K; mais $\gamma-\sigma^2\alpha$ n'étant pas $=0$, elle ne deviendra pas $0=0$. Le facteur diſparoîtra par la diviſion, & R ſe réduira à . . . . . (R')

$$\sigma\alpha\frac{dM}{dy}+\gamma\frac{dM}{dx}+(\alpha B-\varepsilon)M=0,$$

σ ayant ſes deux valeurs à l'ordinaire.

De ce que l'équation R ſe change en $0=0$, on ne peut conclure autre choſe, ſinon que, quelque ſoit la valeur de M, elle ſatisfera aux cinq premières équations fondamentales (§ 40). Mais il y a encore deux conditions eſſentielles à remplir; l'une eſt celle qui eſt

exprimée par la sixième équation; & l'autre, celle que j'ai déja fait observer ci-dessus (§ 43); savoir, que la valeur de $\frac{dP}{dz}$ que fournit la quatrième équation, soit compatible avec celle que donne la sixième.

On pourroit peut-être croire que la transformée R' seroit également propre à déterminer, dans ce cas, la valeur de M; mais on va voir que, lorsque $\gamma - \sigma^2 \alpha = 0$, cette transformée n'est qu'un cas particulier d'une formule infiniment générale, & également admissible dans toute sa généralité. En effet, reprenons l'équation H : puisque $\gamma = \sigma^2 \alpha$, je puis indistinctement donner, à chaque partie de la fonction $\sigma\delta + \sigma\alpha A - \varepsilon + \alpha B$, γ ou $\sigma^2 \alpha$ pour facteur; c'est-à-dire, que nommant W toute cette fonction, je pourrai la partager en deux parties quelconques $W - G$, & G, dont la somme est W; & donner à l'une des deux γ, & à l'autre $\sigma^2 \alpha$ pour facteur. J'aurai par-là

$$(\gamma - \sigma^2 \alpha)\left(\sigma\alpha \frac{dM}{dy} + \gamma \frac{dM}{dx}\right) - (\gamma[W - G] - \sigma^2 \alpha[-G])M = 0;$$

ou, comme $W = \sigma\delta + \sigma\alpha A - \varepsilon + \alpha B = 0$,

$$(\gamma - \sigma^2 \alpha)\left(\sigma\alpha \frac{dM}{dy} + \gamma \frac{dM}{dx} + GM\right) = 0,$$

où G peut être toute quantité imaginable; donc, &c.

46. Je commencerai donc par chercher dans ce cas une valeur de M, qui satisfasse aux deux dernières conditions dont j'ai fait mention, & elle satisfera sûrement à toutes les autres. Pour cela, je substitue dans la sixième équation, les valeurs de $\frac{dQ}{dx}, \frac{dQ}{dy}$, & à cause de

$$N = \sigma M,\ \sigma = \frac{6}{2\alpha},\ \&\ 4\alpha\gamma = 6^2,$$

elle

elle devient (A)

$$2\alpha\frac{dP}{dy}+\beta\frac{dP}{dx}-2\varpi M=0$$

qu'il faut intégrer, comme équation à quatre variables; puisque P peut renfermer z. Ceci s'éclaircira mieux par un exemple. Soit la proposée

$$xy^2\frac{d^2z}{dy^2}+2x^2y\frac{d^2z}{dx\,dy}+x^3\frac{d^2z}{dx^2}+2xy\frac{dz}{dy}+2x^2\frac{dz}{dx}+2y^2=0.$$

L'ayant multipliée par un facteur ψ, j'ai dabord $\sigma=\frac{x}{y}$, & R devient $0=0$. J'ai donc recours à cette seconde méthode, & l'équation A devient

$$xy\frac{dP}{dy}+x^2\frac{dP}{dx}-2yM=0;\text{ d'où (§. 24).}$$

$$\int(dP-\frac{2M}{x}dy)=F:(\frac{x}{y},z)$$

On voit dabord que le premier membre s'intègre tout de suite, en supposant $M=x\,\phi:y$. On peut se borner à la formule $M=xy^n$; & par-là

$$dQ=\psi(\frac{\alpha}{M}dx-\frac{\gamma}{N}dy)$$

devient

$$dQ=\frac{\psi xy}{xy^{n-2}}(\frac{ydx-xdy}{y^2})$$

d'où $\psi=y^{n-3}$, & $Q=\frac{x}{y}$. Ainsi

$$M=xy^n,\ N=x^2y^{n-1},\ Q=\frac{x}{y},\ \&\ P=\frac{2}{n+1}y^{n+1}+F:(\frac{x}{y},z).$$

De plus, $\frac{dP}{dz}=Æ$ fonction de $\frac{x}{y}$ & z seulement. Or, en vertu de la quatrième équation fondamentale

K

$$\frac{dP}{dz} = (1-n)\, xy^{n-1} = Æ = f : \left(\frac{x}{y}, z\right)$$

ou comme z n'eſt pas contenue ici dans la valeur de $\frac{dP}{dz}$, $Æ =$ $f : \frac{x}{y}$; & quand $Æ = f : \frac{x}{y}$, on a auſſi, en éliminant la fonction arbitraire,

$$x \frac{dÆ}{dx} + y \frac{dÆ}{dy} = 0\,;$$

mettant donc pour $Æ$ ſa valeur dans cette dernière équation, on aura $n \,.\, n-1 \,.\, xy^{n-1} = 0$; c'eſt-à-dire, $n = 0$, ou $n = 1$; ce qui donne les deux intégrales premières

$$xy \frac{dz}{dy} + x^2 \frac{dz}{dx} + 2y^2 + zx = y\, F : \frac{x}{y}\,,$$

$$xy \frac{dz}{dy} + x^2 \frac{dz}{dx} + y^2 = \Phi : \frac{x}{y}\,,$$

où il faut remarquer que la fonction arbitraire $F : \left(\frac{x}{y}, z\right)$ qui affectoit la valeur de P, a été déterminée au moyen de l'équation $\frac{dP}{dz} = (1-n)\, xy^{n-1}$; ce qui donne, pour la partie de P qui contient z, $(1-n)\, xy^{n-1} z$; c'eſt-à-dire, ou zéro, lorſque $n = 1$; ou $\frac{x}{y} z$, lorſque $n = 0$. On conclura enſuite, de ces deux premières intégrales, l'intégrale finie

$$zx + y^2 = y\, F : \frac{x}{y} + \Phi : \frac{x}{y}.$$

47. Juſqu'ici j'ai ſuppoſé qu'aucun des coëfficiens α, β, γ, n'étoit $= 0$. Examinons maintenant ce qui arriveroit dans le cas contraire ; & je ſuppoſe dabord qu'il n'y en ait qu'un $= 0$. On voit que ſi c'étoit β, il n'y auroit aucun inconvénient. σ ſeroit

$$= \frac{\pm\sqrt{-4\alpha\gamma}}{2\alpha} = \pm\sqrt{-\frac{\gamma}{\alpha}};$$

& si $\frac{\gamma}{\alpha}$ n'étoit pas négatif, il en résulteroit seulement que σ seroit imaginaire.

Soit maintenant $\gamma = 0$, (ce seroit la même chose si c'étoit α, puisqu'il ne s'agiroit que de permuter x avec y). On en concluroit; ou $N = 0$; ou $\frac{dQ}{dy} = 0$; ou tous les deux. Dans ce dernier cas, on auroit aussi, en vertu de la seconde équation, (§. 40.) $\beta = 0$; ainsi il y auroit deux coëfficiens β & $\gamma = 0$; & ce cas n'appartient pas à la classe que j'examine dans ce moment. Ce sera donc; ou $N = 0$; ou $\frac{dQ}{dy} = 0$.

1°. Si c'est $N = 0$; j'aurai $M\frac{dQ}{dx} = \alpha$, $M\frac{dQ}{dy} = -\beta$, $\frac{dQ}{dy}\frac{dP}{dz} + \varepsilon = 0$, ou multipliant par $\frac{dQ}{dx}$,

$$\frac{dQ}{dx}\frac{dQ}{dy}\frac{dP}{dz} + \varepsilon\frac{dQ}{dx} = 0;$$

ôtant cette équation de la quatrième, après avoir multiplié celle-ci par $\frac{dQ}{dy}$, mettant ensuite dans le résultat, $\frac{\alpha}{M}$ pour $\frac{dQ}{dx}$, & $-\frac{\beta}{M}$ pour $\frac{dQ}{dy}$, & multipliant par M^2, on parviendra à l'équation... (J)

$$\alpha\beta\frac{dM}{dy} + \beta^2\frac{dM}{dx} + (\alpha\varepsilon - \beta\delta)M = 0;$$

On verra mieux le reste de l'opération par un exemple.

Soit $y^2\frac{d^2z}{dy^2} + xy\frac{d^2z}{dxdy} + 2y\frac{dz}{dy} + x\frac{dz}{dx} = 0$.

On a ici $\alpha = \psi y^2$, $\beta = \psi xy$, $\gamma = 0$, $\delta = 2\psi y$, $\varepsilon = \psi x$, $\varpi = 0$. Substituant ces valeurs dans l'équation précédente, elle devient

$$y\frac{dM}{dy} + x\frac{dM}{dx} - M = 0\text{ ; d'où } M = y\ F : \frac{x}{y} = y.$$

Donc $\frac{dQ}{dx} = \frac{\alpha}{M} = \frac{\psi y^2}{y} = \psi y$, $\frac{dQ}{dy} = -\psi x$ &

$$dQ = \psi\ (ydx - xdy),$$

ce qui exige que $\psi = \frac{1}{y^2}$; & Q sera $= \frac{x}{y}$. De plus, la dernière équation

$$\frac{dQ}{dx}\frac{dP}{dy} - \frac{dQ}{dy}\frac{dP}{dx} = 0$$

donne $P = F : (\frac{x}{y}, z)$, & pour déterminer cette fonction, on fera $\frac{dP}{dz} = Æ$, $Æ$ étant une fonction détérminée de $\frac{x}{y}$ z ; & comme on a aussi $\frac{dP}{dz} = -\frac{\varepsilon}{\frac{dQ}{dy}} = 1$, $Æ$ sera $= 1$, & $P = z$. Ainsi l'intégrale cherchée est

$$y\frac{dz}{dy} + z = f : \frac{x}{y}.$$

De plus, la formule générale de ces intégrales étant

$$M\frac{dz}{dy} + P = F : Q\ (\S.\ 38).$$

qui intégrée de nouveau à l'ordinaire, donne

$$\int \mu\ (Mdz + Pdy - F : Q\ dy) = \phi : x,$$

il est aisé de voir que de pareilles équations du second ordre n'ont qu'une première intégrale complette, & qu'ainsi il seroit inutile de chercher une seconde détermination de M.

2°. Si c'est $\frac{dQ}{dy} = 0$, $F : Q$ n'est donc plus que $F : x$; ainsi . .. $Q = x$, $\frac{dQ}{dx} = 1$, $M = \alpha$, $N = \mathcal{E}$, $\frac{dM}{dy} + \frac{dP}{dz} = \delta$, $\frac{dN}{dy} = \varepsilon$, & $\frac{dP}{dy} = \varpi$

On va voir que ces équations suffisent pour déterminer M, N & P.

Soit en effet

$$y^2\frac{d^2z}{dy^2}+xy\frac{d^2z}{dxdy}+3y\frac{dz}{dy}+x\frac{dz}{dx}+z=0\,;$$

c'est-à-dire,

$$\alpha=\psi y^2,\ \beta=\psi xy,\ \gamma=0,\ \delta=3\psi y,\ \varepsilon=\psi x,\ \varpi=\psi z.$$

Si j'essaie d'appliquer à cette équation la méthode précédente, je réconnoîtrai bientôt à la valeur de $Æ$, lorsqu'il s'agira de déterminer la fonction arbitraire qui complique l'expression de P, qu'elle ne peut avoir lieu ; d'où je conclurai que c'est le cas de $\frac{dQ}{dy}=0$. Voici comme, dans ce cas, je procède à l'intégration de la proposée. J'ai $\frac{dN}{dy}=\varepsilon=\psi x$, & $N=\beta=\psi xy$. Donc

$$y\frac{dN}{dy}-N=0,\ \&\ N=yf:x=y.$$

Ainsi $\psi=\frac{1}{x}$, $M=\frac{y^2}{x}$, $\frac{dP}{dy}=\varpi=\frac{z}{x}$, & $P=\frac{zy}{x}+F:(x,z)$;

d'où $\frac{dP}{dz}=\frac{y}{x}+Æ$. Or, on a aussi $\frac{dP}{dz}=\delta-\frac{dM}{dy}=\frac{3y}{x}-\frac{2y}{x}=\frac{y}{x}$; donc $Æ=0$, & $P=\frac{zy}{x}$. L'intégrale cherchée est donc

$$\frac{y^2}{x}\frac{dz}{dy}+y\frac{dz}{dx}+\frac{y}{x}z=F:x,$$

ou, multipliant tout par x,

$$y^2\frac{dz}{dy}+xy\frac{dz}{dx}+zy=F:x.$$

48 Je passe au cas où deux des coëfficiens α, β, γ sont $=0$. Ce ne peut être que α & β; ou β & γ; ou α & γ. Je vois dabord que α & β; & β & γ, font la même chose, en permutant les

variables xy. Il ne reſte donc que les deux combinaiſons α & β ; & α & γ, à examiner.

1°. En conſidérant les équations de l'Art 40, on verra que, ſi α & γ ſont $= 0$, il faut ; 1°. ou que M & $N = 0$; 2°. ou que M & $\frac{dQ}{dy} = 0$; 3°. ou que N & $\frac{dQ}{dx} = 0$; 4°. ou enfin que $\frac{dQ}{dx}$ & $\frac{dQ}{dy} = 0$. La première & la quatrième de ces ſuppoſitions ne peuvent évidemment avoir lieu ; car 1°., ſi M & N étoient $= 0$, l'intégrale première ſe réduiroit à $P = F : Q$, & ne ſeroit plus du premier ordre, mais finie ; & 2°., il faut néceſſairement que Q contienne au moins l'une ou l'autre des deux variables x, y.

Dans le cas de M & $\frac{dQ}{dy} = 0$ (qui en permutant les variables, eſt la même choſe que celui de N & $\frac{dQ}{dx} = 0$), comme alors $Q = x$, & $\frac{dQ}{dx} = 1$, on aura $N = \beta$, $\frac{dP}{dz} = \delta$, $\frac{dN}{dy} = \varepsilon$, & enfin $\frac{dP}{dy} = \varpi$, ce qui ſuffit pour tout déterminer.

Soit $y^3 \frac{d^2 z}{dxdy} + xy \frac{dz}{dy} + 3y^2 \frac{dz}{dx} + zx = 0$.

On a, $\alpha = 0$, $\beta = \psi y^3$, $\gamma = 0$, $\delta = \psi xy$, $\varepsilon = 3\psi y^2$, $\varpi = \psi z x$; ainſi $\frac{dN}{dy} = \varepsilon = 3\psi y^2$, $N = \beta = \psi y^3$, &

$$y \frac{dN}{dy} - 3N = 0 ; \text{ d'où } N = y^3 f : x = y^3.$$

Je conclus delà $\psi = 1$, $\delta = xy$, $\varepsilon = 3y^2$, $\varpi = zx$. De plus, $\frac{dP}{dy} = zx$ donne $P = zxy + F : (z, x)$, & $\frac{dP}{dz} = xy + Æ$.

Or, $\frac{dP}{dz} = \delta = xy$; donc $Æ = 0$; & $P = zxy$. Ainſi l'intégrale cherchée eſt

$$y^3 \frac{dz}{dx} + zxy = F : x.$$

Si on avoit eu

$$x^3 \frac{d^2z}{dxdy} + 3x^2 \frac{dz}{dy} + xy \frac{dz}{dx} + zy = 0$$

on auroit eſſayé inutilement la ſuppoſition de M & $\frac{dQ}{dy} = 0$. Il auroit fallu en revenir à ſuppoſer N & $\frac{dQ}{dx} = 0$, ou ſimplement permuter les variables dans la propoſée, & recommencer l'opération. Au reſte, on voit que, tant que $\frac{dQ}{dx}$ ou $\frac{dQ}{dy}$ eſt $= 0$, & que conſéquemment Q eſt fonction de y ou x ſeule, ou plutôt égale à y ou à x, il ne s'agit que de voir ſi la propoſée eſt une différentielle exacte, en ſuppoſant l'une ou l'autre des deux variables conſtante, & d'égaler l'intégrale de cette différentielle, à une fonction arbitraire de la variable traitée comme conſtante.

2°. Si c'eſt α & β qui ſont $= 0$, on verra facilement que la ſeule combinaiſon admiſſible qui en réſulte, eſt $M = 0$, & $\frac{dQ}{dx} = 0$, qui eſt préciſément le cas pui s'étoit préſenté au commencement de l'Art. 47. L'intégrale d'une pareille équation ſera donc de la forme

$$N \frac{dz}{dx} + P = f : y;$$

ou ſi c'eſt β & γ qui ſont $= 0$, (d'où, par la même raiſon, N & $\frac{dQ}{dy} = 0$) de celle

$$M\frac{dz}{dy} + P = f : x;$$

& d'après tout ce qui précède, ce cas ne peut souffrir aucune dificulté.

49. En général, une équation aux différences partielles du second ordre, susceptible d'une intégrale finie, aura deux premières intégrales complettes, toutes les fois que son intégrale finie sera telle, qu'on puisse en faire évanouir indifféremment l'une ou l'autre des deux fonctions arbitraires qu'elle renferme. Il suit delà que les deux formes

$$\Pi = \vartheta\phi : \omega + f : \omega, \text{ \& } \Pi = \phi : \omega + f : \gamma$$

ont seules cette propriété ; Π étant fonction de z, x y ; & ϑ, ω, γ, de x & y seulement. En effet, soit l'équation la plus générale de cette forme

$$\psi' = \lambda'\phi : \omega + \mu f : \gamma,$$

où ψ', λ', ω, μ, γ contiennent les trois variables z, x, y. Je divise dabord par μ, & je suppose $\frac{\psi'}{\mu} = \psi$, $\frac{\lambda'}{\mu} = \lambda$, d'où

$$\psi = \lambda\phi : \omega = f : \gamma;$$

différentiant ensuite, & éliminant $f : \gamma$, j'aurai $0 = \ldots\ldots\ldots$

$$\left\{\frac{d\psi}{dx}\frac{d\gamma}{dz} - \frac{d\psi}{dz}\frac{d\gamma}{dx} - \lambda\frac{d\gamma}{dz}\frac{d\omega}{dx}\phi' : \omega + \lambda\frac{d\gamma}{dx}\frac{d\omega}{dz}\phi' : \omega - \frac{d\gamma}{dz}\frac{d\lambda}{dx}\phi : \omega + \frac{d\gamma}{dx}\frac{d\lambda}{dz}\phi : \omega\right\}$$

$$- \left\{\frac{d\psi}{dy}\frac{d\gamma}{dz} - \frac{d\psi}{dz}\frac{d\gamma}{dy} - \lambda\frac{d\gamma}{dz}\frac{d\omega}{dy}\phi' : \omega + \lambda\frac{d\gamma}{dy}\frac{d\omega}{dz}\phi' : \omega - \frac{d\gamma}{dz}\frac{d\lambda}{dy}\phi : \omega + \frac{d\gamma}{dy}\frac{d\lambda}{dz}\phi : \omega\right\}$$

$$+ \left\{\frac{d\psi}{dx}\frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\psi}{dy}\frac{d\gamma}{dx} - \lambda\frac{d\gamma}{dy}\frac{d\omega}{dx}\phi' : \omega + \lambda\frac{d\gamma}{dx}\frac{d\omega}{dy}\phi' : \omega - \frac{d\gamma}{dy}\frac{d\lambda}{dx}\phi : \omega + \frac{d\gamma}{dx}\frac{d\lambda}{dy}\phi : \omega\right\}$$

Il faut maintenant que les coëfficiens de $\frac{dz}{dy}$, $\frac{dz}{dx}$ ne renferment

pas

pas de fonctions arbitraires ; donc $\frac{d\lambda}{dz} = 0$, $\frac{d7}{dz} = 0$, $\frac{d\omega}{dz} = 0$; c'est-à-dire, que $7, \lambda, \omega$ ne doivent contenir que x & y. Par-là, cette équation devient

$$-\frac{d\psi}{dz}\frac{d7}{dx}\frac{dz}{dy} + \frac{d\psi}{dz}\frac{d7}{dy}\frac{dz}{dx} + \frac{d\psi}{dx}\frac{d7}{dy} - \frac{d\psi}{dy}\frac{d7}{dx} - \lambda\frac{d7}{dy}\frac{d\omega}{dx}\phi' : \omega + \lambda\frac{d7}{dx}\frac{d\omega}{dy}\phi' : \omega - \frac{d7}{dy}\frac{d\lambda}{dx}\phi : \omega + \frac{d7}{dx}\frac{d\lambda}{dy}\phi : \omega = 0.$$

De plus, il faut qu'une des deux fonctions arbitraires disparoisse du dernier terme.

Si c'est $\phi : \omega$, on aura

$$\frac{d7}{dx}\frac{d\lambda}{dy} - \frac{d7}{dy}\frac{d\lambda}{dx} = 0 ;$$

c'est-à-dire, $\lambda = F : 7$, & $\lambda' = \mu F : 7$, $F : 7$ étant supposée une fonction quelconque, mais déterminée de 7. Il est aisé de conclure delà, que l'équation générale prendra la forme

$$\Pi = \phi : \omega + f : 7.$$

Si c'est au contraire $\phi' : \omega$ qui disparoît, on aura de même $7 = F : \omega$, & l'équation deviendra

$$\Psi' = \lambda' \phi : \omega + \mu f : \omega.$$

Il est évident qu'on peut indistinctement éliminer, de ces deux formes, l'une ou l'autre des fonctions arbitraires. Mais on doit ajouter qu'elles sont les seules susceptibles de cette double différentiation ; & même les seules de la formule générale

$$\Psi' = \lambda' \phi : \omega + \mu F : 7$$

qui puissent résulter de l'intégration d'une équation aux différences partielles du second ordre ; puisque dans toute autre supposition, le dernier terme de l'équation ci-dessus contiendra deux fonctions arbitraires.

D'autres équations n'admettent qu'une première intégrale complette. On en a vu un exemple ci-dessus (§ 43) : en voici un d'une autre espèce, que je tire de l'ouvrage de Mr. Cousin ; c'est l'équation

$$\frac{d^2 z}{dy^2} - h^2 \frac{d^2 z}{dx^2} + \frac{h}{x}\frac{dz}{dy} + \frac{h}{x^2}\frac{dz}{dx} = 0,$$

dont l'unique intégrale première complette est

$$\frac{dz}{dy} + h\frac{dz}{dx} + h\,x\,F:(x+hy) = 0$$

laquelle, intégrée de nouveau à l'ordinaire, donne

$$z = \frac{1}{4}\phi:(x+hy) - \frac{x}{2}\phi':(x+hy) + f:(x-hy).$$

On peut rapporter cette intégrale finie à la formule générale

$$\Psi = \lambda\,\phi:\omega + \mu\,\phi':\omega + \nu\,\phi'':\omega + \&c. \ldots + \varepsilon f:\gamma.$$

Et voici comme on déterminera la loi qui doit règner entre ces différentes fonctions, pour qu'une pareille formule appartienne réellement à des équations de ce genre.

J'observe dabord qu'il est toujours permis, sans en limiter par-là la généralité, de la diviser par ε, ou ce qui revient au même, de supposer ici $\varepsilon = 1$. Elle se réduira dès-lors à

$$\Psi = \lambda\,\phi:\omega + \mu\,\phi':\omega + \nu\,\phi'':\omega + \&c. \ldots\ldots + f:\gamma.$$

J'en conclus, en la différentiant à l'ordinaire successivement par x & par y, & fesant ensuite disparoitre $f':\gamma$,

$$\frac{d\gamma}{dy}\frac{d\Psi}{dx} - \frac{d\gamma}{dx}\frac{d\Psi}{dy} = \left(\frac{d\gamma}{dy}\frac{d\lambda}{dx} - \frac{d\gamma}{dx}\frac{d\lambda}{dy}\right)\phi:\omega + \left(\left[\lambda\frac{d\omega}{dx} + \frac{d\mu}{dx}\right]\frac{d\gamma}{dy} - \left[\lambda\frac{d\omega}{dy}\right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{d\mu}{dy}\right]\frac{d\gamma}{dx}\right)\phi':\omega + \left(\left[\mu\frac{d\omega}{dx} + \frac{d\nu}{dx}\right]\frac{d\gamma}{dy} - \left[\mu\frac{d\omega}{dy} + \frac{d\nu}{dy}\right]\frac{d\gamma}{dx}\right)\phi'':\omega +$$

$$\nu\left(\frac{d\omega}{dx}\frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\omega}{dy}\frac{d\gamma}{dx}\right)\phi''':\omega.$$

Je me bornerai à cette étendue, qui eſt ſuffiſante pour le but que je me propoſe ici.

Maintenant, puiſque toutes les fonctions arbitraires, contenues dans cette réſultante, doivent s'évanouir au moyen d'une ſeconde différentiation, il faut qu'elles ſe réduiſent, dès cet inſtant, à une ſeule; c'eſt-à-dire, que tous leurs coëfficiens deviennent zéro, excepté un ſeul, qu'on verra facilement être celui de la fonction finale, comme eſt ici celui de ϕ'''. En effet, les deux valeurs $\nu = 0$, & $\frac{d\omega}{dx}\frac{d7}{dy} - \frac{d\omega}{dy}\frac{d7}{dx} = 0$, qu'on concluroit de ce coëfficient, ne peuvent être d'aucune utilité; la première ne ſervant qu'à annuller un des termes de la formule générale; & la ſeconde, à rendre $7 = \omega$.

On a donc, en vertu des autres coëfficiens, dabord

$$\frac{d7}{dy}\frac{d\lambda}{dx} - \frac{d7}{dx}\frac{d\lambda}{dy} = 0,$$

d'où on conclut $\lambda = f : 7$; ainſi on pourra, ſans limiter cette formule générale, la diviſer encore par λ ($= f : 7$), ou ce qui eſt la même choſe, y faire $\lambda = 1$. Subſtituant enſuite cette valeur de λ dans le coëfficient de ϕ', il en reſultera

$$\left(\frac{d\omega}{dx} + \frac{d\mu}{dx}\right)\frac{d7}{dy} - \left(\frac{d\omega}{dy} + \frac{d\mu}{dy}\right)\frac{d7}{dx} = 0,$$

dont l'intégrale eſt évidemment

$$\omega + \mu = F : 7, \text{ d'où } \mu = F : 7 - \omega.$$

On connoît donc λ & μ; & on parviendra de même à déterminer les autres fonctions qui conſtituent la formule générale.

Pour avoir ν, par exemple, on ſubſtituera à μ, dans le coëfficient de ϕ'', ſa valeur que nous venons de trouver; & ayant

égalé ce coëfficient à zéro, on aura, pour déterminer μ, l'équation. . . . . . (k)

$$(F:\eta-\omega)\left(\frac{d\omega}{dx}\frac{d\eta}{dy}-\frac{d\omega}{dy}\frac{d\eta}{dx}\right)+\left(\frac{dv}{dx}\frac{d\eta}{dy}-\frac{dv}{dy}\frac{d\eta}{dx}\right)=0.$$

Cette équation étant trop compliquée pour en faifir l'intégrale à la vue, comme nous avons fait pour la valeur de μ, il faut commencer par chercher une méthode d'intégration, propre à ce nouveau genre d'équations.

Soit donc $M = F:N$, leur intégrale générale; M & N renfermant, d'une manière quelconque, un certain nombre de lettres, α, β, γ, &c. dont chacune exprime une fonction de x & y, & eft par conféquent différentiable par ces deux variables; & foit de plus

$$dM = A\,d\alpha + B\,d\beta + G\,d\gamma + \&c.$$
$$dN = a\,d\alpha + b\,d\beta + g\,d\gamma + \&c.$$

Je me bornerai aux trois lettres α, β, γ; & on pourra, au befoin, étendre cette folution à tel nombre qu'on voudra, avec la différence cependant que, lorfque ce nombre excède trois, au lieu d'une feule réfultante Æ (*voyez ci-après*), on en trouvera autant que ce nombre admet de combinaifons trois à trois. On verra dans le chapitre fixième de ce mémoire la raifon d'un pareil réfultat, & la manière d'intégrer ce fyftême d'équations fimultanées. Différentiant donc l'équation $M = F:N$ partiellement par x & y, on a, comme on a vu ci-deffus,

$$\frac{dM}{dx}\frac{dN}{dy}-\frac{dM}{dy}\frac{dN}{dx}=0.$$

C'eft-à-dire, en fefant

$$\frac{dM}{dx} = A\frac{d\alpha}{dx} + B\frac{d\beta}{dx} + G\frac{d\gamma}{dx} + \&c.$$

$$\frac{dM}{dy} = A\frac{d\alpha}{dy} + B\frac{d\beta}{dy} + G\frac{d\gamma}{dy} + \&c.$$

$$\frac{dN}{dx} = a\frac{d\alpha}{dx} + b\frac{d\beta}{dx} + g\frac{d\gamma}{dx} + \&c.$$

$$\frac{dN}{dy} = a\frac{d\alpha}{dy} + b\frac{d\beta}{dy} + g\frac{d\gamma}{dy} + \&c.,$$

$$(aB - Ab)\left(\frac{d\alpha}{dy}\frac{d\beta}{dx} - \frac{d\alpha}{dx}\frac{d\beta}{dy}\right) + (aG - Ag)\left(\frac{d\alpha}{dy}\frac{d\gamma}{dx} - \frac{d\alpha}{dx}\frac{d\gamma}{dy}\right)$$
$$+ (gB - Gb)\left(\frac{d\beta}{dx}\frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dy}\frac{d\gamma}{dx}\right) = 0$$

qui ſera la formule générale des équations en queſtion ; & je repréſenterai pareillement toute propoſée de ce genre, par

$$S\left(\frac{d\alpha}{dy}\frac{d\beta}{dx} - \frac{d\alpha}{dx}\frac{d\beta}{dy}\right) + T\left(\frac{d\alpha}{dy}\frac{d\gamma}{dx} - \frac{d\alpha}{dx}\frac{d\gamma}{dy}\right) + V\left(\frac{d\beta}{dx}\frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dy}\frac{d\gamma}{dx}\right) = 0.$$

Comparons maintenant cette propoſée, après l'avoir multipliée par un facteur indéterminé m, terme à terme avec la formule générale : nous aurons les trois équations

$$aB - Ab = mS,\ aG - Ag = mT,\ gB - Gb = mV;$$

d'où multipliant la première par G, la ſeconde par $-B$, & la troiſième par A, & prenant la ſomme de ces trois produits, il réſultera

$$GS - BT + AV = 0$$

(en multipliant par g, $-b$, & a, on auroit eu de même, $gS - bT + aV = 0$). Or, $A = \frac{dM}{d\alpha}$, $B = \frac{dM}{d\beta}$, $G = \frac{dM}{d\gamma}$; donc la valeur de M eſt donnée par l'équation aux différences partielles à quatre variables

$$V\frac{dM}{d\alpha} - T\frac{dM}{d\beta} + S\frac{dM}{d\gamma} = 0,$$

dont l'intégrale eſt de la forme

$$M = \Phi : (\Delta, \Xi).$$

Et comme N eſt donnée par la même équation, on en conclura, pour l'expreſſion $M = F : N$, $\Delta = F : \Xi$.

Appliquons maintenant cette ſolution à l'équation k ci-deſſus. En y transformant τ en α, ω en β, & ν en γ, elle devient

$$(F : \alpha - \beta)\left(\frac{d\beta}{dx}\frac{dx}{dy} - \frac{d\beta}{dy}\frac{d\alpha}{dx}\right) + \left(\frac{dy}{dx}\frac{d\alpha}{dy} - \frac{dy}{dy}\frac{d\alpha}{dx}\right) = 0.$$

Ainſi $S = F : \alpha - \beta$, $T = 1$, $V = 0$, & l'équation à réſoudre eſt

$$(F : \alpha - \beta)\frac{dM}{d\gamma} - \frac{dM}{d\beta} = 0,$$

dont l'intégrale eſt

$$M = \Phi : (\beta F : \alpha - \tfrac{1}{2}\beta^2 + \gamma, \alpha).$$

Remettant donc, pour α, β, & γ, leurs valeurs, on aura

$$\omega F : \tau - \tfrac{1}{2}\omega^2 + \nu = F : \tau, \text{ d'où}$$

$$\nu = F : \tau - \omega F : \tau + \tfrac{1}{2}\omega^2.$$

En conſidérant ce ſecond genre d'équations, qui n'admet qu'une ſeule intégrale première complette, il eſt aſſez naturel de ſoupçonner qu'une intégrale finie de la forme

$\Psi = \lambda\phi : \omega + \mu\phi' : \omega + \nu\phi'' : \omega +$ &c. . . . . $+ \beta f : \tau + \gamma f' : \tau + \varepsilon f'' : \tau +$ &c.

pourra produire auſſi une équation du ſecond ordre, mais qui ne ſera point ſuſceptible d'une intégrale de l'ordre immédiatement inférieur. Je me propoſe d'examiner dans la ſuite cette nouvelle claſſe d'équations, ſi la longueur des calculs ne me rebute point.

CHAPITRE CINQUIEME.

Des équations du troisième ordre & des ordres supérieurs, entre trois variables.

50. L'équation la plus générale de cet ordre étant

$$\alpha \frac{d^3z}{dy^3} + \beta \frac{d^3z}{dy^2dx} + \gamma \frac{d^3z}{dydx^2} + \delta \frac{d^3z}{dx^3} + \varepsilon \frac{d^2z}{dy^2} + \zeta \frac{d^2z}{dxdy} + \eta \frac{d^2z}{dx^2} + \vartheta \frac{dz}{dy} + \lambda \frac{dz}{dx} + \mu = 0,$$

je repréfenterai fon intégrale première complette par

$$M \frac{d^2z}{dy^2} + N \frac{d^2z}{dxdy} + P \frac{d^2z}{dx^2} + Q \frac{dz}{dy} + R \frac{dz}{dx} + S = F:V.$$

Différentiant enfuite cette dernière par x, & puis par y, en fuppofant que toutes les lettres M, N, P, Q, &c. contiennent les trois variables z, x, y; & éliminant la fonction arbitraire, on parviendra à une équation aux différences partielles du troifième ordre, d'où, fefant difparoître, comme ci-deffus, tous les termes où ces différences font multipliées entr'elles, ou élevées à quelque puiffance, on conclura que la lettre S peut feule contenir z. Par-là, cette équation fe réduit à

$$M \frac{dV}{dx} \frac{d^3z}{dy^3} + \left(N \frac{dV}{dx} - M \frac{dV}{dy} \right) \frac{d^3z}{dy^2dx} + \left(P \frac{dV}{dx} - N \frac{dV}{dy} \right) \frac{d^3z}{dydx^2} - P \frac{dV}{dy} \frac{d^3z}{dx^3} + \left(Q \frac{dV}{dx} + \frac{dM}{dy} \frac{dV}{dx} - \frac{dM}{dx} \frac{dV}{dy} \right) \frac{d^2z}{dy^2} + \left(R \frac{dV}{dx} - Q \frac{dV}{dy} + \frac{dN}{dy} \frac{dV}{dx} - \frac{dN}{dx} \frac{dV}{dy} \right) \frac{d^2z}{dydx} + \left(\frac{dP}{dy} \frac{dV}{dx} - \frac{dP}{dx} \frac{dV}{dy} - R \frac{dV}{dy} \right) \frac{d^2z}{dx^2} + \left(\frac{dS}{dz} \frac{dV}{dx} + \frac{dQ}{dy} \frac{dV}{dx} - \frac{dQ}{dx} \frac{dV}{dy} \right) \frac{dz}{dy} + \left(\frac{dR}{dy} \frac{dV}{dx} - \frac{dS}{dz} \frac{dV}{dy} - \frac{dR}{dx} \frac{dV}{dy} \right) \frac{dz}{dx} + \left(\frac{dS}{dy} \frac{dV}{dx} - \frac{dS}{dx} \frac{dV}{dy} \right) = 0,$$

& en la comparant, terme à terme, avec la formule générale, on aura

$$M\frac{dV}{dx}=\alpha,\ N\frac{dV}{dx}-M\frac{dV}{dy}=\epsilon,\ P\frac{dV}{dx}-N\frac{dV}{dy}=\gamma,\ P\frac{dV}{dy}=-\delta,$$
$$Q\frac{dV}{dx}+\frac{dM}{dy}\frac{dV}{dx}-\frac{dM}{dx}\frac{dV}{dy}=\varepsilon,\ R\frac{dV}{dx}-Q\frac{dV}{dy}+\frac{dN}{dy}\frac{dV}{dx}-\frac{dN}{dx}\frac{dV}{dy}=\zeta,$$
$$\frac{dP}{dy}\frac{dV}{dx}-\frac{dP}{dx}\frac{dV}{dy}-R\frac{dV}{dy}=\eta,\ \frac{dS}{dz}\frac{dV}{dx}+\frac{dQ}{dy}\frac{dV}{dx}-\frac{dQ}{dx}\frac{dV}{dy}=\vartheta,\ \frac{dR}{dy}\frac{dV}{dx}$$
$$-\frac{dR}{dx}\frac{dV}{dy}-\frac{dS}{dz}\frac{dV}{dy}=\lambda,\ \&\ \frac{dS}{dy}\frac{dV}{dx}-\frac{dS}{dx}\frac{dV}{dy}=\mu.$$

La première & la quatrième de ces équations donnent $\frac{dV}{dx}=\frac{\alpha}{M}$, $\frac{dV}{dy}=-\frac{\delta}{P}$, & ſubſtituant ces valeurs dans la ſeconde & la troiſième, on aura

$$\delta M^2+\alpha PN=\epsilon PM,\ \&\ \delta MN+\alpha P^2=\gamma PM;$$

d'où éliminant N,

$$\alpha^2P^3-\alpha\gamma MP^2+\epsilon\delta M^2P-\delta^2M^3=o,\ \text{ou}\ldots\ (\mathrm{L})$$
$$\alpha^2\frac{P^3}{M^3}-\alpha\gamma\frac{P^2}{M^2}+\epsilon\delta\frac{P}{M}-\delta^2=o$$

qui eſt une équation ordinaire du troiſième degré, dont l'inconnue eſt $\frac{P}{M}$. Repréſentons par σ, une quelconque des racines de cette équation, & on aura $P=\sigma M$; donc, à cauſe de

$$N=\frac{\epsilon PM-\delta M^2}{\alpha P}=\frac{\gamma PM-\alpha P^2}{\delta M},$$

qui ſont les deux valeurs qui ont ſervi à éliminer N,

$$N=\frac{\epsilon\sigma-\delta}{\alpha\sigma}M,\ \text{ou}\ N=\sigma' M.$$

Ainſi, dès qu'on connoîtra M, on aura N & P. Pour y parvenir, je mets, dans les cinquième, ſixième & ſeptième équations, pour

pour $\frac{dV}{dy}$, $\frac{dV}{dx}$, leurs valeurs ; & ensuite, pour N & P, les leurs en M, en supposant $d\sigma = A\,dx + B\,dy$; $d\sigma' = A'\,dx + B'dy$ (car il est évident que σ & σ' ne contenant ni ϑ, ni λ, ni μ, ne peuvent renfermer ζ ; puisque ϑ, λ, μ renferment seules S), & il en résulte les trois équations. . . . . (K)

$$\alpha Q \sigma + \alpha \sigma \frac{dM}{dy} + \delta \frac{dM}{dx} = \varepsilon \sigma M,$$

$$\alpha R \sigma + \delta Q + \alpha \sigma \sigma' \frac{dM}{dy} + \alpha \sigma M B' + \delta \sigma' \frac{dM}{dx} + \delta M A' = \zeta \sigma M,$$

$$\alpha \sigma^2 \frac{dM}{dy} + \alpha \sigma M B + \delta \sigma \frac{dM}{dx} + \delta M A + \delta R = \eta \sigma M;$$

d'où éliminant Q & R, il viendra, pour déterminer M, l'équation suivante. . . . . (R)

$$(\alpha^2 \sigma^2 \sigma' \delta - \alpha^3 \sigma^4 - \alpha \sigma \delta^2) \frac{dM}{dy} + (\alpha \sigma \sigma' \delta^2 - \alpha^2 \sigma^3 \delta - \delta^3) \frac{dM}{dx} =$$
$$(\alpha \sigma^2 \delta \zeta - \alpha \sigma \delta^2 A' - \alpha^2 \sigma^2 \delta B' - \varepsilon \sigma \delta^2 + \alpha^2 \sigma^2 \delta A + \alpha^3 \sigma^3 B -$$
$$\alpha^2 \eta \sigma^3) M.$$

On connoît donc M, N & P ; & on aura facilement V, au moyen des deux équations $\frac{dV}{dx} = \frac{\alpha}{M}$, $\frac{dV}{dy} = -\frac{\delta}{P}$, qui donnent

$$dV = \frac{\alpha}{M}\,dx - \frac{\delta}{P}\,dy.$$

Connoissant V, on a S par la dernière équation

$$\frac{dV}{dx}\frac{dS}{dy} - \frac{dV}{dy}\frac{dS}{dx} = \mu,$$

en observant que S peut contenir ζ. On aura aussi Q & R au moyen de la première & de la troisième des équations K. Il reste encore la huitième & la neuvième ; l'une servira à déterminer la fonction arbitraire qui entre dans la valeur de S ; & l'autre sera

une équation de condition, qui doit avoir lieu pour que la propofée ait une intégrale complette de l'ordre immédiatement inférieur. On pourra faire ici des réflexions analogues à celles qu'ont fournies les équations du fecond ordre, & je me borne à éclaircir ceci par un exemple.

51. Soit

$$(y^3 - x^2y)\frac{d^3z}{dy^3} - (xy^2 - x^3)\frac{d^3z}{dy^2dx} - (y^3 - x^2y)\frac{d^3z}{dydx^2} + (xy^2 - x^3)\frac{d^3z}{dx^3} - 2(x^2 + y^2)\frac{d^2z}{dy^2} + 2(x^2 + y^2)\frac{d^2z}{dx^2} = 0.$$

L'ayant multipliée par l'indéterminée ψ, j'ai

$\alpha = \psi(y^3 - x^2y)$, $\beta = -\psi(xy^2 - x^3)$, $\gamma = -\psi(y^3 - x^2y)$, $\delta = \psi(xy^2 - x^3)$, $\varepsilon = -2\psi(x^2 + y^2)$, $\zeta = 0$, $\eta = 2\psi(x^2 + y^2)$, $\vartheta = \lambda = \mu = 0$.

Subftituant ces valeurs dans l'équation

$$\alpha^2\frac{P^3}{M^3} - \alpha\gamma\frac{P^2}{M^2} + \beta\delta\frac{P}{M} - \delta^2 = 0,$$

il vient

$$y^2\frac{P^3}{M^3} + y^2\frac{P^2}{M^2} - x^2\frac{P}{M} - x^2 = 0,$$

dont les racines font

$$P + M = 0,\ P - \frac{x}{y}M = 0,\ P + \frac{x}{y}M = 0.$$

Si on employe la première, on a $\sigma = -1$, $N = 0$, & $\sigma' = 0$; donc $A = B = A' = B' = 0$. Ces valeurs changent l'équation R en

$$(y^3 - x^2y)\frac{dM}{dy} - (xy^2 - x^3)\frac{dM}{dx} + 2(x^2 + y^2)M = 0,$$

d'où on tire

$$M = \frac{1}{y^2 - x^2}\,\phi : xy\text{, ou feulement } M = \frac{1}{y^2 - x^2};$$

donc $P = \frac{-1}{y^2 - x^2}$. On a auffi

$dV = \psi\,(y^2 - x^2)^2\,(y dx + x dy)$; d'où $\psi = \frac{1}{(y^2 - x^2)^2}$, &
$V = xy$.

Il fuit delà, par la dernière équation,

$$y\frac{dS}{dy} - x\frac{dS}{dx} = 0, \text{ \& } S = F:(z, xy);$$

& comme $Q = 0$, $R = 0$, on a, pour déterminer la fonction arbitraire, $\frac{dS}{dz} = 0$. Donc S ne contient pas z, & eft en général $S = F:xy$. Maintenant, il refte à voir fi l'autre équation, qui contient $\frac{dR}{dx}, \frac{dQ}{dy}$, a effectivement lieu; & comme elle fe réduit à $0 = 0$, on a

$M = \frac{1}{y^2 - x^2}$, $N = 0$, $P = \frac{-1}{y^2 - x^2}$, $Q = 0$, $R = 0$, $S = F:xy$,
& $V = xy$;

ce qui donne, pour intégrale première complette,

$$\frac{d^2z}{dy^2} - \frac{d^2z}{dx^2} = (y^2 - x^2)\,F:xy.$$

52. Lorfque les trois différentes valeurs de σ donneront, ainfi qu'il arrive dans cet exemple, trois pareilles intégrales, on parviendra, comme on fait, par leur moyen, à l'intégrale finie; mais on y réuffira également, & auffi facilement, par l'intégration fucceffive. On a déjà ici

$$\frac{d^2z}{dy^2} - \frac{d^2z}{dx^2} = (y^2 - x^2)\,F:xy.$$

Pour en avoir l'intégrale de l'ordre inférieur, je compare cette

équation avec la formule (§ 38), & je trouve
$\alpha = \psi$, $\beta = 0$, $\gamma = -\psi$, $\delta = 0$, $\varepsilon = 0$, $\varpi = \psi\,(y^2 - x^2)$
$F:xy$; donc $N = \pm M$, & $\sigma = \pm 1$.
La valeur positive donne, pour déterminer M,

$$\frac{dM}{dy} - \frac{dM}{dx} = 0, \text{ d'où } M = F:(y + x) = 1, \text{ donc } N = 1.$$

On trouvera ensuite

$$Q = x + y, \;\&\; P = -(x + y)\,F:xy + \phi:(x + y).$$

Ainsi on a, pour intégrale première complette,

$$\frac{dz}{dy} + \frac{dz}{dx} - (x + y)\,F:xy + \phi:(x + y) = 0.$$

On en trouvera une seconde pareille, au moyen de l'autre valeur $\sigma = -1$; d'où

$$M = F:(y - x) = 1,\; N = 1,\; Q = x - y, \;\&$$
$$P = (y - x)\,F:xy + f:(y - x).$$

Cette seconde intégrale première complette est donc

$$\frac{dz}{dy} - \frac{dz}{dx} + (y - x)\,F:xy + f:(y - x) = 0.$$

On peut écrire ainsi ces deux intégrales,

$$\frac{dz}{dy} + \frac{dz}{dx} - (x + y)\,F':xy + \phi':(x + y) = 0,$$
$$\frac{dz}{dy} - \frac{dz}{dx} + (y - x)\,F':xy + f':(y - x) = 0;$$

d'où on tire, en ajoutant & soustrayant successivement,

$$2\frac{dz}{dy} - 2x\,F':xy + \phi':(y + x) + f':(y - x) = 0,$$
$$2\frac{dz}{dx} - 2y\,F':xy + \phi':(y + x) - f':(y - x) = 0.$$

Multipliant ensuite la première par dy, & la seconde par dx, & les additionnant, on aura

$$2dz - 2\,(xdy + ydx)\,F':xy + (dy + dx)\,\phi':(y + x) + (dy - dx)\,f':(y - x) = 0$$

dont l'intégrale eſt, ou peut ſe réduire à

$$z = F:xy + \phi:(y + x) + f:(y - x),$$

qui eſt l'intégrale finie cherchée de la propoſée du troiſième ordre.

53. Le premier membre de l'équation R (§ 50) étant diviſible par $\alpha\sigma\sigma'\delta - \alpha^2\sigma^3 - \delta^2$, ou à cauſe de $\sigma' = \frac{\beta\sigma - \delta}{\alpha\sigma}$, par $\beta\sigma\delta - 2\delta^2 - \alpha^2\sigma^3$, il ſe réduira à zéro en même tems que cette formule. Ainſi, dans le cas où cette derniere ſuppoſition annulleroit auſſi le ſecond membre de cette équation, elle deviendroit $0 = 0$, comme dans les équations du ſecond ordre.

Il faut dabord examiner quelles ſeront dans ce cas là les valeurs de $\sigma = \frac{P}{M}$, ou en général ce que deviendra l'équation

$$\alpha^2\sigma^3 - \alpha\gamma\sigma^2 + \beta\delta\sigma - \delta^2 = 0 \quad (\S\ 50\ \textit{équat.}\ L)$$

qui contient ces valeurs ; c'eſt-à-dire, qu'il faut chercher quel doit être le rapport des coëfficiens α^2, $-\alpha\gamma$, $\beta\delta$, $-\delta^2$ entr'eux, pour que les deux équations

$$\alpha^2\sigma^3 - \alpha\gamma\sigma^2 + \beta\delta\sigma - \delta^2 = 0,$$
$$\alpha^2\sigma^3 - \beta\delta\sigma + 2\delta^2 = 0,$$

ayent lieu en même tems. Pour cela j'éliminerai σ, en me ſervant de la méthode connue de Bezout, ce qui me donnera pour réſultat,

$$4\,(3\alpha\gamma - \beta^2)\,(3\beta\delta - \gamma^2) = (9\alpha\delta - \beta\gamma)^2;$$

& comme cette équation, étant rationnelle, contient toutes les racines qu'elle peut contenir, ſans procéder à un développement ultérieur, je m'arrêterai à cette forme qui a l'avantage de donner de la manière la plus commode, toutes les conditions

favoir, $9\alpha\delta - \beta\gamma = 0$; & l'une des deux $3\alpha\gamma - \beta^2 = 0$, ou $3\beta\delta - \gamma^2 = 0$, à volonté; puifque, de la combinaifon de $9\alpha\delta - \beta\gamma = 0$ avec l'une, réfulte l'autre. On tire delà,

$$\beta = \sqrt{3\alpha\gamma}, \ \& \ \delta = \frac{\gamma^2}{3\sqrt{(3\alpha\gamma)}},$$

qui fubftituées dans

$$\alpha^2\sigma^3 - \alpha\gamma\sigma^2 + \beta\delta\sigma - \delta^2 = 0,$$

la changent en

$$\alpha^2\left(\sigma^3 - \frac{\gamma}{\alpha}\sigma^2 + \frac{\gamma^2}{3\alpha^2}\sigma - \frac{\gamma^3}{27\alpha^3}\right) = \alpha^2\left(\sigma - \frac{\gamma}{3\alpha}\right)^3 = 0.$$

Ainfi les trois racines font devenues égales, & fe confondent dans celle $\sigma - \frac{\gamma}{3\alpha} = 0$; ce qui eft parfaitement analogue à ce qui a lieu dans le fecond ordre, où cette racine unique étoit $\sigma - \frac{\beta}{2\alpha} = 0$.

Il me refte à déterminer les conditions néceffaires, pour que le fecond membre de R foit divifible par cette même quantité $\beta\sigma\delta - 2\delta^2 - \alpha^2\sigma^3$. Dans le fecond ordre, il a été facile de les déterminer, à la première vue; ici, où elles font plus compliquées, il faut chercher une méthode; & voici comme on raifonnera.

Ce fecond membre, étant divifible par cette quantité, deviendra zéro en même tems qu'elle. Suppofant donc l'un & l'autre $= 0$, on aura à combiner enfemble les deux équations fuivantes, ordonnées par α ou par δ, par exemple par δ,

$$(\alpha A' + \varepsilon)\delta^2 + (\alpha^2\sigma B' - \zeta\alpha\sigma - \alpha^2\sigma A)\delta + \alpha^2\eta\sigma^2 - \alpha^3\sigma^2 B = 0,$$

$$2\delta^2 - \beta\sigma\delta + \alpha^2\sigma^3 = 0.$$

Je répréſenterai la première par

$$M\delta^2 + N\delta + R = 0,$$

& éliminant, par la même méthode que ci-deſſus, la lettre δ, il vient pour réſultat,

$$[2R - \alpha^2\sigma^3 M]^2 = -[2N + \beta M\sigma][R\beta\sigma + \alpha^2\sigma^3 N],$$

d'où je conclus immédiatement

$$2R - \alpha^2\sigma^3 M = 0, \text{ \&}$$

$$2N + \beta M\sigma = 0, \text{ ou } R\beta\sigma + \alpha^2\sigma^3 N = 0.$$

La première donne $2[\eta - \alpha B] - \sigma[\alpha A' + \varepsilon] = 0$;
la ſeconde. . . . . . $2\alpha[\alpha B' - \zeta - \alpha A] + \beta[\alpha A' + \varepsilon] = 0$;
& la troiſième. . . . $\sigma\alpha[\alpha B' - \zeta - \alpha A] + \beta[\eta - \alpha B] = 0$;
ainſi, comme la première & l'une des deux ſuivantes ſuffiſent, on aura, pour le cas où le ſecond membre de R, & conſéquemment toute l'équation R eſt diviſible par $2\delta^2 - \beta\sigma\delta + \alpha^2\sigma^3$, les deux équations de condition

$$2\alpha(\alpha B' - \zeta - \alpha A) + \beta(\alpha A' + \varepsilon) = 0,$$

$$2(\eta - \alpha B) - \sigma(\alpha A' + \varepsilon) = 0.$$

Si on veut avoir, comme dans les équations du ſecond ordre, la forme que prend alors le ſecond membre de R, que je nommerai P, il ne s'agit que de combiner l'équation

$$P - K[\beta\sigma\delta - 2\delta^2 - \alpha^2\sigma^3] = 0$$

(K étant une inconnue à déterminer) avec les deux précédentes. Prenant donc, dans ces deux, les valeurs de ζ & η, & les ſubſtituant dans P, on trouvera

$$K = \frac{P}{\beta\sigma\delta - 2\delta^2 - \alpha^2\sigma^3} = \frac{\sigma(\alpha A' + \varepsilon)}{2} = \eta - \alpha B. \text{ Ainſi}$$

$$P = (\eta - \alpha B)(\beta\sigma\delta - 2\delta^2 - \alpha^2\sigma^3),$$

& comme, en vertu des deux autres équations,

$$\nu - \alpha B = \frac{\sigma}{2}\left(\alpha A' + \varepsilon\right) = \frac{\sigma \alpha}{\beta}\left(\zeta + \alpha A - \alpha B'\right),$$

on pourra l'écrire ainsi,

$$\frac{\sigma}{2}\left\{\beta\sigma\delta\left(\frac{2\alpha\zeta + 2\alpha^2 A - 2\alpha^2 B'}{\beta}\right) - 2\delta^2\left(\alpha A' + \varepsilon\right) - \alpha^2\sigma^3\left(\frac{2\nu - 2\alpha B}{\sigma}\right)\right\} M$$

qui, dans la supposition en question, est évidemment divisible par $\beta\sigma\delta - 2\delta^2 - \alpha^2\sigma^3$.

54. Quant à la méthode à suivre pour intégrer cette espèce d'équation, elle est parfaitement analogue à celle que j'ai donnée pour le second ordre. En effet, ayant mis dans la dernière équation fondamentale (§ 50.), pour $\frac{dV}{dx}, \frac{dV}{dy}$, leurs valeurs, on aura

$$\frac{\alpha}{M}\frac{dS}{dy} + \frac{\delta}{P}\frac{dS}{dx} = \mu$$

qui, à cause de $P = \sigma M$, & de $\sigma = \frac{\gamma}{3\alpha}$, devient

$$\alpha\gamma\frac{dS}{dy} + 3\alpha\delta\frac{dS}{dx} - \gamma\mu M = 0,$$

ou, à cause de $3\beta\delta - \gamma^2 = 0$ (§ 53.),

$$\alpha\beta\frac{dS}{dy} + \alpha\gamma\frac{dS}{dx} - \beta\mu M = 0,$$

ou enfin, à cause de $3\alpha\gamma - \beta^2 = 0$ (§ 53.),

$$3\alpha\frac{dS}{dy} + \beta\frac{dS}{dx} - 3\mu M = 0.$$

Je tirerai delà, comme pour les équations du second ordre, la valeur de S, & je déterminerai M par la même considération.

55. Il me reste à faire voir que la méthode générale, que j'ai donnée dans ces deux derniers chapitres, s'applique, avec un égal succès, aux équations des ordres supérieurs. Soit donc $(N) = 0$,

$=0$, l'équation aux différences partielles la plus générale de l'ordre n; $(N-1)=\phi:W$, celle de l'ordre $n-1$; & enfin $(N')=0$, celle qui résulte, en différentiant cette dernière par x & par y, & éliminant la fonction arbitraire; équation qui est évidemment aussi de l'ordre n. L'équation $(N)=0$ contient $\frac{nn+3n+2}{2}$ termes. Celle $(N-1)=\phi:W$ en contient $\frac{nn+n}{2}$ $+1=\frac{nn+n+2}{2}$. Chacun de ces derniers présente une inconnue à déterminer; ainsi il y a $\frac{nn+n+2}{2}$ inconnues. Chaque terme de l'équation $(N)=0$ fournit une équation de comparaison terme à terme. On a donc $\frac{nn+3n+2}{2}$ équations, pour déterminer ces $\frac{nn+n+2}{2}$ inconnues; c'est-à-dire, qu'il y aura n équations plus que d'inconnues.

Remarquons maintenant que, dans l'équation générale de l'ordre n, il se trouve $n+1$ termes de cet ordre. Ainsi, dans l'équation $(N')=0$, les termes de l'ordre n fourniront $n+1$ équations. Nommons, dans l'équation $(N-1)=\phi:W$, M le coëfficient de $\frac{d^{n-1}z}{dy^{n-1}}$; M', celui de $\frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}}$; & N, P, Q &c., tous les autres coëfficiens intermédiaires. Soit aussi, dans l'équation $(N)=0$, α & α', ceux des termes $\frac{d^n z}{dy^n}$, $\frac{d^n z}{dx^n}$; & β, γ, δ, &c., ceux des termes intermédiaires. On aura, en comparant terme à terme les deux équations $(N)=0$, & $(N')=0$, une suite d'équations

$M\frac{dW}{dx}=\alpha$, $N\frac{dW}{dx}-M\frac{dW}{dy}=\epsilon$, $P\frac{dW}{dx}-N\frac{dW}{dy}=\gamma$, $Q\frac{dW}{dx}$ $-P\frac{dW}{dy}=\delta$, . . . $M'\frac{dW}{dy}=-\alpha'$,

au nombre de $n+1$. Subſtituant enſuite, dans toutes les équations intermédiaires, les valeurs de $\frac{dW}{dx}$, $\frac{dW}{dy}$ priſes des deux extrêmes, on aura $n+1-2$, ou $n-1$ équations de la forme

$$N\alpha M'+M^2\alpha'=\epsilon M'M,$$
$$P\alpha M'+N\alpha' M=\gamma M'M,$$
$$Q\alpha M'+P\alpha' M=\delta M'M,$$
&c.

Les inconnues M, N, P, Q, &c. M' de ces équations étant au nombre de n, ſi on regarde M comme connue, elles ſe réduiront à $n-1$; & on aura $n-1$ équations, pour déterminer $n-1$ inconnues, en valeur de M. Toutes les intermédiaires N, P, Q, &c. ſeront données par une équation linéaire, qui ne contiendra que M & M' ; & la dernière M', le ſera par une équation du degré n, de la forme

$$K\frac{M'^n}{M^n}+J\frac{M'^{n-1}}{M^{n-1}}+\text{\&c.}=0;$$

& ſuppoſant que $M'=\sigma M$ ſoit une des racines, on en conclura les valeurs $N=\sigma' M$; $P=\sigma'' M$; &c. : ainſi σ, σ', σ'', &c. ſont connues ; il ne s'agit que de connoître M. Pour cela, ayant mis dans les n équations qui ont pour ſecond membre les coëfficiens des termes de l'ordre $n-1$ de l'équation $(N)=0$, pour $\frac{dW}{dx}$ & $\frac{dW}{dy}$, leurs valeurs, on aura n équations qui ne contiendront, outre les quantités M, N, P. . . . M', que les coëf-

ficiens des $n-1$ termes de l'ordre $n-2$, de l'équation $(N-1) = \phi : W$. On éliminera ces $n-1$ coëfficiens ; & mettant, au lieu de N, P, Q. . . . M', leurs valeurs connues $\sigma' M$, $\sigma'' M$, $\sigma''' M$ . . . . σM, on aura, pour déterminer M, une équation aux différences partielles du premier ordre. Connoissant M, on en conclura W. On connoîtra aussi les $n-1$ coëfficiens qu'on vient d'éliminer. De plus, on a $n-1$ équations, pour déterminer les $n-2$ coëfficiens des termes de l'ordre $n-3$ de l'équation $(N-1) = \phi : W$; ce qui laisse une équation de condition. Il en est de même successivement des ordres inférieurs.

Enfin, le terme sans différence particelle V sera donné par la dernière équation, en se souvenant qu'il peut renfermer z ; & sa fonction arbitraire se déterminera par une des deux équations qui renferment $\frac{dV}{dz}$, & l'autre sera de condition.

CHAPITRE SIXIEME.

Des équations plus compliquées du second ordre, qui admettent une intégration de l'ordre immédiatement inférieur.

56. JUsqu'ici je n'ai considéré que les équations, dont les coëfficiens ne contiennent aucune des différences partielles ; c'est-à-dire, qui pour le second ordre par exemple, sont de la forme

$$\alpha \frac{d^2 z}{dy^2} + \epsilon \frac{d^2 z}{dxdy} + \gamma \frac{d^2 z}{dx^2} + \delta \frac{dz}{dy} + \varepsilon \frac{dz}{dx} + \varpi = 0,$$

α, ϵ, γ, &c. étant fonctions de z, x, y, sans aucune des expressions $\frac{dz}{dy}$, $\frac{dz}{dx}$. Cette restriction dans la nature des coëfficiens

permet de divifer l'équation entière en termes, dont chacun eft diftingué par la différence partielle unique & linéaire qui le caractérife : & il eft facile de comparer une pareille équation, terme à terme, avec une formule générale de même ordre, & d'en déduire par ce moyen l'intégrale. Il n'en eft pas de même, lorfque les coëfficiens contiennent des différences partielles ; on ne peut alors diftinguer que les termes affectés des différences de l'ordre le plus élevé ; tous les autres fe confondant entr'eux, par le mélange des différences partielles. C'eft de ce genre plus compliqué que je vais m'occuper dans ce chapitre.

Soient Ψ & Π deux fonctions quelconques déterminées de $z, x, y, p \left(=\frac{dz}{dx}\right), q\left(=\frac{dz}{dy}\right)$, &c. & l'équation $\Psi = F : \Pi$. On en tire à l'ordinaire

$$\frac{d\Psi}{dx}\frac{d\Pi}{dy} - \frac{d\Psi}{dy}\frac{d\Pi}{dx} = 0.$$

Je fuppofe dabord que cette équation foit du fecond ordre, & que

$$d\Psi = A\,dz + B\,dx + C\,dy + E\,dp + G\,dq,$$
$$d\Pi = M\,dz + N\,dx + P\,dy + Q\,dp + R\,dq,$$

il réfultera de cette fubftitution, l'équation générale

$$(ER - GQ)\left(\frac{d^2z}{dx^2}\frac{d^2z}{dy^2} - \frac{d^2z^2}{dxdy}\right) + (EM - AQ)\frac{dz}{dy}\frac{d^2z}{dx^2} - (EM - AQ)\frac{dz}{dx}\frac{d^2z}{dxdy} + (GM - AR)\frac{dz}{dy}\frac{d^2z}{dxdy} - (GM - AR)\frac{dz}{dx}\frac{d^2z}{dy^2} + (PE - CQ)\frac{d^2z}{dx^2} + (PG - CR + BQ - EN)\frac{d^2z}{dxdy} + (BR - GN)\frac{d^2z}{dy^2} + (BM - AN)\frac{dz}{dy} + (AP - CM)\frac{dz}{dx} + BP - CN = 0.$$

Toutes les lettres A, B, C, &c. . . . M, P, Q, &c. pouvant contenir p; q; c'eſt-à dire, $\frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy}$, il ſera impoſſible de reconnoître dans une équation donnée ces différens termes, à l'exception de ceux qui contiennent des différences partielles du ſecond ordre. J'écrirai donc cette équation de la manière ſuivante. . . . . (A)

$$(ER - GQ)\left(\frac{d^2z}{dx^2}\frac{d^2z}{dy^2} - \frac{d^2z^2}{dxdy}\right) + \{(EM - AQ)q + PE - CQ\}\frac{d^2z}{dx^2} + \{(GM - AR)q - (EM - AQ)p + PG - CR + BQ - EN\}\frac{d^2z}{dxdy} + \{(AR - GM)p + BR - GN\}\frac{d^2z}{dy^2} + (BM - AN)q + (AP - CM)p + BP - CN = 0;$$

& je repréſenterai par

$$\epsilon\left(\frac{d^2z}{dx^2}\frac{d^2z}{dy^2} - \frac{d^2z^2}{dxdy}\right) + \gamma\frac{d^2z}{dx^2} + \zeta\frac{d^2z}{dxdy} + \eta\frac{d^2z}{dy^2} + \vartheta = 0,$$

toute équation propoſée, dont on demande la première intégrale complette. Je trouve, en comparant terme à terme. . . . . (G)

$$ER - GQ = \epsilon,$$
$$(EM - AQ)q + PE - CQ = \gamma,$$
$$(GM - AR)q - (EM - AQ)p + PG - CR + BQ - EN = \zeta,$$
$$(AR - GM)p + BR - GN = \eta,$$
$$(BM - AN)q + (AP - CM)p + BP - CN = \vartheta;$$

& éliminant, au moyen des quatre premières équations, M, N, P, Q & R, ce qui arrive de ſoi-même dans ce cas-ci, il vient

$$\gamma G^2 - \epsilon qAG - \epsilon CG + \eta E^2 - \epsilon pAE - \epsilon BE - \zeta GE = 0,$$

ou bien. . . . . (Æ)

$$\gamma \frac{d\Psi^2}{dq} - \epsilon q \frac{d\Psi}{dz} \frac{d\Psi}{dq} - \epsilon \frac{d\Psi}{dy} \frac{d\Psi}{dq} + \eta \frac{d\Psi^2}{dp} - \epsilon p \frac{d\Psi}{dz} \frac{d\Psi}{dp} - \epsilon \frac{d\Psi}{dx} \frac{d\Psi}{dp} - \zeta \frac{d\Psi}{dq} \frac{d\Psi}{dp} = 0.$$

Nous fommes jufqu'ici fort éloignés de favoir intégrer une pareille équation ; mais en fuppofant $\epsilon = 0$, elle fe réduit à

$$\gamma G^2 + \eta E^2 - \zeta GE = 0, \text{ d'où}$$

$$\frac{G}{E} = \frac{\zeta \pm \sqrt{(\zeta^2 - 4\gamma\eta)}}{2\gamma};$$

c'eft-à-dire, que nommant λ cette valeur, on aura $\frac{d\Psi}{dq} - \lambda \frac{d\Psi}{dp} = 0$, en prenant fucceffivement pour λ les deux racines, d'où pourront réfulter deux premières intégrales complettes. De cette équation on conclut $\Psi = \phi : (s, z, x, y)$, s étant $= \int (\mu dp + \mu \lambda dq)$, & μ étant le facteur propre à rendre $dp + \lambda dq$ une différentielle exacte. Ainfi on eft sûr que p & q ne fe trouvent dans la fonction Ψ, que fous la forme s.

57. Avant d'aller plus loin, examinons à quelle efpèce d'équations cette fuppofition de $\epsilon = 0$ reftreint l'équation générale A. On en conclut $ER = GQ$, ou

$$\frac{d\Psi}{dp} \frac{d\Pi}{dq} - \frac{d\Psi}{dq} \frac{d\Pi}{dp} = 0;$$

c'eft-à-dire, qu'en ne fefant varier que p & q, $\Psi = \phi : \Pi$ par fa nature même ; ou que Ψ ne contient p & q, que fous la même forme, fous laquelle ces variables font renfermées dans Π. On eft donc affuré par-là que Ψ & Π ne contiennent p & q que fous la forme s, qui peut d'ailleurs être *fonctionnée* avec les autres variables, différemment dans l'une & dans l'autre. Au refte, on voit que cette reftriction annulle feulement les termes affectés des différences du fecond ordre multipliées entr'elles, ou élevées au

quarré; & qu'elle laiſſe, en ſon entier, la dénomination qu'on peut donner à ces équations, dans le ſens le plus étendu, d'équations du ſecond ordre & du premier degré, ſuſceptibles d'une première intégrale complette.

Toutes ces équations ſont donc telles, que ſi dans leur intégrale on met s au lieu de la fonction de p & q (y compris les autres variables z, x, y qui peuvent également en faire partie) qu'elle repréſente, cette intégrale ſera de la forme $\Psi = \phi : \Pi$, Ψ & Π étant fonctions de s, z, x, y; & s, z étant conſidérées, chacune comme une fonction de x & y. Soit

$$d\Psi = \mathrm{a}ds + \mathrm{b}dz + \mathrm{e}dx + \mathrm{f}dy,$$

$$d\Pi = \mathrm{m}ds + \mathrm{n}dz + \mathrm{r}dx + \mathrm{t}dy;$$

on en conclura l'équation générale. . . . . (B)

$$(\mathrm{bm} - \mathrm{an}) \left(\frac{dz}{dx}\frac{ds}{dy} - \frac{dz}{dy}\frac{ds}{dx}\right) + (\mathrm{at} - \mathrm{fm}) \frac{ds}{dx} + (\mathrm{em} - \mathrm{ar}) \frac{ds}{dy} + (\mathrm{bt} - \mathrm{fn}) \frac{dz}{dx} + (\mathrm{en} - \mathrm{br}) \frac{dz}{dy} + \mathrm{et} - \mathrm{fr} = 0.$$

58. Nous voici parvenus à un genre d'équations qui exige une nouvelle méthode d'intégration. Je repréſenterai toute pareille équation par la formule générale. . . . . (C)

$$\alpha \frac{dz}{dx}\frac{ds}{dy} - \alpha \frac{dz}{dy}\frac{ds}{dx} + \varepsilon \frac{ds}{dx} + \rho \frac{ds}{dy} + \xi \frac{dz}{dx} + \chi \frac{dz}{dy} + \omega = 0,$$

tous ces coëfficiens ne pouvant renfermer que s, z, x, y; & j'aurai, en comparant terme à terme avec celle B,

$\mathrm{bm} - \mathrm{an} = \alpha$, $\mathrm{at} - \mathrm{fm} = \varepsilon$, $\mathrm{em} - \mathrm{ar} = \rho$, $\mathrm{bt} - \mathrm{fn} = \xi$, $\mathrm{en} - \mathrm{br} = \chi$, $\mathrm{et} - \mathrm{fr} = \omega$.

Les 1, 2 & 4 de ces équations donnent $\xi \mathrm{a} - \varepsilon \mathrm{b} - \alpha \mathrm{f} = 0$.

Les 1, 3 & 5. . . . . $\chi \mathrm{a} - \rho \mathrm{b} + \alpha \mathrm{e} = 0$.

Les 2, 3 & 6. $\omega a - \varepsilon e - \rho f = 0.$
Et enfin les trois dernières donnent. . . . . $\omega b - \xi e - \chi f = 0.$
C'est-à-dire. . . . . (M)

$$\xi \frac{d\Psi}{ds} - \varepsilon \frac{d\Psi}{dz} - \alpha \frac{d\Psi}{dy} = 0$$

$$\chi \frac{d\Psi}{ds} - \rho \frac{d\Psi}{dz} + \alpha \frac{d\Psi}{dx} = 0$$

$$\omega \frac{d\Psi}{ds} - \varepsilon \frac{d\Psi}{dx} - \rho \frac{d\Psi}{dy} = 0$$

$$\omega \frac{d\Psi}{dz} - \xi \frac{d\Psi}{dx} - \chi \frac{d\Psi}{dy} = 0.$$

De ces quatre équations résulte dabord l'équation de condition. . . . . (W)

$$\omega\alpha + \chi\varepsilon - \rho\xi = 0$$

qui doit avoir lieu, pour que l'équation C appartienne à la formule B. Intégrant ensuite chacune de ces quatre équations, par les méthodes que j'ai données ci-dessus pour les équations à quatre variables du premier ordre, on parviendra à quatre nouvelles équations de la forme $\Psi = F:(\Gamma', \Omega')$; $\Psi = F:(\Gamma'', \Omega'')$; &c.

59. En réfléchissant sur les quatre équations M, on voit que, dans chacune d'elles, une des quatre variables s, z, x, y a été traitée comme constante : & il est facile d'en découvrir la raison. En effet, l'intégrale cherchée est $\Psi = \phi : \Pi$; ces deux fonctions pouvant contenir les quatre variables ; or, les deux valeurs de Ψ & de Π, à cause de leur permutabilité, leur appartenant indistinctement à l'une ou à l'autre, on ne peut avoir la valeur de Ψ, par exemple, que par l'équation $\Psi = F:(\Gamma, \Omega)$. Et on aura de même $\Pi = f:(\Gamma, \Omega)$; d'où, comme on a vu (§ 11.), il résulte

ſulte pour l'intégrale cherchée, $\Gamma = F:\Omega$, ce qu'on pourroit démontrer également, en obſervant que $\Gamma = F:\Omega$ n'eſt autre choſe que $F:(\Gamma, \Omega) = 0$ (§ 3.) ou $=$ f: (Γ, Ω), ou enfin $= \phi:(f:[\Gamma, \Omega])$; c'eſt-à-dire $\Psi = \phi:\Pi$.

C'eſt donc par une équation de la forme $\Psi = F:(\Gamma, \Omega)$ que l'analyſe détermine les deux fonctions Γ, Ω, qui ſont les valeurs de Ψ & Π. Mais on ſait que, pour éliminer d'une pareille équation la fonction arbitraire, (§ 27.) il ſuffit de faire varier Ψ par trois variables. Ainſi, y en ayant ici quatre, on ne peut que les combiner trois à trois; ce qui fournira les quatre équations aux différences partielles M, dans chacune deſquelles la variable principale n'a varié que par trois des quatre variables s, z, x, y. Il faut donc deux de ces équations, pour déterminer les quatre variations dont elle eſt ſuſceptible; & deux ſuffiſent en effet; car deux quelconques, avec l'équation de condition W, produiſent les deux autres.

Il ſuit de tout cela, que les quatre équations M ne ſont que les quatre réſultats de la différentiation d'une même formule $\Psi = F:(\Gamma, \Omega)$ dans les quatre hypothèſes différentes de x, ou y, ou z, ou enfin s conſtante. Voyons maintenant comment, des équations $\Psi = F:(\Gamma', \Omega', x)$; $\Psi = F:(\Gamma'', \Omega'', y)$; &c. où j'ajoute d'une manière tout-à-fait indéterminée, dans chacune, la variable qui y a été traitée comme conſtante, on pourra conclure l'intégrale complette $\Psi = F:(\Gamma, \Omega)$.

60. Examinons dabord quels changemens éprouvent les fonctions Γ, Ω, dans le paſſage qu'elles font de cet état, à celui de Γ', Ω'; ou Γ'', Ω''; &c. Pour cela, conſidérons la formule générale des équations à quatre variables z, u, x, y (§ 27.), dans

le cas où le terme ſans différence partielle eſt $= 0$; c'eſt-à-dire, où Ψ ſe réduit à une ſeule variable ζ ; & comme ici Ψ ne repréſente qu'une pareille variable principale, je mettrai, dans cette formule, Ψ au lieu de ζ ; & j'aurai par-là. . . . . (D)

$$\left(\frac{d\Gamma}{du}\frac{d\Omega}{dx} - \frac{d\Gamma}{dx}\frac{d\Omega}{du}\right)\frac{d\Psi}{dy} + \left(\frac{d\Gamma}{dy}\frac{d\Omega}{du} - \frac{d\Gamma}{du}\frac{d\Omega}{dy}\right)\frac{d\Psi}{dx} + \left(\frac{d\Gamma}{dx}\frac{d\Omega}{dy} - \frac{d\Gamma}{dy}\frac{d\Omega}{dx}\right)\frac{d\Psi}{du} = 0,$$

dont l'intégrale eſt $\Psi = F:(\Gamma, \Omega)$.

Maintenant, ſi je ſuppoſe que Γ & Ω, outre les trois variables u, x, y, en contiennent une quatrième t, qui ait été traitée comme conſtante, cette quatrième variable ne peut être diſparue de l'équation D, ſoit en partie, ſoit en totalité, qu'autant qu'elle ſe trouvoit, ſoit en partie, ſoit en totalité, ſeule ; 1°. dans un facteur de Γ ou Ω, comme ſi $\Gamma = T\gamma$, & $\Omega = \Theta\omega$, T & Θ étant fonctions de t ſeule ; ou 2°, dans un terme additionnel, comme ſi $\Gamma = \gamma + T$, & $\Omega = \omega + \Theta$.

Car, dans le premier cas, $d\Gamma$ deviendroit $T d\gamma$, puiſque t eſt conſtante ; il en ſeroit de même de Ω qui ſeroit $= \Theta d\omega$. Ainſi toute la formule D ſeroit diviſible par $T\Theta$; & dans le ſecond, par la même raiſon de T conſtante $d\Gamma$ ſe réduiroit à $d\gamma$, & $d\Omega$ à $d\omega$.

Il ſuit delà que l'équation $\Psi = F:(\Gamma', \Omega', x)$ (& on en dira autant des autres) ne peut, en lui donnant la plus grande extenſion dont elle ſoit ſuſceptible, que devenir

$$\Psi = F:(P\Gamma' + Q, G\Omega' + H);$$

P, Q, G, H étant des fonctions de x ſeule ; & conſéquemment ſi on parvient à déterminer ces fonctions, on aura l'équation $\Psi = F:(\Gamma, \Omega)$.

Voici un moyen bien ſimple pour y réuſſir. Les valeurs de Ψ & Π étant données par l'équation $\Psi = F:(P\Gamma' + Q, G\Omega' + H)$, on a d'une part $P\Gamma' + Q = F:(G\Omega' + H)$. De même, à cauſe de $\Psi = F:(\Gamma, \Omega)$, on a $\Gamma = F:\Omega$; & ces deux équations, par hypothèſe, expriment la même choſe ; ainſi, ſi on en élimine de toutes les deux la fonction arbitraire, en traitant s & z comme fonctions de x & y, les réſultats ſeront encore les mêmes. Or par-là, l'équation $\Gamma = F:\Omega$ devient la propoſée elle-même ; il faudra donc que l'autre réſultat ſoit identique, terme à terme, avec la propoſée ; ce qui ſuffira pour déterminer P, Q, G, H, qu'on fait uniquement être fonctions de la variable ſeule qui a été traitée comme conſtante, dans celle des quatre équations M qu'on a adoptée de préférence.

61. Je prendrai pour exemple,

$$yx\left(\frac{dz}{dx}\frac{ds}{dy} - \frac{dz}{dy}\frac{ds}{dx}\right) - zx\frac{ds}{dx} + zy\frac{ds}{dy} + [xy - zx]\frac{dz}{dx} + [zy - xy]\frac{dz}{dy} + zy - zx = 0;$$

on aura $\alpha = yx$, $\varepsilon = -zx$, $\rho = zy$, $\xi = xy - zx$, $\chi = zy - xy$, $\omega = zy - zx$; ainſi

$$(xy - zx)\frac{d\Psi}{ds} + zx\frac{d\Psi}{dz} - xy\frac{d\Psi}{dy} = 0,$$

$$(zy - xy)\frac{d\Psi}{ds} - zy\frac{d\Psi}{dz} + xy\frac{d\Psi}{dx} = 0,$$

$$(zy - zx)\frac{d\Psi}{ds} + zx\frac{d\Psi}{dx} - zy\frac{d\Psi}{dy} = 0,$$

$$(zy - zx)\frac{d\Psi}{dz} - (xy - zx)\frac{d\Psi}{dx} - (zy - xy)\frac{d\Psi}{dy} = 0.$$

Ces quatre équations s'intègrent facilement par la méthode de l'art.

31, en y ajoutant, pour la quatrième, celle de tâtonnement. On trouve

pour la 1, où x eſt conſtante, $\Psi = \phi:(s + z + y,\ zy)$;
pour la 2, où y eſt conſtante, $\Psi = \phi:(s + z + x,\ zx)$;
pour la 3, où z eſt conſtante, $\Psi = \phi:(s + x + y,\ xy)$; &
pour la 4, où s eſt conſtante, $\Psi = \phi:(z + x + y,\ zxy)$.

En prenant la première de ces quatre équations, on aura $\Gamma' = s + z + y$; $\Omega' = zy$; & P, Q, G, H, feront des fonctions de x ſeule. Ainſi

$$P(s + z + y) + Q = F:(Gzy + H).$$

Suppoſant donc $\Psi = P(s + z + y) + Q$, & $\Pi = Gzy + H$, on aura (§ 57.) $a = P$, $b = P$, $e = (s + z + y)P' + Q'$, $f = P$, $m = o$, $n = Gy$, $r = zyG' + H'$, $t = Gz$; où j'ai fait $dG = G'dx$, $dH = H'dx$, &c. Tirant enſuite delà les valeurs de α, ε, ρ, ξ, χ, ω (§ 58.), on parviendra à l'équation

$$PGy\left(\frac{dz}{dx}\frac{ds}{dy} - \frac{dz}{dy}\frac{ds}{dx}\right) - PGz\frac{ds}{dx} + P[G'zy + H']\frac{ds}{dy} - [PGz - PGy]\frac{dz}{dx} - (Gy[s+z+y]P' + GQ'y - PG'zy - PH')\frac{dz}{dy} - (Gz[s + z + y]P' + GQ'z - PG'zy - PH') = o,$$

qui, comparée terme à terme avec la propoſée, donne $PG = x$, $P[G'zy + H'] = zy$. De cette dernière on conclut que H', qui ne peut être qu'une fonction de x, eſt $= o$; & $H = Conſt. = 1$. De plus $PG' = 1$, d'où $P = 1$, $G = x$, $P' = o$, & $G' = 1$. On aura enſuite, au moyen de ces ſubſtitutions, $-Q'xy + zy = zy - xy$, & conſéquemment $Q' = 1$, $Q = x$; ce qui s'accorde avec la dernière équation de comparaiſon entre les deux

termes ſans différence partielle. Ainſi l'intégrale réelle complette eſt

$$s + z + y + x = F : zxy.$$

62. Pour mieux faire ſentir le mérite de cette méthode, je prendrai encore l'exemple ſuivant. Soit

$$3z^2 \left(\frac{dz}{dx}\frac{ds}{dy} - \frac{dz}{dy}\frac{ds}{dx} \right) - x\frac{ds}{dx} + y\frac{ds}{dy} - 2zx\frac{dz}{dx} + 2zy\frac{dz}{dy} = 0,$$

pour laquelle les quatre équations M deviennent

$$2zx\frac{d\Psi}{ds} - x\frac{d\Psi}{dz} + 3z^2\frac{d\Psi}{dy} = 0,$$

$$2zy\frac{d\Psi}{ds} - y\frac{d\Psi}{dz} + 3z^2\frac{d\Psi}{dx} = 0, \text{ \& deux fois}$$

$$x\frac{d\Psi}{dx} - y\frac{d\Psi}{dy} = 0.$$

Les deux premières donnent pour intégrale, $\Psi = F : (s + z^2, xy + z^3)$; & la dernière donne $\Psi = F : xy$.

Si on employe la première de ces intégrales, tout ſe paſſera comme dans l'exemple précédent. Mais ſuppoſons qu'on eût rencontré quelque difficulté dans cette intégration, & qu'on fût obligé d'employer la dernière $\Psi = F : xy$ Les deux lettres s & z pouvant avoir été traitées comme conſtantes, puiſque la même équation appartient aux deux ſuppoſitions, on aura $\Psi = F : (xy, [s, z])$; $[s, z]$ déſignant toujours une fonction déterminée de s & z. P, Q, G, H feront auſſi de pareilles fonctions ; & l'intégrale complette hypothétique ſera, (en feſant $\Gamma' = xy$, & $\Omega' = [s, z]$),

$$Pxy + Q = F : (G[s, z] + H);$$

ou, comme G & H ſont des fonctions de même nature que $[s, z]$,

$$Pxy + Q = F : G.$$

Ainſi (§ 57.), prenant $\Psi = Pxy + Q$, $\Pi = G$, & $dP = p\,ds +$

$p'dz$, $dQ = qds + q'dz$, $dG = gds + g'dz$, on aura a $= pxy + q$, b $= p'xy + q'$, c $= Py$, f $= Px$; m $= g$, n $= g'$, r $=$ t $=$ o; d'où $\alpha = g(xyp' + q') - g'(xyp + q)$, $\varepsilon = -gPx$, $\rho = gPy$, $\xi = -g'Px$, $\chi = g'Py$, & $\omega =$ o. Comparant ensuite toutes ces valeurs avec les valeurs correspondantes de la proposée, il vient

$g(yxp' + q') - g'(xyp + q) = 3z^2$, $-gPx = -x$, $gPy = y$, $-g'Px = -2zx$, $g'Py = 2zy$;

ce qui donne en tout, outre la première équation, $gP = 1$, $g'P = 2z$. De ces deux dernières on conclura

$$Pgds + Pg'dz = ds + 2zdz = PdG;$$

donc $P = 1$, $G = s + z^2$, $p = p' = 0$, $g = 1$, $g' = 2z$, & substituant ces valeurs dans la première, elle deviendra $3z^2 = q' - 2zq$. Or $q' = \frac{dQ}{dz}$, & $q = \frac{dQ}{ds}$; ainsi

$$3z^2 = \frac{dQ}{dz} - 2z\frac{dQ}{ds}$$

qui donne à l'ordinaire

$$Q = z^3 + \phi:(z^2 + s).$$

On a donc, en mettant ces valeurs dans l'équation $Pxy + Q = F:G$,

$$xy + z^3 + \phi:(z^2 + s) = F:(z^2 + s),$$

ou plus simplement,

$$xy + z^3 = F:(s + z^2).$$

63. On voit par ces deux exemples, qu'il suffit d'intégrer une des équations M, pour avoir l'intégrale complette de la proposée elle-même : & en général, on pourra choisir celle de ces équations qu'on voudra. Il est cependant des cas, où ce choix n'est

pas entièrement libre. Ce ſont ceux où une partie des variables eſt *fonctionnée* d'une certaine manière déterminée, qui vient à s'annuller par la ſuppoſition qu'une des variables eſt conſtante ; telle eſt, par exemple, l'expreſſion

$$\Psi = \phi : (\text{Log.}\,[x^2 + y^2 + sz] + s^2)$$

qui, lorſque s eſt conſtante, ſe réduit à $\phi : (\text{Log.}\,[x^2 + y^2 + sz])$; c'eſt-à-dire plus ſimplement, à $\phi : (x^2 + y^2 + sz)$; telle eſt encore, lorſqu'il n'y a que trois variables, celle

$$\Psi = \phi : \frac{ax^2 + sy^2}{xy}$$

qui, dans la même hypothèſe de s conſtante, devient une fraction homogène de dimenſion nulle des deux variables x, y, & qui conſéquemment ſe réduit toujours, comme on ſait, à une certaine fonction de la fraction ſimple $\frac{x}{y}$; de ſorte que l'expreſſion précédente prend la forme $\Psi = \phi : \frac{x}{y}$. Il arrive dans ces cas-là, qu'il diſparoît de l'équation M, où s eſt traitée comme conſtante, un certain facteur d'où dépend le genre de fonction déterminée qui modifioit ce ſyſtême de variables ; facteur que la condition ſeule d'intégrabilité ne ſauroit faire diſtinguer, parmi le nombre infini d'autres facteurs complexes qui ſatisfont également à cette condition. Au reſte ces cas, qu'on évitera le plus ſouvent en ne s'attachant point à intégrer celle des équations M qui paroît la plus ſimple, ſe manifeſteront d'eux-mêmes par quelqu'abſurdité dans l'expreſſion des fonctions P, Q ; & il faudra alors intégrer une autre de ces mêmes équations.

J'ai dit qu'il ſuffiroit d'intégrer une des équations M, & en géné-

ral cela eſt vrai; pourvu qu'on vérifie enſuite les autres, ou du moins l'équation de condition qni réſulte du ſyſtême entier. Il ſera cependant quelquefois néceſſaire d'en intégrer pluſieurs; & il eſt même conſeillable, lorſqu'on le pourra, de les intégrer toutes. Cela donnera une grande facilité à appercevoir le nœud de certaines petites difficultés qu'on rencontre dans le cours des opérations, & qu'il eſt impoſſible de prévoir. Suppoſons par exemple qu'on doive parvenir à l'équation finie

$$\Psi = \phi:(zy + ux,\ x + y).$$

On aura, quand u eſt conſtant,

$$y\frac{d\Psi}{dy} - y\frac{d\Psi}{dx} + (u - z)\frac{d\Psi}{dz} = 0, \text{ d'où } \Psi = \phi:(zy - uy,\ x + y);$$

& quand x eſt conſtant,

$$y\frac{d\Psi}{du} - x\frac{d\Psi}{dz} = 0, \text{ d'où } \Psi = \phi:(zy + ux, y).$$

Si on vouloit ſe borner à la première intégrale partielle, on feroit

$$\Psi = \phi:(P(zy - uy) + Q,\ G(x + y) + H),$$

ces indéterminées étant fonctions de u ſeule. Or il eſt aiſé de voir que par ce moyen on ne ſauroit déduire de cette expreſſion générale, l'équation finie particulière ci-deſſus. Auſſi en conſultant la ſeconde, s'apperçoit-on que les deux fonctions $zy - uy$, & $zy + ux$ ne ſont point d'accord; puiſque x, n'étant pas conſtante dans la première équation, ne ſauroit être diſparue de cette première fonction, tandis qu'elle eſt contenue dans la ſeconde, où elle eſt conſtante. On en découvrira facilement la raiſon, en ce que dans la valeur de $\Psi = \phi:(\Gamma, \Omega)$, on peut, ſans rien changer, fonctionner enſemble d'une manière quelconque, les deux grandeurs Γ, Ω, & écrire $\Psi = \phi:((\Gamma, \Omega), [\Gamma, \Omega])$ (§ 6).

Ainſi,

Ainſi, quand u eſt conſtante, on peut ajouter $u\ (x + y)$ avec $zy - uy$, & la ſomme en eſt $zy + xu$; d'où réſulte $\Psi = \phi : (zy + ux, x + y)$ qui s'accorde avec la ſeconde intégrale partielle. Le calcul peut donc, dans cette hypothèſe, donner l'un réſultat auſſi bien que l'autre ; mais la ſeconde intégrale nous avertit qu'il faut préférer le dernier.

Quant à la comparaiſon terme à terme, on ſent bien qu'en général, avant de l'entreprendre, il faudra multiplier la propoſée par un facteur indéterminé. La détermination de ce facteur ne préſente aucune difficulté : on en verra un exemple dans les équations du troiſième ordre (§ 84).

64. Nous voici donc en état d'intégrer toute équation de la forme. . . . . (C)

$$\alpha\left(\frac{dz}{dx}\frac{ds}{dy} - \frac{dz}{dy}\cdot\frac{ds}{dx}\right) + \varepsilon\frac{ds}{dx} + \rho\frac{ds}{dy} + \xi\frac{dz}{dx} + \chi\frac{dz}{dy} + \omega = 0,$$

s étant tout ce qu'on voudra ; mais, de même que z, variable par x & par y ſeulement. On a vu de plus que, dans les équations dont il eſt ici queſtion ; ſavoir, pour le ſecond ordre

$$\gamma\frac{d^2z}{dx^2} + \zeta\frac{d^2z}{dxdy} + \eta\frac{d^2z}{dy^2} + \vartheta = 0,$$

l'intégrale ne peut contenir p & q que ſous cette forme unique & donnée s : il ne nous manque donc plus, afin de pouvoir intégrer toute équation du ſecond ordre, ſuſceptible d'une intégrale complette de l'ordre immédiatement inférieur, que de ſavoir donner à cette équation la forme C ; & pour cela, il faut premièrement en faire diſparoître les différences partielles de p & q, en ſubſtituant à leur place celles de s ; ce qui eſt toujours poſſible.

Soit donc en général la valeur de s (qui outre p & q, peut aussi contenir les autres variable z, x, y) telle, que

$$\frac{ds}{dx} = \theta \frac{dp}{dx} + \eta \frac{dq}{dx} + \upsilon = \theta \frac{dp}{dx} + \eta \frac{dp}{dy} + \upsilon,$$

$$\frac{ds}{dy} = \theta \frac{dp}{dy} + \eta \frac{dq}{dy} + \varpi;$$

je conclurai delà

$$\frac{dp}{dx} = \frac{\frac{ds}{dx} - \eta \frac{dp}{dy} - \upsilon}{\theta}, \quad \frac{dq}{dy} = \frac{\frac{ds}{dy} - \theta \frac{dp}{dy} - \varpi}{\eta}.$$

En substituant ces valeurs dans l'équation

$$\gamma \frac{d^2 z}{dx^2} + \zeta \frac{d^2 z}{dx dy} + \eta \frac{d^2 z}{dy^2} + \vartheta = 0, \text{ ou}$$

$$\gamma \frac{dp}{dx} + \zeta \frac{dp}{dy} + \eta \frac{dq}{dy} + \vartheta = 0,$$

non seulement $\frac{dp}{dx}$ & $\frac{dq}{dy}$ seront éliminées, mais $\frac{dp}{dy}$ disparoîtra aussi d'elle-même.

En effet, après cette substitution, le coëfficient de $\frac{dp}{dy}$ sera

$$\zeta - \frac{\gamma \eta}{\theta} - \frac{\eta \theta}{\eta}.$$

Or si on fait attention que $\theta = \frac{ds}{dp}$, $\eta = \frac{ds}{dq}$; & que (à cause de $s = \int [\mu dp + \mu \lambda dq]$), $\frac{ds}{dp} = \mu$, $\frac{ds}{dq} = \mu\lambda$, on verra que $\frac{\eta}{\theta} = \lambda$. De plus (§ 56.) $\lambda = \frac{G}{E}$; ainsi ce coëfficient sera $\zeta - \gamma \frac{G}{E} - \eta \frac{E}{G}$. Or il est évident que cette quantité est $= 0$, puisque (§ 56.) on a l'équation $\gamma G^2 + \eta E^2 - \zeta GE = 0$. On pourra donc, pour simplifier, supprimer le terme $\frac{dp}{dy}$, & le négliger dans les valeurs de $\frac{dp}{dx}$, $\frac{dq}{dy}$, qui par-là deviendront

$$\frac{dp}{dx} = \frac{\frac{ds}{dx} - \upsilon}{\theta}; \quad \frac{dq}{dy} = \frac{\frac{ds}{dy} - \text{ȣ}}{\iota}.$$

De cette ſubſtitution réſultera une transformée. . . . . (T)

$$\eta\theta \frac{ds}{dy} + \gamma\iota \frac{ds}{dx} + \vartheta\theta\iota - \gamma\iota\upsilon - \eta\theta\text{ȣ} = 0,$$

que je nommerai *imparfaite*, qui ne contiendra plus que les expreſſions finies p & q, & d'où il faudra les éliminer au moyen de la valeur donnée de s.

65. Eu conſidérant l'équation B (§ 57.), on voit qu'elle ne contient que p & q linéaires, qui ſont préciſément les ſeules $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$ provenues immédiatement de la différentiation de l'intégrale cherchée. Il ſuit delà que, lorſqu'on aura ſubſtituée dans la transformée imparfaite, s à la fonction de p & q à laquelle elle eſt égale, il n'y doit reſter que p & q linéaires, qui feront les $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$ de l'équation C (§ 64). Par-là, les coëfficiens ξ, χ & ω ſe trouveront déterminés, & il ne faudra plus qu'examiner s'ils ſatisfont à l'équation de condition W (§ 58).

Quant à cette ſubſtitution, elle ne préſentera aucune difficulté; car en tirant de l'équation qui donne s en p & q, la valeur de p, par exemple, en s & q, & ſubſtituant dans la transformée, à la place des puiſſances de p plus élevées que l'unité, la valeur de ces mêmes puiſſances tirée de l'équation qui donne p en q & s, il eſt certain que tous les p & q linéaires, qui conſtituent réellement la fonction que repréſente s, diſparoîtront en même tems, laiſſant s à leur place.

Suppoſons la transformée imparfaite

$$(p^2zx + pqzy - p^4y + pq^3y)\frac{ds}{dy} - (pqzx + q^2zy - p^3qy$$
$$+ q^4y - p^3z + q^3z)\frac{ds}{dx} + p^2z^2x + pqz^2y = 0,$$

s étant $= \frac{p^3 - q^3}{px + qy}$. Si on divise cette équation par $px + qy$, elle deviendra

$$\left(pz - py\frac{p^3 - q^3}{px + qy}\right)\frac{ds}{dy} - \left(qz - [z + qy]\frac{p^3 - q^3}{px + qy}\right)\frac{ds}{dx} + pz^2 = 0,$$

où la substitution à faire se montre d'elle-même. Mais on peut également réaliser l'équation $p^3 = q^3 + psx + qsy$, sans cette préparation. Pour cela il suffit de mettre au lieu de p^3 cette valeur ; & le résultat sera la transformée cherchée, multipliée par le facteur $px + qy$ qui auroit dû servir de dénominateur, & qu'on fera disparoître à l'ordinaire, en réduisant l'équation à sa plus simple expression.

66. Il me reste encore à examiner, s'il ne faudra pas quelquefois multiplier la transformée imparfaite par un certain facteur, avant de procéder à cette dernière substitution. On sent qu'il ne peut s'agir que d'un facteur, fonction de p & q & des autres variables qui n'entrent point en considération ici ; & on verra l'identité de cette question avec la suivante : y a-t-il des cas, où l'équation. . . . . (E), (*voyez l'équat.* B, § 57)

$$([bm - an]p + em - ar)\frac{ds}{dy} - ([bm - an]q - at + fm)$$
$$\frac{ds}{dx} + (bt - fn)p + (en - br)q + et - fr = 0,$$

en y laissant les différences partielles $\frac{ds}{dy}$, $\frac{ds}{dx}$, & substituant dans les coëfficiens, à s, sa fonction équivalente (ce qui est évidemment

l'état de transformée imparfaite) soit exactement divisible par une fonction de p & q, y compris les autres variables, différente de celle s? Car il importeroit peu qu'elle le fût par cette même fonction, ou par une fonction quelconque de cette même fonction. Pour répondre à cette question, je remarque dabord que, dans son état naturel; c'est-à-dire, avant la substitution de p & q à s dans les coëfficiens, cette équation ne renferme que s, z, x, y; & de plus, p & q linéaires. Le coëfficient de $\frac{ds}{dy}$ ne contient que p; & celui de $\frac{ds}{dx}$ que q; ainsi, s'il existe un facteur commun à toute l'équation, il doit l'être à chacun des termes bm − an, em − ar, at − fm pris séparément. Un pareil facteur ne pourroit donc être que la fonction même représentée par s; ou une fonction de cette fonction, puisqu'aucun de ces termes ne contient p ni q sous une autre forme; ou du moins, un facteur de cette même fonction; ce qui exige toujours que, dans leur état naturel, tous ces termes soient divisibles par une fonction Σ de s. Cela posé, il n'y a que la somme des trois autres termes

$$(\text{bt} - \text{fn})\, p + (\text{en} - \text{br})\, q + \text{et} - \text{fr}$$

qui puisse fournir ce facteur commun, fonction de p & q sans l'être de s: & ce facteur (en représentant en général bt − fn par AB, en − br par AE, & et − fr par AC, pour les cas où ces trois coëfficiens ont un diviseur commun) n'est autre que $Bp + Eq + C$. Il suffit pour cela qu'il divise exactement la fonction Σ de s qui, comme je viens de dire, doit alors multiplier tous les autres termes. On voit qu'en divisant toute l'équation par ce facteur, les termes $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$ disparoissent, ne laissant à leur place

que le commun diviſeur A de leurs coëfficiens; & que conſéquemment, le terme ſans différence partielle d'une pareille transformée imparfaite ne peut être $= 0$.

Voilà donc le ſeul cas, où il ſoit néceſſaire de multiplier une transformée imparfaite par un facteur, afin de la rendre complette : & on a, pour ce cas, la règle ſuivante : lorſqu'on ne pourra effectuer dans une transformée imparfaite la ſubſtitution, de manière que les p & q ſoient réduits à être linéaires, & qu'en même tems l'équation de condition W (§ 58) ait lieu, on eſſayera d'y réuſſir en la multipliant par un facteur $Bp + Eq + C$, dont les indéterminées B, E, C ſe détermineront par la condition, que les coëfficiens des trois termes connus; ſavoir, $\left(\frac{dz}{dx}\frac{ds}{dy} - \frac{dz}{dy}\frac{ds}{dx}\right)$, $\frac{ds}{dx}$, & $\frac{ds}{dy}$, ſoient, auſſi bien que B, E, C elles-mêmes, fonctions de s, & des autres variables z, x, y, ſans mélange de p ni q.

Un exemple éclaircira ceci. Suppoſons que s étant $= p^2x - pqy + py^2$, on ſoit parvenu à la transformée imparfaite

$$2p^2\frac{ds}{dy} - 2p\,(q - y)\frac{ds}{dx} + 1 = 0;\ \text{c'eſt-à-dire,}$$

$$2p\left(\frac{dz}{dx}\frac{ds}{dy} - \frac{dz}{dy}\frac{ds}{dx}\right) + 2yp\,\frac{ds}{dx} + 1 = 0.$$

Je vois que dans cet état, la ſubſtitution en queſtion ne peut avoir lieu : je multiplie donc cette équation par $Bp + Eq + C$; & le coëfficient du premier terme ſe change en $2Bp^2 + 2Epq + 2Cp$, ou mettant s aulieu de ſa valeur; c'eſt-à-dire, feſant $p^2 = \frac{s + pqy - py^2}{x}$, en

$$\frac{2Bs + 2Bpqy - 2Bpy^2 + 2Epqx + 2Cpx}{x},$$

qui ne peut ſe réduire à un une fonction de s, x & y, qu'autant que

$$2Bpqy - 2Bpy^2 + 2Epqx + 2Cpx = 0.$$

Cette ſuppoſition laiſſera, pour coëfficient du premier terme, $\frac{2Bs}{x}$ où B doit pareillement ne contenir ni p ni q. Or en vertu de la dernière ſuppoſition, $B = \frac{x}{y} \cdot \frac{C + Eq}{y - q}$; il faudra donc que, ϖ étant une fonction de x, y, & s feulement, on ait $\frac{C + Eq}{y - q} = \varpi$; d'où $C + Eq = \varpi y - \varpi q$; c'eſt-à-dire, puiſque C & E ne doivent renfermer ni p ni q, $C = \varpi y$, $E = - \varpi$; & le facteur cherché eſt $\varpi \left(\frac{x}{y} p - q + y\right)$. Il ne s'agit plus que de déterminer ϖ ; & pour cela je multiplie la propoſée par ce facteur, & la comparant enſuite terme à terme avec la formule C de l'art 58, je trouve que l'équation de condition W a lieu, quelle que ſoit la valeur de ϖ. Je fais donc $\varpi = y$, uniquement afin de faire diſparoître la fraction $\frac{x}{y}$; & par-là le facteur cherché ſera enfin $px - qy + y^2$, qui diviſe en effet exactement la fonction $(px - qy + y^2)\,p$ que repréſente s. Ainſi on aura la nouvelle transformée imparfaite

$$2p\,(px - qy + y^2)\left(\frac{dz}{dx}\frac{ds}{dy} - \frac{dz}{dy}\frac{ds}{dx}\right) + 2yp\,(px - qy + y^2)\frac{ds}{dx} + px - qy + y^2 = 0,$$

ou mettant s aulieu de ſa fonction équivalente, & donnant au dernier terme la forme qui lui convient,

$$2s\left(\frac{dz}{dx}\frac{ds}{dy} - \frac{dz}{dy}\frac{ds}{dx}\right) + 2sy\frac{ds}{dx} + x\frac{dz}{dx} - y\frac{dz}{dy} + y^2 = 0,$$

qui satisfait à l'équation de condition W, & dont l'intégrale est

$$s^2 + xy = F:(2z - y^2).$$

67. Il suit de tout ce qui précède que toutes les fois, qu'après avoir réalisé dans une transformée imparfaite l'équation de substitution, & après avoir réduit cette nouvelle transformée à ses moindres termes, on ne parviendra pas à chasser toutes les puissances de p & de q; ou, que p & q étant devenues linéaires, les coëfficiens $\alpha, \varepsilon, \rho$, &c. ne satisferont pas à l'équation de condition W; il suit, dis-je, que la proposée, dont cette transformée dérive, n'a pas de première intégrale complette : bien entendu, qu'on aura fait usage de l'observation contenue dans l'art. précedent.

68. Je préviendrai encore une petite difficulté qui, au premier coup d'œil, pourroit arrêter. Soit

$$(q^3 z - pq^2 y - pqz)\frac{dp}{dx} + (2p^2 qy - 2pq^2 z + p^2 z)\frac{dp}{dy} + (p^2 qz - p^3 y)\frac{dq}{dy} - pq^3 z^2 = 0;$$

on trouve $\frac{G}{E} = -\frac{p}{q}$, d'où $s = \frac{p}{q}$; & substituant pour $\frac{dp}{dx}$, $\frac{dq}{dy}$, leurs valeurs (§ 64), on a la transformée imparfaite

$$(p^2 y - pqz)\frac{ds}{dy} - (pqy - q^2 z + pz)\frac{ds}{dx} - pqz^2 = 0,$$

qui, mettant pour p sa valeur qs, & divisant par q, se change en

$$(qs^2 y - qsz)\frac{ds}{dy} - (qsy - qz + sz)\frac{ds}{dx} - qsz^2 = 0.$$

Or on a vu (§ 66) par la forme de l'équation E, que le coëfficient de $\frac{ds}{dy}$ ne peut contenir que p; je le changerai donc en $psy - pz$, & l'équation deviendra

$$(sy - z)\left(\frac{dz}{dx}\frac{ds}{dy} - \frac{dz}{dy}\frac{ds}{dx}\right) - sz\frac{ds}{dx} - qsz^2 = 0.$$

La

La difficulté eſt que le terme qsz^2 eſt douteux ; car, puiſque $qs = p$, il peut auſſi bien être pz^2 que qsz^2 ; c'eſt-à-dire, $z^2 \frac{dz}{dx}$ que $sz^2 \frac{dz}{dy}$. Pour lever ce doute, conſultons l'équation de condition W. On a ici $\alpha = sy - z$, $\varepsilon = -sz$, $\rho = 0$, & $\omega = 0$ (puiſque le terme douteux contient néceſſairement $\frac{dz}{dx}$ ou $\frac{dz}{dy}$). L'équation W ſe réduit donc à $\chi\varepsilon = 0$; & comme $\varepsilon = -sz$, il faut que $\chi = 0$, qui eſt le coëfficient de $\frac{dz}{dy}$; ainſi le dernier terme eſt $-z^2 \frac{dz}{dx}$.

Au reſte, de pareils doutes ne peuvent ſe préſenter, que lorſque la valeur de p contient q, ſeulement ſous une forme linéaire, & *vice verſâ :* car ſans cela il eſt clair que cette fonction de q & s, où q ſeroit autre que linéaire, ne devant point ſe recontrer dans l'équation, il faudroit la faire diſparoître par la ſubſtitution de ſa valeur en p.

69. Lorſque l'intégrale cherchée ne doit contenir qu'une des deux lettres p, q ; par exemple p, on trouve $\frac{G}{E} = 0$; ce qui ſignifie que s n'eſt fonction que de p, ou ſimplement $s = p$. Soit

$$(2p^2qx + pqy + 4pxy + 2y^2 - pz - zx)\frac{dp}{dx} - (2p^3x + p^2y - p^2z - zy)\frac{dp}{dy} + p^3q + pqy + 2p^2y + 2y^2 - p^3 - p^2x = 0,$$

on a $G = 0$; ainſi on eſt sûr qu'aucun des coëfficiens ne renferme q, & on en conclura immédiatement la transformée imparfaite

$$(2p^2x + py)\left(\frac{dz}{dx}\frac{ds}{dy} - \frac{dz}{dy}\frac{ds}{dx}\right) - (4pxy + 2y^2 - pz - zx)\frac{ds}{dx} - (p^2z + zy)\frac{ds}{dy} - (p^3 + py)\frac{dz}{dy} - 2p^2y - 2y^2 + p^3 + p^2x = 0$$

qui, comparée avec la formule C (§ 64), donne

$\alpha = 2p^2x + py$, $\varepsilon = -(4pxy + 2y^2 - pz - zx)$, $\rho = -(p^2z + zy)$, $\chi = -(p^3 + py)$.
Quant à ξ & ω, ils sont inconnus; mais il est certain que

$$\xi p + \omega = p^3 + p^2x - 2p^2y - 2y^2;$$

& comme l'équation de condition W doit avoir lieu, on parviendra, au moyen de cette seconde équation où tout est connu excepté ξ & ω, à déterminer l'un & l'autre; savoir $\xi = p^2 + px$; $\omega = -2p^2y - 2y^2$. La transformée parfaite est donc

$$(2s^2x + sy)\left(\frac{dz}{dx}\frac{ds}{dy} - \frac{dz}{dy}\frac{ds}{dx}\right) - (4sxy + 2y^2 - sz - zx)\frac{ds}{dx} - (s^2z + zy)\frac{ds}{dy} - (s^3 + sy)\frac{dz}{dy} + (s^2 + sx)\frac{dz}{dx} - 2s^2y - 2y^2 = 0,$$

dont on trouvera l'intégrale d'après la méthode donnée ci-dessus; savoir,

$$(s^2x + sy + xy) = F:(sz + y^2);$$

ou comme $s = p = \frac{dz}{dx}$,

$$x\frac{dz^2}{dx} + y\frac{dz}{dx} + xy = F:\left(z\frac{dz}{dx} + y^2\right).$$

70. Pour faire l'application de cette méthode à un exemple connu, soit l'équation des surfaces engendrées par le mouvement d'une droite toujours parallèle au plan des x, y; savoir,*

$$q^2\frac{dp}{dx} - 2pq\frac{dp}{dy} + p^2\frac{dq}{dy} = 0.$$

On a, en comparant cette équation avec la formule générale

* Voyez Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de Turin, année 1784. . . . 85; I. partie, pag. 21, *Expression analytique de la génération des surfaces courbes, par M. Monge.*

$$\gamma \frac{dp}{dx} + \zeta \frac{dp}{dy} + \eta \frac{dq}{dy} + \vartheta = o,$$

$\gamma = q^2$, $\zeta = -2pq$, $\eta = p^2$, $\vartheta = o$. On en conclut dabord $\lambda = -\frac{2pq}{2q^2} = -\frac{p}{q}$, & $s = \frac{p}{q}$. Enſuite, pour avoir la transformée imparfaite, de $ds = \frac{qdp - pdq}{q^2}$ on conclura $\theta = \frac{1}{q}$, $\iota = -\frac{p}{q^2}$, $\upsilon = \varkappa = o$, & ſubſtituant ces valeurs dans la formule T (§ 64), elle deviendra

$$q \frac{ds}{dx} - p \frac{ds}{dy} = o,$$

où p & q étant linéaires, il n'y a plus de ſubſtitution ultérieure à faire. On a donc

$$\frac{d\zeta}{dy} \frac{ds}{dx} - \frac{d\zeta}{dx} \frac{ds}{dy} = o,$$

qui comparée avec l'équation C (§ 64), montre que tous les coëfficiens ſont zéro, excepté $\alpha = 1$. Ainſi les quatre équations ſe réduiſent à $\frac{d\Psi}{dy} = o$, $\frac{d\Psi}{dx} = o$; c'eſt-à-dire, $\Psi = F:(s, \zeta)$; & enfin, s ou $\frac{p}{q} = F:\zeta$, &

$$\frac{d\zeta}{dx} - \frac{d\zeta}{dy} F:\zeta = o.$$

Intégrant de nouveau cette dernière équation, ſelon la méthode de l'art. 4, on aura

$$\zeta = \mathrm{f}:(x\, F:\zeta + y), \text{ ou } x\, F:\zeta + y = \mathrm{f}:\zeta,$$

qu'il ſera facile de changer en

$$\zeta + y\, \phi:\zeta + x\psi:\zeta = o,$$

comme dans le mémoire cité, en la multipliant par $\frac{\zeta}{\mathrm{f}:\zeta}$, d'où

$$\frac{\zeta y}{\mathrm{f}:\zeta} + \frac{\zeta x F:\zeta}{\mathrm{f}:\zeta} = \zeta.$$

En effet, f & F étant arbitraires, on peut repréſenter $\frac{z}{f:z}$ & $\frac{z}{f:z}$ $F:z$ par $-\phi:z$ & $-\psi:z$, & on aura

$$z + y\,\phi:z + x\psi:z = 0.$$

71. L'équation

$$(1 + q^2)\frac{dp}{dx} - 2pq\frac{dp}{dy} + (1 + p^2)\frac{dq}{dy} = 0,$$

qui eſt celle des ſurfaces dont l'aire eſt un *maximum*, quoiqu'en apparence peu différente de la précédente, n'eſt point intégrable par cette méthode. En effet, on a $\gamma = 1 + q^2$, $\zeta = -2pq$, $\eta = 1 + p^2$, $\vartheta = 0$. Donc

$$\frac{G}{E} = \lambda = \frac{\pm\sqrt{-(1 + p^2 + q^2)} - pq}{1 + q^2};$$

& l'expreſſion $dp + \lambda dq$ ſe change en

$$dp + \frac{\pm\sqrt{-1}\sqrt{1 + p^2 + q^2} - pq}{1 + q^2}\,dq.$$

On en fera évanouir le radical, en ſuppoſant $1 + q^2 = 2pz + zz$; d'où $p = \frac{1 + q^2 - z^2}{2z}$; $\sqrt{1 + p^2 + q^2} = p + z = \frac{1 + q^2 + z^2}{2z}$; & $pq = \frac{q(1 + q^2 - z^2)}{2z}$. Feſant enſuite diſparoître les dénominateurs, & les facteurs communs; puiſqu'on a la liberté de multiplier cette expreſſion par telle quantité qu'on voudra, on parviendra à

$$(zq + z\sqrt{-1})\,dq - (1 + q^2)\,dz,$$

dont l'intégrale, en la multipliant par $\frac{1}{z^2(q + \sqrt{-1})}$, eſt $\frac{q - \sqrt{-1}}{z}$. Ainſi

$$s = \frac{q - \sqrt{-1}}{\sqrt{(1 + p^2 + q^2)} - p}, \text{ d'où}$$

$$\theta = \frac{ds}{dp} = \frac{s}{\sqrt{(1+p^2+q^2)}},\ \gamma = \frac{ds}{dq} = \frac{s\sqrt{1+p^2+q^2} - s^2 q}{\sqrt{1+p^2+q^2}\,(q-\sqrt{-1})},\ \upsilon = \varepsilon = 0;$$

& enfin en ſubſtituant ces valeurs dans l'équation T (§ 64), on parviendra à la transformée imparfaite

$$(1+q^2)\left(\sqrt{1+p^2+q^2} - qs\right)\frac{ds}{dx} + (1+p^2)(q-\sqrt{-1})\frac{ds}{dy}$$
$$= 0,$$

ou, à cauſe de $\sqrt{1+p^2+q^2} - qs = \frac{(1-s^2)(q-\sqrt{-1})}{2s}$, & de $1+q^2 = \frac{2(\sqrt{-1}-ps)(q+\sqrt{-1})}{1-s^2}$, & diviſant par $q-\sqrt{-1}$, à

$$(q-\sqrt{-1})(\sqrt{-1}-ps)\frac{ds}{dx} + (1+p^2)\,s\,\frac{ds}{dy} = 0,$$

qu'il eſt impoſſible de réduire à ne contenir que p & q linéaires. Ainſi cette équation n'a pas de première intégrale complette de la forme $\Psi = F:\Pi$.

72. Il arrivera très-ſouvent que dans la transformée imparfaite, p & q ſe trouveront linéaires; & dès-lors, ſans autre ſubſtitution, cette transformée ſera l'équation même, ſur laquelle il faudra faire l'épreuve de l'équation de condition W, en obſervant ce qui a été dit (§§ 66. 68). Cela aura lieu toutes les fois que l'intégrale cherchée ſera telle, que s ſoit linéaire, & ne ſoit multipliée par aucune des variables z, x, y; c'eſt-à-dire, quand l'intégrale ſera de la forme $s + P = F:(s+Q)$, ou ſimplement $s + P = F:Q$ (qui eſt la même choſe, en ſouſtrayant une fonction de l'autre; puiſque de $\sigma = F:s$, on conclut également $\sigma - s$, ou telle autre fonction de σ & s qu'on voudra, $= F:s = f:\sigma$) P & Q ne contenant que z, x, & y. Car alors b, e, f, n, r, t, non plus que α, ε, ρ, ξ, χ, ω, ne contiendront s. De cette claſſe ſont les équa-

tions du fecond ordre, traitées dans le chapitre IV, qui, en fefant $s = Mq + Np$, ont en général pour intégrale, $s + P = F: Q$; & on pourra, par cette méthode, intégrer la formule de l'art. 38 dans fa plus grande généralité; c'eft-à-dire, en y comprenant tous les termes défignés par les N.os 1, 2, 3, 4. Telle eft l'équation $qy \frac{dp}{dx} + (qz - py - y) \frac{dp}{dy} - (pz + z) \frac{dq}{dy} - p^2 - q^2 - p = 0$. On trouve, pour une des valeurs de $\frac{G}{E}$, $\lambda = \frac{z}{y}$; d'où $s = py + qz$. On aura enfuite la transformée imparfaite $(p + 1) \frac{ds}{dy} - q \frac{ds}{dx} = 0$, ou

$$\frac{dz}{dx}\frac{ds}{dy} - \frac{dz}{dy}\frac{ds}{dx} + \frac{ds}{dy} = 0.$$

Ainfi $\alpha = 1$, $\rho = 1$, & tous les autres coëfficiens font nuls. Les quatre équations M fe réduifent donc à $\frac{d\Psi}{dz} - \frac{d\Psi}{dx} = 0$; & $\frac{d\Psi}{dy} = 0$; d'où réfulte $\Psi = F: (z + x, s)$, & $s = F: (z + x)$; & enfin l'intégrale demandée eft

$$y \frac{dz}{dx} + z \frac{dz}{dy} = f: (z + x).$$

73. Lorfqu'on fera parvenu à cette première intégrale complette, il s'agit d'en conclure l'intégrale finie de la propofée; ce qui pourra quelquefois s'effectuer, au moyen des deux premières intégrales différentes qu'elle fournira. Mais le plus fouvent on fera obligé d'avoir recours à une feconde intégration; & il faut ici diftinguer plufieurs cas.

Dabord, lorfque la formule intégrale fe réduit à $s + P = F: Q$; 1°. Si s eft de la forme $Mq + Np$, on y appliquera la méthode enfeignée au chapitre I; 2°. fi s contient p & q d'une manière quel-

conque, ces intégrales premières rentrent dans la claſſe des équations que j'ai examinées dans le chapitre II, & on ſuivra, pour leur intégration ultérieure, la même méthode.

Mais il eſt un cas plus compliqué; c'eſt celui où les deux fonctions Ψ, Π, de l'intégrale $\Psi = F:\Pi$, ſont affectées de s; tel ſeroit celui de

$$s^2 + P = F:(s + Q).$$

Il faut alors ſuppoſer

$$s + Q = \text{H}; \text{ d'où } s^2 + P = F:\text{H},$$

&, éliminant s, on a pour première équation,

$$(\text{H} - Q)^2 + P = F:\text{H}.$$

De plus, de $s + Q = \text{H}$, ou $s = \text{H} - Q$, on conclut la valeur de $\frac{dz}{dy}$ ou $\frac{dz}{dx}$ & enſuite celle de dz, comme dans les équations du chapitre II. Cette valeur contiendra dabord l'indéterminée H, & de plus une ſeconde indéterminée p ou q, ſelon qu'on éliminera q ou p; c'eſt à-dire, $\frac{dz}{dy}$ ou $\frac{dz}{dx}$, laquelle ſera déterminée par la condition, que l'équation qui renferme la valeur de dz ſoit réelle, & telle conſéquemment, qu'il eſt expliqué ci-deſſus (§ 12 & 13).

74. Je prendrai pour exemple, $s^2 + x = F:(s + y)$, s étant $= pq$. Soit $s + y = \text{H}$, d'où $s^2 + x = F:\text{H}$; & éliminant s,

$$1^{\circ}.\ (\text{H} - y)^2 + x = F:\text{H};$$

enſuite, à cauſe de $pq = \text{H} - y$, $q = \frac{dz}{dy} = \frac{\text{H} - y}{p}$; ainſi,

$$2^{\circ}.\ dz = p\,dx + \frac{\text{H} - y}{p}\,dy;$$

& enfin, par la condition d'intégrabilité de cette ſeconde équation,

$$3^{\circ}.\ p^2 \frac{dp}{dy} + (\text{H} - y)\frac{dp}{dx} - p\frac{d\text{H}}{dx} = 0.$$

C'eſt par ces trois équations qu'eſt donnée l'intégrale finie de la propoſée.

Pour en conclure une intégrale particulière, ſoit $F: H = H^2$; on aura par la première équation,

$$H = \frac{x + y^2}{2y}, \frac{dH}{dx} = \frac{1}{2y}, \& \; H - y = \frac{x - y^2}{2y}.$$

Subſtituant enſuite ces valeurs dans la troiſième, on aura à intégrer celle

$$2yp^2 \frac{dp}{dy} + (x - y^2) \frac{dp}{dx} - p = 0.$$

Pour y parvenir, qu'on faſſe diſparoître par ma méthode de tâtonnement le dernier terme, en feſant $p^2 = u + 1:y$; & elle deviendra

$$2y \, (u + 1:y) \frac{du}{dy} + (x - y^2) \frac{du}{dx} = 0,$$

dont l'intégrale eſt $u = F:\sigma$, $d\sigma$ étant égale à

$$\mu \left(dx - \frac{x}{2y\,(u + 1:y)} dy + \frac{y}{2\,(u + 1:y)} dy \right).$$

Feſant donc $\mu = \frac{1}{\sqrt{u + 1:y}}$, & intégrant, on aura

$$u = F: \left\{ \frac{1}{\sqrt{u + 1:y}} + \int \frac{y\,dy}{2\sqrt{u + 1:y^3}} \right\}$$

$$= F: \left\{ \frac{x - y^2}{\sqrt{u + 1:y}} + \int \frac{2y\,dy}{\sqrt{u + 1:y}} \right\};$$

& remettant pour u ſa valeur, excepté dans le terme ſous le ſigne intégral,

$$p^2 = 1:y + F: \left\{ \frac{x - y^2}{p} + \int \frac{2y\,dy}{\sqrt{u + 1:y}} \right\}.$$

On pourra donc ſuppoſer $p^2 = 1:y$, & on aura, en vertu de la ſeconde équation,

dz

$$dz = p\,dx + \frac{x-y^2}{2xp}\,dy = dx\sqrt{1:y} + \frac{x-y^2}{2y\sqrt{1:y}}\,dy;\ \&$$

$$z = \text{conft.} + x\sqrt{1:y} - \int\frac{y^2\,dy}{2y\sqrt{1:y}}$$

$$= \text{conft.} + (x-y^2)\sqrt{1:y} + \int 2y\,dy\sqrt{1:y};$$

& cette valeur de z fatisfait en effet à la propofée, d'où dérive la formule $s^2 + x = F:(s+y)$, ou $p^2q^2 + x = F:(pq+y)$; favoir, $2\frac{dz}{dx}\frac{dz^2}{dy}\frac{d^2z}{dx^2} + \left(2\frac{dz^2}{dx}\frac{dz}{dy} + \frac{dz}{dy}\right)\frac{d^2z}{dxdy} + \frac{dz}{dx}\frac{d^2z}{dy^2} + 1 = 0.$

CHAPITRE SEPTIEME.

Des mêmes équations du troifième ordre.

75. SUppofons maintenant que p étant $= \frac{dz}{dx}$, $q = \frac{dz}{dy}$, $r = \frac{dp}{dx} = \frac{d^2z}{dx^2}$, $s = \frac{dp}{dy} = \frac{dq}{dx} = \frac{d^2z}{dxdy}$, $t = \frac{dq}{dy} = \frac{d^2z}{dy^2}$, on ait

$$d\Psi = A\,dz + B\,dx + C\,dy + E\,dp + G\,dq + H\,dr + I\,ds + K\,dt$$

$$d\Pi = M\,dz + N\,dx + P\,dy + Q\,dp + R\,dq + T\,dr + V\,ds + W\,dt.$$

On parviendra, en fubftituant ces valeurs dans $\frac{d\Psi}{dx}\frac{d\Pi}{dy} - \frac{d\Psi}{dy}\frac{d\Pi}{dx} = 0$, à l'équation la plus générale du troifième ordre, fufceptible d'une première intégrale complette. Je commencerai par en faire difparoître, comme dans celles du fecond ordre, tous les termes, où les différences de l'ordre le plus élevé $\frac{dr}{dx}$, $\frac{dr}{dy}$, $\frac{ds}{dx}$, &c. ne font pas linéaires, en fuppofant leurs coëfficiens égaux à zéro; favoir

$$TI - HV = 0,\ TK - HW = 0,\ KV - IW = 0,$$

ou feulement deux de ces trois, la troifième s'enfuivant néceffaire-

ment : & je remarque qu'il faut pour cela, & qu'il suffit que Ψ & Π ne contiennent r, s, t que sous une forme σ; mais cette forme σ pouvant, dans chacune d'elles, être différemment fonctionnée avec les autres variables. De plus, comme je ne puis distinguer, parmi les autres termes, que ceux qui sont affectés de différences du troisième ordre, je regarderai tous ceux qui n'en contiennent pas, comme constituant un seul terme ; & à cause de $\frac{ds}{dx} = \frac{dr}{dy}$, $\frac{ds}{dy} = \frac{dt}{dx}$, j'écrirai l'équation générale résultante de la substitution ci-dessus, de la manière suivante, après en avoir éliminé W & V, au moyen des deux équations $TK - HW = 0$, $TI - HV = 0$. . . . . (A)

$$\left\{(HR - GT)t + (HQ - ET)s + (HM - AT)q + PH - CT\right\} \frac{dr}{dx} + \left\{\frac{I}{H}[HR - GT]t + \left(\frac{I}{H}[QH - ET] + GT - HR\right)s + [ET - HQ]r + \frac{I}{H}[MH - AT]q + [AT - HM]p + BT - HN + \frac{I}{H}[PH - CT]\right\} \frac{dr}{dy} + \left\{\frac{K}{H}[RH - GT]t + \left(\frac{K}{H}[HQ - ET] + \frac{I}{H}[GT - HR]\right)s + \frac{I}{H}[ET - HQ]r + \frac{K}{H}[HM - AT]q + \frac{I}{H}[AT - HM]p + \frac{I}{H}[BT - HN] + \frac{K}{H}[PH - CT]\right\} \frac{dt}{dx} + \frac{K}{H}\left\{(GT - HR)s + (ET - HQ)r + (AT - HM)p + BT - HN\right\} \frac{dt}{dy} + (ER - GQ)rt + (GQ - ER)s^2 + (AR - GM)pt + (EM - AQ)qr + (GM - AR)qs + (AQ - EM)ps + (BR - GN)t + (PG - EN)s + (PE - CQ)r + (BQ - CR)s + (AP - CM)p + (BM - AN)q + BP - CN = 0.$$

Et je ſuppoſerai que la propoſée eſt en général. . . . . (R)

$$\varepsilon'' \frac{dr}{dx} + \gamma'' \frac{dr}{dy} + \delta'' \frac{dt}{dx} + \zeta'' \frac{dt}{dy} + \eta'' = 0,$$

où η'' repréſente tous les termes ſans les plus hautes différences. Comparant enſuite, terme à terme, la partie des deux équations A & R, qui eſt affectée de ces différences, j'aurai quatre équations, d'où réſulteront les deux. . . . . (B)

$$\varepsilon'' KI + \zeta'' H^2 - \gamma'' KH = 0$$

$$\zeta'' HI + \varepsilon'' K^2 - \delta'' KH = 0;$$

& éliminant I. . . . . (Bb)

$$\varepsilon''^2 K^3 - \varepsilon'' \delta'' K^2 H + \gamma'' \zeta'' K H^2 - \zeta''^2 H^3 = 0;$$

équation qui a trois racines, dont chacune pourra fournir une intégrale complette. Soit $\frac{K}{H} = \lambda''$ une de ces racines; on en conclura, en ſubſtituant cette valeur dans l'une des deux équations B,

$$\frac{I}{H} = \frac{\gamma'' \lambda'' - \zeta''}{\varepsilon'' \lambda''} = \omega'';$$

d'où

$$\frac{d\Psi}{dt} = \lambda'' \frac{d\Psi}{dr}, \ \& \ \frac{d\Psi}{ds} = \omega'' \frac{d\Psi}{dr};$$

ce qui ſuffit pour déterminer la fonction σ de r, s, t.

76. En effet, en appliquant ici les mêmes raiſonnemens que ci-deſſus (§ 59, 60), on verra que l'intégrale complette de l'une ou l'autre de ces deux formules, ne peut être que

$$\Psi = F:(P\Gamma' + Q),$$

Γ' étant ce que fournit l'intégration de celle des deux formules qu'on employera de préférence; & P, Q deux fonctions inconnues de la variable qui y eſt traitée comme conſtante. Il ne s'agit donc que de différentier cette dernière formule intégrale, en y ſup-

posant constante, la même variable qui est traitée comme telle, dans la seconde des deux formules ci-dessus ; c'est-à-dire, dans celle qu'on n'a pas employée, & d'en comparer le résultat avec cette même seconde formule.

Qu'on ait, par exemple,

$$t\frac{d\Psi}{dt} - r\frac{d\Psi}{dr} = 0, \ \&$$

$$2s\frac{d\Psi}{dr} - t\frac{d\Psi}{ds} = 0.$$

J'intègre la première, où s est constante, & j'ai

$$\Psi = F:tr.$$

Ainsi $\Gamma' = tr$, & l'intégrale complette est

$$\Psi = F:(Ptr + Q),$$

où P & Q sont fonctions de s seule. Je différentie cette intégrale en supposant t constante, & j'ai

$$(trP' + Q')\frac{d\Psi}{dr} - Pt\frac{d\Psi}{ds} = 0,$$

P' & Q' étant les coëfficiens de ds, dans dP & dQ. Comparant ensuite cette équation avec la seconde ; savoir,

$$2s\frac{d\Psi}{dr} - t\frac{d\Psi}{ds} = 0,$$

où t est aussi constante, il en résulte $P'tr + Q' = 2s$, & $P = 1$; donc $P' = 0$, & $Q' = 2s$, d'où $Q = s^2$; & l'intégrale complette est

$\Psi = F:(tr + s^2)$, ce qui donne $\sigma = tr + s^2$.

Mettant donc pour cette expression, σ dans la proposée, elle prendra la forme d'une équation qui dériveroit de la formule $\Psi = F:\Pi$, où Ψ & Π ne contiennent que σ, p, q, z, x, y ; les quatre premières variables étant elles-mêmes regardées comme fonctions de x & y.

77. Soit donc $d\Psi = a\,d\sigma + b\,dp + e\,dq + f\,d\zeta + g\,dx + h\,dy$

$$d\Pi = k\,d\sigma + l\,dp + m\,dq + n\,d\zeta + v\,dx + w\,dy,$$

& l'équation

$$\frac{d\Psi}{dx}\frac{d\Pi}{dy} - \frac{d\Psi}{dy}\frac{d\Pi}{dx} = 0.$$

On aura, après les ſubſtitutions, l'équation générale. . . . (C)

$$(kb - al)\left(\frac{dp}{dx}\frac{d\sigma}{dy} - \frac{dp}{dy}\frac{d\sigma}{dx}\right) + (ke - am)\left(\frac{dq}{dx}\frac{d\sigma}{dy} - \frac{dq}{dy}\frac{d\sigma}{dx}\right) +$$
$$(kf - an)\left(\frac{d\zeta}{dx}\frac{d\sigma}{dy} - \frac{d\zeta}{dy}\frac{d\sigma}{dx}\right) + (kg - av)\frac{d\sigma}{dy} + (aw - hk)\frac{d\sigma}{dx}$$
$$+ (el - bm)\left(\frac{dp}{dy}\frac{dq}{dx} - \frac{dp}{dx}\frac{dq}{dy}\right) + (fl - bn)\left(\frac{d\zeta}{dx}\frac{dp}{dy} - \frac{d\zeta}{dy}\frac{dp}{dx}\right)$$
$$+ (gl - bv)\frac{dp}{dy} + (bw - hl)\frac{dp}{dx} + (fm - en)\left(\frac{d\zeta}{dx}\frac{dq}{dy} -\right.$$
$$\left.\frac{d\zeta}{dy}\frac{dq}{dx}\right) + (gm - ev)\frac{dq}{dy} + (ew - hm)\frac{dq}{dx} + (gn - fv)\frac{d\zeta}{dy}$$
$$+ (fw - hn)\frac{d\zeta}{dx} + gw - hv = 0$$

qui eſt la forme que prendra la propoſée R, lorſqu'on y aura ſubſtitué σ à la fonction de r, s, t qu'elle repréſente, ſi elle a réellement une intégrale telle que je l'ai ſuppoſée.

Pour effectuer dabord cette ſubſtitution dans les différences partielles, ſoit en général la valeur de σ, qui peut contenir r, s, t, ſans compter les autres variables, telle que

$$\frac{d\sigma}{dx} = \theta\frac{dr}{dx} + \gamma\frac{ds}{dx} + \tau\frac{dt}{dx} + \upsilon = \theta\frac{dr}{dx} + \gamma\frac{dr}{dy} + \tau\frac{dt}{dx} + \upsilon,$$
$$\frac{d\sigma}{dy} = \theta\frac{dr}{dy} + \gamma\frac{ds}{dy} + \tau\frac{dt}{dy} + \text{ȣ} = \theta\frac{dr}{dy} + \gamma\frac{dt}{dx} + \tau\frac{dt}{dy} + \text{ȣ},$$

υ & ȣ comprenant tous les termes des ordres inférieurs, provenant des autres variables. On conclura delà

$$\frac{dr}{dx} = \frac{\frac{d\sigma}{dx} - \varsigma\frac{dr}{dy} - \tau\frac{dt}{dx} - \upsilon}{\theta}, \ \& \ \frac{dt}{dy} = \frac{\frac{d\sigma}{dy} - \theta\frac{dr}{dy} - \varsigma\frac{dt}{dx} - \text{ȣ}}{\tau};$$

& mettant ces valeurs dans

$$\beta''\frac{dr}{dx} + \gamma''\frac{dr}{dy} + \delta''\frac{dt}{dx} + \zeta''\frac{dt}{dy} + \eta'' = 0,$$

non seulement $\frac{dr}{dx}$ & $\frac{dt}{dy}$ disparoîtront, mais $\frac{dr}{dy}$ & $\frac{dt}{dx}$, s'évanouiront aussi : on pourra donc les négliger tout-à-fait, comme (§ 64). En effet, le coëfficient de $\frac{dr}{dy}$ sera

$$\gamma'' - \frac{\beta''\varsigma}{\theta} - \frac{\zeta''\theta}{\tau};$$

& celui de $\frac{dt}{dx}$ sera

$$\delta'' - \frac{\beta''\tau}{\theta} - \frac{\zeta''\varsigma}{\tau}.$$

Or il est aisé de voir que $\theta = \frac{d\sigma}{dr}$, $\varsigma = \frac{d\sigma}{ds}$, $\tau = \frac{d\sigma}{dt}$; & comme, relativement aux variables r, s, t seules, $\Psi = F : \sigma$, il s'ensuit qu'en différentiant successivement cette équation par deux de ces trois variables (§ 59), on aura

$$\frac{d\Psi}{dr}\frac{d\sigma}{dt} - \frac{d\Psi}{dt}\frac{d\sigma}{dr} = 0, \ \frac{d\Psi}{dr}\frac{d\sigma}{ds} - \frac{d\Psi}{ds}\frac{d\sigma}{dr} = 0, \ \& \ \frac{d\Psi}{ds}\frac{d\sigma}{dt} - \frac{d\Psi}{dt}\frac{d\sigma}{ds} = 0;$$

c'est-à-dire,

$$\frac{\frac{d\sigma}{dt}}{\frac{d\sigma}{dr}} = \frac{\tau}{\theta} = \frac{\frac{dt}{d\Psi}}{\frac{dr}{d\Psi}} = \frac{K}{H}; \ \frac{\frac{ds}{d\sigma}}{\frac{dr}{d\sigma}} = \frac{\varsigma}{\theta} = \frac{\frac{ds}{d\Psi}}{\frac{dr}{d\Psi}} = \frac{I}{H}; \ \frac{\frac{ds}{d\sigma}}{\frac{dt}{d\sigma}} = \frac{\varsigma}{\tau} = \frac{\frac{ds}{d\Psi}}{\frac{dt}{d\Psi}} = \frac{I}{K}.$$

Fesant donc ces substitutions, les coëfficiens de $\frac{dr}{dy}$ & $\frac{dt}{dx}$ seront

$$\gamma'' - \beta''\frac{I}{H} - \zeta''\frac{H}{K}; \ \& \ \delta'' - \beta''\frac{K}{H} - \zeta''\frac{I}{K},$$

qui sont évidemment zéro ; puisque ce ne sont que les premiers membres, divisés par KH, des deux équations B (§ 75).

Lorsqu'on aura substitué les valeurs de $\frac{dr}{dx}$ & $\frac{dt}{dy}$ dans

$$\beta'' \frac{dr}{dx} + \gamma'' \frac{dr}{dy} + \delta'' \frac{dt}{dx} + \zeta'' \frac{dt}{dy} + \eta'' = 0 ,$$

on aura, pour *première transformée imparfaite*,

$$\beta'' \tau \frac{d\sigma}{dx} + \zeta'' \theta \frac{d\sigma}{dy} + \eta'' \theta \tau - \beta'' \tau \upsilon - \zeta'' \theta \text{ȣ} = 0.$$

Il ne faudra plus que substituer de même, dans les coëfficiens, σ à la fonction de r, s, t qu'elle représente ; & la nouvelle transformée, que je nommerai *première transformée parfaite*, devra avoir la forme de l'équation C.

78. Supposons que cette opération soit faite, on connoîtra dans la transformée, outre les termes affectés de $\frac{d\sigma}{dx}$, $\frac{d\sigma}{dy}$, ceux qui sont multipliés par les différences du second ordre $\frac{dp}{dx}$, $\frac{dp}{dy}$, $\frac{dq}{dy}$; puisque tous les autres r, s, t, qui appartiennent aux coëfficiens, sont disparus par la substitution ; & comme la condition, à laquelle on a satisfait jusqu'ici, ne concernoit que les termes du troisième ordre de la proposée, voyons à présent quelle sera celle à remplir, par rapport à ceux du second ordre.

Pour cela, je remarque que dans l'équation C, qui n'est que l'équation fondamentale A (§ 75) transformée par la première substitution, les termes du second ordre sont les mêmes que ceux de l'équation générale de cet ordre § (56). Je conclus delà que le coëfficient de $\frac{dp}{dy}\frac{dq}{dx} - \frac{dp}{dx}\frac{dq}{dy}$; c'est-à-dire, $el - bm$, doit aussi être

zéro. J'élimine l, en vertu de cette équation, & je donne par-là à celle C la forme ſuivante. . . . . (D)

$$\frac{b}{e}(ke - am)\left(\frac{dp}{dx}\frac{d\sigma}{dy} - \frac{dp}{dy}\frac{d\sigma}{dx}\right) + (ke - am)\left(\frac{dq}{dx}\frac{d\sigma}{dy} - \frac{dq}{dy}\frac{d\sigma}{dx}\right) + ([kf - an]p + kg - av)\frac{d\sigma}{dy} - ([kf - an]q + hk - aw)\frac{d\sigma}{dx} - \frac{b}{e}([fm - en]q + hm - ew)\frac{dp}{dx} + \left(\frac{b}{e}([fm - en]p + gm - ev) - (fm - en)q - hm + ew\right)\frac{dp}{dy} + ([fm - en]p + gm - ev)\frac{dq}{dy} + (gn - fv)q + (fw - hn)p + gw - hv = o,$$

où il ne reſte plus de $\frac{dp}{dx}, \frac{dp}{dy}, \frac{dq}{dy}$; c'eſt-à-dire, de r, s, t, que linéaires. Je ſuppoſerai de plus, que la première transformée parfaite ſoit repréſentée par. . . . . (S)

$$\beta'\left(\frac{dp}{dx}\frac{d\sigma}{dy} - \frac{dp}{dy}\frac{d\sigma}{dx}\right) + \gamma'\left(\frac{dq}{dx}\frac{d\sigma}{dy} - \frac{dq}{dy}\frac{d\sigma}{dx}\right) + \delta'\frac{d\sigma}{dy} + \zeta'\frac{d\sigma}{dx} + \eta'\frac{dp}{dx} + \vartheta'\frac{dp}{dy} + \lambda'\frac{dq}{dy} + \mu' = o,$$

& comparant entr'eux les coëfficiens correſpondans de $\frac{dp}{dx}, \frac{dp}{dy}, \frac{dq}{dy}$, je parviendrai, comme ci-deſſus (§ 56), à l'équation

$$\lambda' b^2 + \eta' e^2 - \vartheta' be = o\text{; d'où}$$

$$\frac{b}{e} = \frac{\vartheta' \pm \sqrt{\vartheta'^2 - 4\eta'\lambda'}}{2\lambda'}.$$

Il ſera facile de conclure delà l'expreſſion de la forme, ſous laquelle ſe rencontrent p & q. Nommons-la σ', & par cette ſubſtitution, tous les p & q, qui ne ſont pas réellement des différences partielles $\frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy}$ néceſſaires à la forme de la transformée, diſparoîtront. Il

Il fuit de tout ceci; 1°. que fi dans la première transformée parfaite, on ne peut parvenir à rendre les r, s, t linéaires, c'eft une preuve que la propofée n'eft pas fufceptible d'une première intégrale, tèlle que je l'ai fuppofée; & 2°. que lorfqu'on aura fubftitué, comme ci-deffus (§ 64), σ' à la fonction de p & q qu'elle repréfente, dans les différences partielles feulement de cette première transformée parfaite, elle paffera à l'état de *feconde transformée imparfaite*; & il ne s'agira que de faire la même fubftitution dans les coëfficiens, pour avoir la *feconde transformée parfaite*, qui ne fera plus que le réfultat de la différentiation d'une équation $\Psi = F:\Pi$, où Ψ & Π font fonctions de σ, σ', z, x, y.

79. Soit donc $d\Psi = A d\sigma + B d\sigma' + C dz + D dx + E dy$,

$$d\Pi = M d\sigma + N d\sigma' + P dz + Q dx + R dy.$$

On aura, en fubftituant ces valeurs dans $\frac{d\Psi}{dx}\frac{d\Pi}{dy} - \frac{d\Psi}{dy}\frac{d\Pi}{dx} = 0$, l'équation. . . . . (V)

$$(BM - AN)\left(\frac{d\sigma}{dy}\frac{d\sigma'}{dx} - \frac{d\sigma}{dx}\frac{d\sigma'}{dy}\right) + (CM - AP)\left(\frac{dz}{dx}\frac{d\sigma}{dy} - \frac{dz}{dy}\frac{d\sigma}{dx}\right) + (CN - BP)\left(\frac{dz}{dx}\frac{d\sigma'}{dy} - \frac{dz}{dy}\frac{d\sigma'}{dx}\right) + (DM - AQ)\frac{d\sigma}{dy} + (AR - EM)\frac{d\sigma}{dx} + (DN - BQ)\frac{d\sigma'}{dy} + (BR - EN)\frac{d\sigma'}{dx} + (DP - CQ)\frac{dz}{dy} + (CR - EP)\frac{dz}{dx} + DR - EQ = 0$$

qui eft la forme que doit avoir toute feconde transformée parfaite. Prenant donc pour formule générale d'une pareille transformée, l'équation. . . . . (T)

$$\alpha\left(\frac{d\sigma}{dy}\frac{d\sigma'}{dx} - \frac{d\sigma}{dx}\frac{d\sigma'}{dy}\right) + \beta\left(\frac{dz}{dx}\frac{d\sigma}{dy} - \frac{dz}{dy}\frac{d\sigma}{dx}\right) + \gamma\left(\frac{dz}{dx}\frac{d\sigma'}{dy} - \frac{dz}{dy}\frac{d\sigma'}{dx}\right) + \eta\frac{d\sigma}{dy} + \vartheta\frac{d\sigma}{dx} + \delta\frac{d\sigma'}{dy} + \zeta\frac{d\sigma'}{dx} + \iota\frac{dz}{dy} + \kappa\frac{dz}{dx} + \lambda = 0,$$

on la comparera terme à terme avec la précédente V, ce qui fournit les dix équations

1°. $BM - AN = \alpha$; 2°. $CM - AP = \beta$; 3°. $CN - BP = \gamma$; 4°. $DM - AQ = \eta$; 5°. $AR - EM = \vartheta$; 6°. $DN - BQ = \delta$; 7°. $BR - EN = \zeta$; 8°. $DP - CQ = \iota$; 9°. $CR - EP = \varkappa$; 10°. $DR - EQ = \lambda$.

Et de ces dix équations, combinées trois à trois, résultent les dix suivantes, qui ne contiennent que les coëfficiens de l'une des deux différentielles, savoir de $d\Psi$. . . . . (J)

Les 1, 2, 3 donnent	$\gamma A - \beta B + \alpha C = 0.$
1, 4, 6	$\delta A - \eta B + \alpha D = 0.$
1, 5, 7	$\zeta A - \vartheta B - \alpha E = 0.$
2, 4, 8	$\iota A - \eta C + \beta D = 0.$
2, 5, 9	$\varkappa A - \vartheta C - \beta E = 0.$
4, 5, 10	$\lambda A - \vartheta D - \eta E = 0.$
3, 6, 8	$\iota B - \delta C + \gamma D = 0.$
3, 7, 9	$\varkappa B - \zeta C - \gamma E = 0.$
6, 7, 10	$\lambda B - \zeta D - \delta E = 0.$
8, 9, 10	$\lambda C - \varkappa D - \iota E = 0.$

Combinant de nouveau ces dix équations; savoir, les quatre qui ne contiennent point E, entr'elles; puis, les quatre qui ne contiennent point D; & ainsi de suite, on aura les cinq équations de condition suivantes. . . . . (X)

1°. $\gamma\eta - \beta\delta + \alpha\iota = 0$; 2°. $\gamma\vartheta - \zeta\beta + \alpha\varkappa = 0$; 3°. $\delta\vartheta - \zeta\eta + \alpha\lambda = 0$; 4°. $\vartheta\iota - \eta\varkappa + \beta\lambda = 0$; 5°. $\zeta\iota + \gamma\lambda - \varkappa\delta = 0$.

Si on compare deux quelconques de ces équations entr'elles, on verra que chacune d'elles contient six lettres, dont trois leur sont

communes. Ainsi, la troisième & la cinquième ont les trois lettres λ, δ, ζ communes; je les élimine successivement, & j'ai les trois résultantes. . . . . (G)

$$(\alpha\iota + \gamma\eta)\,\zeta - (\alpha\varkappa + \gamma\vartheta)\,\delta = 0,$$
$$(\vartheta\iota + \varkappa\eta)\,\zeta + (\alpha\varkappa + \gamma\vartheta)\,\lambda = 0,$$
$$(\alpha\iota + \gamma\eta)\,\lambda + (\vartheta\iota - \varkappa\eta)\,\delta = 0,$$

qui expriment toutes trois une seule & même chose; savoir, que les 3^{me} & 5^{me} équations de condition ont lieu. Or, si j'ajoute que la 4^{me} a également lieu; c'est-à-dire, que je fasse $\vartheta\iota - \varkappa\eta = -\beta\lambda$, la 2^{de} & la 3^{me} des équations G donneront;

$$\alpha\varkappa + \gamma\vartheta - \beta\zeta = 0,$$

qui est la seconde de celles de condition; &

$$\alpha\iota + \gamma\eta - \beta\delta = 0,$$

qui en est la première.

Il en seroit de même, si dans la première & la seconde des équations G, on réalisoit la seconde équation de condition, en fesant $\alpha\varkappa + \gamma\vartheta = \beta\zeta$, auquel cas on auroit, pour résultats, la première & la quatrième; ou si, dans la première & la troisième des équations G, on fesoit, d'après la première de condition, $\alpha\iota + \gamma\eta = \beta\delta$, d'où résulteroient la seconde & la quatrième. Et comme tout cela aura également lieu, quelles que soient les deux premières équations qu'on employe, il est clair qu'il suffira de vérifier trois quelconques des cinq équations de condition ci-dessus.

80. J'ai exposé la méthode de ramener la proposée R (§ 75), d'abord à la première transformée parfaite S (§ 78), où les $\frac{dp}{dx}$, $\frac{dp}{dy}$, $\frac{dq}{dy}$, sont nécessairement linéaires; & ensuite, à la seconde

S 2

transformée parfaite T (§ 79) où les $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$ le font auffi, & où leurs coëfficiens font liés par trois équations de condition. Je n'ai rien ajouté au fujet de la feconde fubftitution à faire, à l'époque où la propofée paffe de l'état de première transformée parfaite à celui de feconde transformée imparfaite ; puifque je n'aurois pu que répéter ce que j'ai dit à l'occafion des équations du fecond ordre. Il ne me refte qu'à difcuter ici une queftion analogue à celle que j'ai examinée (§ 66); favoir, s'il ne faudra pas quelquefois préparer la première transformée imparfaite, à recevoir la fubftitution qui doit la rendre première transformée parfaite, en la multipliant par un certain facteur; ou, ce qui eft la même chofe (§ 66), fi l'équation D (§ 78) peut être divifible par un facteur fonction de r, s, t, mais autre que la fonction σ elle-même ?

Pour répondre à cette queftion, je donnerai à l'équation D la forme

$$([\mathrm{ke} - \mathrm{am}][\tfrac{\mathrm{b}}{\mathrm{e}}\, r + s] + [\mathrm{kf} - \mathrm{an}]p + \mathrm{kg} - \mathrm{av})\frac{d\sigma}{dy} -$$
$$([\mathrm{ke} - \mathrm{am}][\tfrac{\mathrm{b}}{\mathrm{e}}\, s + t] + [\mathrm{kf} - \mathrm{an}]\, q + \mathrm{hk} - \mathrm{aw})\frac{d\sigma}{dx} +$$
$$AB\frac{dp}{dx} + AE\frac{dp}{dy} + AG\frac{dq}{dy} + AM = 0,$$

A, B, E, G, M étant de nouvelles indéterminées qui n'ont aucun rapport avec toutes les déterminations précédentes ; & par les mêmes raifonnemens que ci-deffus (§ 66), je conclus que le feul facteur poffible eft

$$B\frac{dp}{dx} + E\frac{dp}{dy} + G\frac{dq}{dy} + M;$$

c'eft-à-dire, $Br + Es + Gt + M$; ces indéterminées devant fe

déterminer encore ici par la condition que dans l'équation D, les coëfficiens des différences partielles de σ, étant ainsi multipliés par ce facteur, soient, aussi bien que les indéterminées B, E, G, M elles-mêmes, des fonctions de σ seule, sans mélange de r, s, t.

Au reste, comme il n'y a aucune des équations de condition, qui ne contienne quelqu'une des trois lettres ι, $\varkappa$, λ qui appartiennent aux trois derniers termes de la seconde transformée parfaite T, il est clair qu'on ne pourra en faire la vérification sur la première transformée parfaite. A cette époque, on ne connoît encore rien au-dessous des termes du second ordre ; tous les termes inférieurs ne formant qu'une masse, qui exige une seconde opération, pour son développement.

81. Quant à la préparation dont peut être susceptible, en certains cas, la seconde transformée imparfaite, on doit évidemment y appliquer la règle donnée (§ 66). Je ne m'y arrêterai donc pas, non plus qu'aux autres petites difficultés qui pourroient se présenter, & qu'il seroit trop long de parcourir ici, avec autant de détail que je l'ai fait pour les équations du second ordre ; telle est celle de l'art. 68. On y suppléera facilement soi-même.

Je ne dirai qu'un mot du cas où β'' ou $\zeta'' = 0$ (§ 75), par exemple ζ''. Les deux équations B donnent alors

$$\beta''KI - \gamma''KH = 0, \ \& \ \beta''K^2 - \delta''KH = 0,$$

qui doivent avoir lieu en même tems, ce qui peut arriver de deux manières ; soit parce que $\beta''I - \gamma''H = 0$, & $\beta''K - \delta''H = 0$; soit parce que $K = 0$. Dans le premier cas, il n'y a aucune difficulté, & le calcul fera voir si ce cas a lieu. Dans le second, on ne sauroit rien conclure, sinon que Ψ ne contient pas t. Pour trouver

alors quelle fonction il eſt de r & de s, des deux équations B, j'élimine K, afin d'avoir le rapport $\frac{I}{H}$, lequel eſt donné par une équation du troiſième degré, qui eſt le produit des deux racines

$$\beta'' I - \gamma'' H = 0, \quad \& \quad \beta' I^2 - \gamma' HI + \delta' H^2 = 0,$$

(dans le cas de $H = 0$, j'aurois cherché de même le rapport $\frac{I}{K}$), dont la ſeconde eſt la véritable, lorſque $K = 0$; la première étant celle qui convient au premier cas, & que le calcul doit également donner; puiſqu'on n'a fait qu'éliminer K, ſans rien ſtatuer ſur ſa valeur, qu'on ne peut conclure être zéro, que parce que la première ſuppoſition n'a pas réuſſi.

Si β'' & ζ'' ſont en même tems $= 0$, on a $KH = 0$; c'eſt-à-dire,

ou $K = 0$, ou $H = 0$, ou K & $H = 0$.

Les deux premiers cas retombent dans le précédent; & dans le dernier, on conclura que Ψ ne contient ni r ni t; & par conſéquent que Ψ ne renferme que s des différences partielles du ſecond ordre. σ ſera donc une fonction de s ſeule, & je puis mettre dans la première transformée, s pour σ, & continuer les opérations de la même manière; puiſqu'on eſt ſûr que tous les r & t, qui s'y rencontrent, ſont vraiment $\frac{dp}{dx}$, $\frac{dq}{dy}$.

82. Après avoir ramené, par ces différentes transformations, la propoſée à la forme T (§ 79), il ne reſte qu'à l'intégrer; & pour cela, j'obſerve que les équations J (§ 79) ſont de même nature que celles M (§ 58). Chacune d'elles eſt le réſultat de l'équation qui donne Ψ, différentiée par rapport à trois ſeulement des cinq variables σ, σ', ζ, x, y, que Ψ peut renfermer. Appliquant donc

ici le même raiſonnement que pour le ſecond ordre, je prendrai une quelconque de ces équations ; & l'ayant intégrée, ſoit

$$\Psi = F:(\Gamma', \Omega')$$

l'intégrale trouvée. J'en conclus que Ψ ne peut être que

$$\Psi = F:(P\Gamma' + Q,\ G\Omega' + H);$$

P, Q, G, H étant des fonctions des deux variables qui n'ont pas varié dans l'équation qu'on a employée. J'aurai donc

$$P\Gamma' + Q = F:(G\Omega' + H),$$

d'où feſant diſparoître la fonction arbitraire, je dois trouver une équation identique à la ſeconde transformée parfaite que j'ai à intégrer. Et c'eſt par cette conſidération que je déterminerai les indéterminées P, Q, G, H.

Cette méthode d'intégration eſt devenue aſſez compliquée dans le troiſième ordre ; ce qu'il faut attribuer à la double transformation qu'elle exige : & il eſt indubitable, que cette complication augmentera, avec l'expoſant de l'ordre des équations à réſoudre ; puiſque cet ordre étant n, il y aura toujours $n - 1$ transformations à faire ſubir à la propoſée. Je vais préſentement appliquer cette méthode à un exemple, afin d'en rendre la marche plus facile à ſuivre.

83. Soit propoſée à intégrer, l'équation du troiſième ordre

$$(2tzxy^2q - tx^2)\frac{dr}{dx} + (4zsxqy^2 - 2tzxpy^2 - txy - 2sx^2)\frac{dr}{dy} + (2rzxqy^2 - 4szxpy^2 - 2sxy - rx^2)\frac{dt}{dx} - (2rzxpy^2 + rxy)\frac{dt}{dy} + 2q^2zry^2 - 2p^2zty^2 - pty - pxs - qys - qxr - x^2py - 2z^2pxy^2 + 2qrtzy^2 + 2qs^2zy^2 + 2qz^2y^3 - qxy^2 - trx - s^2x - 2zxy = 0.$$

Je trouve, pour une des racines de la résultante Bb des deux équations B, $\frac{K}{H} = \frac{r}{t}$, d'où $\frac{I}{H} = \frac{2s}{t}$; c'est-à-dire,

$$t\frac{d\Psi}{dt} - r\frac{d\Psi}{dr} = 0, \ \& \ t\frac{d\Psi}{ds} - 2s\frac{d\Psi}{dr} = 0,$$

dont j'ai déjà conclu (§ 76)

$$\Psi = F:(tr + s^2), \ \& \ \sigma = tr + s^2.$$

J'ai par-là (§ 77) $\theta = t$, $\imath = 2s$, $\tau = r$, υ & $\varepsilon = 0$; ainsi la première transformée imparfaite sera

$(2zxy^2q - x^2)\frac{d\sigma}{dx} - (2zxy^2p + xy)\frac{d\sigma}{dy} +$ *le terme sans différence partielle du troisième ordre* $= 0$,

& fesant dans ce dernier terme, $s^2 = \sigma - tr$, on aura, pour première transformée parfaite S (§ 78),

$$(2zxy^2q - x^2)\frac{d\sigma}{dx} - (2zxy^2p + xy)\frac{d\sigma}{dy} + (2q^2zy^2 - qx)\frac{dp}{dx}$$
$$- (px + qy)\frac{dp}{dy} - (2p^2zy^2 + py)\frac{dq}{dy} - px^2y - 2pz^2xy^2 +$$
$$2\sigma qzy^2 + 2z^2qy^3 - qxy^2 - \sigma x - 2zxy = 0.$$

Je passe maintenant à la recherche de la seconde transformée imparfaite ; & prenant de cette dernière équation la valeur des trois coëfficiens η', ϑ', λ', je trouve

$$\frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{e}} = \frac{-(px + qy) \pm (px - qy - 4pqzy^2)}{-2(py + 2p^2zy^2)};$$

c'est-à-dire,

$$\frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{e}} = \frac{q}{p}\ ; \text{ ou } \frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{e}} = \frac{x - 2qzy^2}{y + 2pzy^2}.$$

De la première valeur je conclus $\sigma' = pq$, d'où mettant σ' au lieu de s (§ 64), $\theta = q$, $\imath = p$, υ & $\varepsilon = 0$. J'ai donc pour seconde transformée imparfaite,

$(2zxy^2q - x^2)$

$(2\zeta xy^2 q - x^2)\frac{d\sigma}{dx} - (2p\zeta xy^2 + xy)\frac{d\sigma}{dy} + (2\zeta y^2 q - x)\frac{d\sigma'}{dx}$
$- (2p\zeta y^2 + y)\frac{d\sigma'}{dy} - (x^2 y + 2\zeta^2 xy^2)\,p + (2\sigma\zeta y^2 + 2\zeta^2 y^3$
$- xy^2)\,q - 2\zeta xy - \sigma x = 0,$

où tous les p & q étant linéaires, il n'y a plus de ſubſtitution à faire; & cette transformée eſt en même tems la ſeconde transformée parfaite, p & q étant $\frac{d\zeta}{dx}, \frac{d\zeta}{dy}$. On a donc, en la comparant à celle T (§ 79), & l'écrivant ſous la même forme. . . (L)

$2\zeta xy^2\left(\frac{d\zeta}{dx}\frac{d\sigma}{dy} - \frac{d\zeta}{dy}\frac{d\sigma}{dx}\right) + 2\zeta y^2\left(\frac{d\zeta}{dx}\frac{d\sigma'}{dy} - \frac{d\zeta}{dy}\frac{d\sigma'}{dx}\right) + yx\frac{d\sigma}{dy} + x^2\frac{d\sigma}{dx}$
$+ y\frac{d\sigma'}{dy} + x\frac{d\sigma'}{dx} + (xy^2 - 2\sigma\zeta y^2 - 2\zeta^2 y^3)\frac{d\zeta}{dy} + (2\zeta^2 xy^2 +$
$x^2 y)\frac{d\zeta}{dx} + 2\zeta xy + \sigma x = 0,$

où il eſt aiſé de voir que les équations de condition X ont lieu.

84. Il ne s'agit donc plus que de l'intégrer. Pour cela, je prends une quelconque des équations J, celle que je croirai la plus facile à intégrer, par exemple, $\lambda A - \vartheta D - \eta E = 0$, qui eſt ici

$$(2\zeta y + \sigma)\frac{d\Psi}{d\sigma} - x\frac{d\Psi}{dx} - y\frac{d\Psi}{dy} = 0,$$

où σ' & ζ ſont traitées comme conſtantes. Et j'en trouve l'intégrale

$$\Psi = F{:}\left(\sigma x + \zeta xy, \frac{x}{y}\right).$$

J'ai donc (§ 82) $\Gamma' = \sigma x + \zeta xy$, $\Omega' = \frac{x}{y}$, d'où

$$P\,(\sigma x + \zeta xy) + Q = F{:}\left(G\frac{x}{y} + H\right)$$

(P, Q, G, H étant des fonctions inconnues de σ' & ζ) eſt l'intégrale complette cherchée; & éliminant delà la fonction

T

arbitraire, je dois retrouver la feconde transformée parfaite L. Soit donc $dP = pd\zeta + p'd\sigma'$, $dQ = qd\zeta + q'd\sigma'$, $dG = gd\zeta + g'd\sigma'$, $dH = hd\zeta + h'd\sigma'$. On fuppofera (§ 79)

$$\Psi = P\,(\sigma x + \zeta xy) + Q,\ \Pi = G\frac{x}{y} + H\,;$$

& on conclura delà les valeurs des coëfficiens A, B, &c.; favoir, $A = Px$, $B = (\sigma x + \zeta xy)\,p' + q'$, $C = Pxy + (\sigma x + \zeta xy)\,p + q$, $D = P\sigma + P\zeta y$, $E = P\zeta x$, $M = 0$, $N = \frac{x}{y}\,g' + h'$, $P = \frac{x}{y}\,g + h$, $Q = \frac{G}{y}$, $R = -\frac{Gx}{y^2}$.

On a dabord ici $\alpha = BM - AN = 0$; puifque le premier terme de T (§ 79) manque dans L (§ 83): & comme M eft auffi = 0, il faudra que AN = 0. Or ce ne peut pas être A qui foit = 0; car alors Px (= A) & conféquemment P devroit de même être zéro, ce qui eft abfurde. Ce fera donc $N = \frac{x}{y}\,g' + h'$ qui fera = 0; & parce que g' & h' ne contiennent ni x ni y, on voit qu'il réfulte delà g' & $h' = 0$; ce qui exige en outre que G & H ne contiennent point σ', & foient auffi bien que g, h, fonctions de ζ feule.

Maintenant, je multiplie l'équation L par le facteur indéterminé ω, & j'ai

$\varepsilon = -AP = -\left(\frac{x^2}{y}\,gP + hxP\right) = 2\zeta xy^2\omega$,

$\gamma = -BP = -\left([\sigma x + \zeta xy]\,p' + q'\right)\left(\frac{x}{y}\,g + h\right) = 2\zeta y^2\omega$.

En multipliant la feconde de ces équations par x, fon fecond membre devient identique à celui de la première; il en fera donc de même des premiers membres de ces deux équations; & divifant

par $\frac{x^2}{y} g + hx$, on verra que $p' = 0$, & $P = q'$; puiſque P ne peut contenir ni σ, ni x, ni y. Ainſi P & q' ne contiennent point σ'; & ces deux équations ſe réduiſent à

$$\gamma = - q' \left(\frac{x}{y} g + h \right) = 2\zeta x y^2 \omega.$$

Il vient enſuite $\delta = - \text{BQ} = - \frac{G}{y} q'$ (à cauſe de $p' = 0$) $= y\omega$, ou $Gq' = - \omega y^2$. Or G & q' ne ſont pas fonctions de y; donc $\omega = \frac{-1}{y^2}$, & $Gq' = 1$. D'ailleurs, par l'équation précédente, $- q' \left(\frac{x}{y} g + h \right) = - 2\zeta$; & comme g, fonction de ζ ſeule, ne peut faire diſparoître x qui n'exiſte pas dans le ſecond membre, qu'en étant $= 0$, on aura $g = 0$, & $q'h = 2\zeta$. On a de plus, en vertu des déterminations précédentes,

$$\zeta = \text{BR} = - \frac{q' G x}{y^2} = - \frac{x}{y^2}.$$

Donc $Gq' = 1$, ce qu'on ſavoit déjà; puis

$$\eta = - \text{AQ} = - \frac{PGx}{y} = - \frac{x}{y},$$

d'où $PG = 1$, ce qu'on ſavoit auſſi, & ce qui eſt conforme à l'équation ſuivante

$$\vartheta = \text{AR} = - \frac{PGx^2}{y^2} = - \frac{x^2}{y^2}.$$

Enſuite

$$\iota = \text{DP} - \text{CQ} = Ph\,(\sigma + \zeta y) - x - \frac{G}{y}\left([\sigma x + \zeta x y] p + q \right)$$
$$= - x + 2\zeta\,(\sigma + \zeta y),$$

d'où ſuit évidemment $Ph = 2\zeta$, & $p = 0$, $q = 0$; & comme on a d'ailleurs $p' = 0$, il faut que $P = 1$, $G = 1$, & $h = 2\zeta$.

On a encore $\varkappa$ = CR — EP = (en vertu de ces dernières déterminations) $-\frac{x^2}{y} - 2\zeta^2 x$; & λ = DR — EQ = $-\frac{\sigma x}{y^2} - \frac{2\zeta x}{y}$, qui, à cause de $\omega = -\frac{1}{y^2}$, sont toutes deux conformes aux coëfficiens correspondans de l'équation L. On a donc, en resumant, $P = 1$, $G = 1$, p & $p' = 0$, g & $g' = 0$; $q' = 1$, $q = 0$, d'où $Q = \sigma'$; $h = 2\zeta$, $h' = 0$, d'où $H = \zeta^2$; & l'intégrale cherchée est

$$\sigma x + \sigma' + \zeta xy = F: (\zeta^2 + \frac{x}{y});$$

c'est-à-dire, mettant pour σ & σ' leurs valeurs,

$$(tr + s^2)\, x + pq + \zeta xy = F: (\zeta^2 + \frac{x}{y}).$$

On a vu en même tems, comme je l'ai dit ci-dessus (§ 63), la manière simple dont se détermine le facteur indéterminé ω.

Sans pousser plus loin ces recherches dans les ordres supérieurs, on peut conclure de ceci, que cette méthode réussira dans tous les cas où l'intégrale cherchée sera telle, que σ, σ', &c. représentant des fonctions déterminées des différences partielles de chaque ordre ; c'est-à-dire, σ' de p, q ; σ, de r, s, t ; &c., on puisse l'exprimer par $\Psi = F: \Pi$, où Ψ & Π sont des fonctions quelconques déterminées de ζ, x, y, σ, σ', &c.

85. L'intégrale de ces équations du troisième ordre est, comme on vient de voir, une équation du second ordre de la forme $\Psi = F: \Pi$; ces deux fonctions contenant σ, σ', ζ, x, y ; & σ, σ' étant elles-mêmes fonctions ; l'une de r, s, t ; & l'autre de p, q. Il s'agit alors de procéder à l'intégration ultérieure d'un pareil résultat. Pour cela, je commencerai par distinguer toutes ces intégrales en deux classes ; la première renfermera celles où une

feule des deux fonctions, par exemple Ψ, contient σ & σ' ; & dans la feconde, feront comprifes toutes les autres.

La première claffe préfente donc fimplement à intégrer, une équation du fecond ordre, dans laquelle les différences partielles des deux ordres peuvent être élevées à un degré quelconque; & il faudra, pour cette claffe, une nouvelle méthode d'intégration, comme j'en ai donné une pour les équations du premier ordre.

Quant au fecond cas, qui eft plus compliqué, je me referve à parler des équations qui y ont rapport, lorfque j'aurai donné cette nouvelle méthode, dont leur intégration dépend en grande partie.

Comme, fous la dénomination d'équations du fecond ordre d'un degré quelconque, on comprend en géneral toutes celles où les différences partielles de cet ordre font, ou élevées à quelque puiffance au-deffus de l'unité, ou multipliées entr'elles, il eft naturel de commencer par l'équation même de l'art. 56, qui, lorfque ε n'eft pas $= 0$, contient les termes $\frac{d^2 z}{dy^2} \frac{d^2 z}{dx^2}$ & $\frac{d^2 z^2}{dxdy}$, & qui fait, pour ainfi dire, la première nuance de ces équations. Ce fera le fujet du chapitre qui va fuivre immédiatement J'examinerai enfuite les autres équations comprifes dans cette définition, qui conftituent une claffe tout-à-fait différente.

CHAPITRE HUITIEME.

Recherches ultérieures fur l'équation générale du fecond ordre (§ 56).

86. UN cas très-fimple que préfente cette équation, & fans contredit le plus fimple de tous, eft celui où tous les coëfficiens,

excepté ϵ, font zéro. Cette équation fe réduit alors à

$$\frac{d^2 z}{dy^2}\frac{d^2 z}{dx^2} - \frac{d^2 z^2}{dx dy} = 0, \text{ ou } \frac{dp}{dx}\frac{dq}{dy} - \frac{dp}{dy}\frac{dq}{dx} = 0.$$

Or on fait, & il ne feroit point difficile de trouver que l'intégrale d'une pareille équation eft $p = f: q$, ou $\frac{dz}{dx} = f: \frac{dz}{dy}$.

Vient enfuite le cas, où tous les termes fans différence partielle du fecond ordre font nuls ; c'eft-à-dire, que dans l'équation A (§ 56),

$$BM - AN = 0, \; AP - CM = 0, \; BP - CN = 0,$$

ou feulement deux de ces trois équations ; puifque la troifième s'enfuit néceffairement. On verra aifément, d'après ce qui a été dit (§ 57), que cela aura lieu, lorfqu'ayant nommé s la totalité des termes qui contiennent z, x, y, dans l'une des deux fonctions Ψ ou Π, une fonction quelconque déterminée de s pourra repréfenter la fomme de ceux qui contiennent les trois mêmes variables dans l'autre. Or, fi dans les 2^de^, 3^me^, & 4^me^ des cinq équations G, on fait $AP - CM = 0$, $BP - CN = 0$, & qu'on élimine enfuite P, Q, R, on aura pour réfultat, ... (V)

$$\gamma\,(Ap + B)^2 + \zeta\,(Ap + B)\,(Aq + C) + \eta\,(Aq + C)^2 = 0,$$

d'où, prenant la racine, remettant pour A, B, C, leurs valeurs $\frac{d\Psi}{dz}, \frac{d\Psi}{dx}, \frac{d\Psi}{dy}$, & fefant

$$\frac{-\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 4\gamma\eta}}{2\gamma} = \lambda,$$

on conclura

$$(\lambda q - p)\frac{d\Psi}{dz} - \frac{d\Psi}{dx} + \lambda\frac{d\Psi}{dy} = 0,$$

dont l'intégrale donnera Ψ par rapport à z, x & y feulement ; c'eft-

à-dire, qu'elle déterminera la fonction s de ces trois variables, en traitant p & q, si elles s'y rencontrent, comme des constantes.

Supposons maintenant que dans la proposée on ait substitué s à sa fonction équivalente : elle auroit évidemment pris la forme de l'équation que produit la formule $\Psi = F: \Pi$, Ψ & Π ne contenant que p, q & s. Or en fesant

$$d\Psi = \mathrm{a}\,dp + \mathrm{b}\,dq + \mathrm{e}\,ds,$$
$$d\Pi = \mathrm{m}\,dp + \mathrm{n}\,dq + \mathrm{r}\,ds,$$

& mettant ces valeurs dans $\frac{d\Psi}{dx}\frac{d\Pi}{dy} - \frac{d\Psi}{dy}\frac{d\Pi}{dx} = 0$, il en résulte

$$(\mathrm{an} - \mathrm{bm})\left(\frac{dp}{dx}\frac{dq}{dy} - \frac{dp}{dy}\frac{dq}{dx}\right) + (\mathrm{em} - \mathrm{ar})\left(\frac{ds}{dx}\frac{dp}{dy} - \frac{ds}{dy}\frac{dp}{dx}\right) +$$
$$(\mathrm{en} - \mathrm{br})\left(\frac{ds}{dx}\frac{dq}{dy} - \frac{ds}{dy}\frac{dq}{dx}\right) = 0,$$

qui feroit conséquemment la nouvelle forme de la proposée; & telle, qu'en y remettant de nouveau pour $\frac{ds}{dx}$, $\frac{ds}{dy}$ leurs valeurs, elle devroit nécessairement reproduire cette même proposée, sous sa première forme.

Soit donc la valeur de s, qui est en général fonction de p, q, z, x, y, telle que

$$ds = \Sigma dp + \Delta dq + \Theta dz + \Lambda dx + \Xi dy\text{; d'où}$$
$$\frac{ds}{dx} = \Sigma\frac{dp}{dx} + \Delta\frac{dp}{dy} + \Theta p + \Lambda,$$
$$\frac{ds}{dy} = \Sigma\frac{dp}{dy} + \Delta\frac{dq}{dy} + \Theta q + \Xi.$$

La substitution de ces valeurs dans l'équation précédente, en l'ordonnant de la même manière que la proposée, la change en

$$(\overline{\mathrm{an} - \mathrm{bm}} + \overline{\mathrm{en} - \mathrm{br}}\,\Sigma - \overline{\mathrm{em} - \mathrm{ar}}\,\Delta)\left(\frac{dp}{dx}\frac{dq}{dy} - \frac{dp}{dy}\frac{dq}{dx}\right) - \overline{\mathrm{em}}$$

$\overline{-\text{ar}}\,[\Theta q + \Xi]\,\frac{dp}{dx} + (\overline{\text{em} - \text{ar}}\,[\Theta p + \Lambda] - \overline{\text{en} - \text{br}}\,[\Theta q + \Xi])$
$\frac{dp}{dy} + \overline{\text{en} - \text{br}}\,[\Theta p + \Lambda]\,\frac{dq}{dy} = 0.$

Ainsi, selon ce que nous venons de dire, cette dernière équation doit coïncider terme à terme avec la proposée

$$\varepsilon\left(\frac{dp}{dx}\frac{dq}{dy} - \frac{dp}{dy}\frac{dq}{dx}\right) + \gamma\frac{dp}{dx} + \zeta\frac{dp}{dy} + \eta\frac{dq}{dy} = 0:$$

& on conclut delà les quatre équations. . . . . (D)

$$\overline{\text{an} - \text{bm}} + \overline{\text{en} - \text{br}}\;\Sigma - \overline{\text{em} - \text{ar}}\;\Delta = \varepsilon,$$
$$\overline{\text{em} - \text{ar}}\,(\Theta q + \Xi) = \gamma,$$
$$\overline{\text{em} - \text{ar}}\,(\Theta p + \Lambda) - \overline{\text{en} - \text{br}}\,(\Theta q + \Xi) = \zeta,$$
$$\overline{\text{en} - \text{br}}\,(\Theta p + \Lambda) = \eta,$$

dont les trois dernières donnent dabord. . . . . (O)

$\gamma\,(\Theta p + \Lambda)^2 + \zeta\,(\Theta p + \Lambda)(\Theta q + \Xi) + \eta\,(\Theta q + \Xi)^2 = 0.$

Ensuite on tire des première, seconde & quatrième, en éliminant m, n, r, & remettant pour a, b, e, leurs valeurs $\frac{d\Psi}{dp}$, $\frac{d\Psi}{dq}$, $\frac{d\Psi}{ds}$, (K)

$\eta\,(\Theta q + \Xi)\,\frac{d\Psi}{dp} + \gamma\,(\Theta p + \Lambda)\,\frac{d\Psi}{dq} + (\eta\Sigma\,[\Theta q + \Xi] + \gamma\Delta$
$[\Theta p + \Lambda] - \varepsilon\,[\Theta q + \Xi]\,[\Theta p + \Lambda])\,\frac{d\Psi}{ds} = 0,$

qui en vertu de celle O, & divisant par $\Theta q + \Xi$, est la même chose que. . . . . (k)

$$\eta\,\frac{d\Psi}{dp} + \gamma\lambda\,\frac{d\Psi}{dq} + (\eta\Sigma + \gamma\lambda\Delta - \varepsilon\,[\Theta p + \Lambda])\,\frac{d\Psi}{ds} = 0.$$

On peut négliger la première O de ces deux équations, comme étant nécessairement identique par elle-même. En effet, $\Theta p + \Lambda$

&

& $\Theta q + \Xi$ n'étant autre chose que $\frac{ds}{dz}\frac{dz}{dx} + \frac{ds}{dx}$ & $\frac{ds}{dz}\frac{dz}{dy} + \frac{ds}{dy}$, sont évidemment proportionnels à $\frac{d\Psi}{dz}\frac{dz}{dx} + \frac{d\Psi}{dx}$ & $\frac{d\Psi}{dz}\frac{dz}{dy} + \frac{d\Psi}{dy}$, ou à $Ap + B$ & $Aq + C$; puisque $\Psi = f:s$ (en regardant seulement z, x, & y comme variables) donne $d\Psi = ds\, f':s$, c'est-à-dire $\frac{d\Psi}{dz} = \frac{ds}{dz} f:s$; &c. ainsi cette équation O est précisément la même que celle V ci-dessus, qui a servi à déterminer s.

Quant à la seconde K, elle présente à intégrer, une équation ordinaire à quatre variables, où la variable principale est Ψ, & les trois autres sont p, q, s. Mais pour cela il faut que ses coëfficiens ne renferment aucune des variables z, x, y; c'est-à-dire, qu'elles ne doivent s'y rencontrer que sous une forme telle, que par la substitution de s à la fonction de ces trois mêmes variables qu'elle représente, on puisse les faire toutes disparoître ; ce qui aura nécessairement lieu, si la proposée est de la classe des équations dont il s'agit ici, & que la valeur de s qu'on a adoptée (car il s'en présente plusieurs en même tems) soit la véritable. On aura alors un résultat de la forme $\Psi = F:(\Gamma, \Omega)$ d'où, comme on a vu ci-dessus, on conclura, pour intégrale de la proposée, $\Gamma = F:\Omega$: & il ne s'agira plus que de substituer à s sa valeur.

Prenons pour exemple

$$(p^2 - q^2)\left(\frac{dp}{dx}\frac{dq}{dy} - \frac{dp}{dy}\frac{dq}{dx}\right) + pqx\frac{dp}{dx} + (q^2x - p^2x - pz)\frac{dp}{dy} - (pqx + qz)\frac{dq}{dy} = 0.$$

On a ici $\beta = p^2 - q^2$, $\gamma = pqx$, $\zeta = q^2x - p^2x - pz$, $\eta = -(pqx + qz)$, & ensuite

$$\lambda = \frac{-(q^2x - p^2x - pz) \pm (q^2x + p^2x + pz)}{2pqx},$$

d'où $\lambda = -\frac{q}{p}$, ou $\lambda = \frac{px+z}{qx}$. On tire de la première valeur,

$$q\frac{d\Psi}{dy} + p\frac{d\Psi}{dx} + (p^2 + q^2)\frac{d\Psi}{dz} = 0,$$

& intégrant, $\Psi = F:(qx - py, qz - [p^2 + q^2]y)$; & de la feconde,

$$(px + z)\frac{d\Psi}{dy} - qx\frac{d\Psi}{dx} + qz\frac{d\Psi}{dz} = 0$$

dont l'intégrale eft $\Psi = F:(zx, px + qy - z)$.

87. On ne doit être étonné ; ni de cette double expreffion de la valeur de s, puifque dans toutes les intégrations des équations du fecond ordre on a pu remarquer cette même circonftance qui renferme la poffibilité de deux premières intégrales complettes de l'ordre inférieur; ni de la forme de chacune de ces deux valeurs, puifqu'elles dérivent d'une équation à quatre variables, ce qui a toujours lieu lorfque la fonction cherchée en contient trois, comme ici s peut généralement contenir z, x, & y (§ 34). Si on employe les deux premières; c'eft-à-dire, celles qui proviennent de la première valeur de Ψ, on ne parviendra point à faire difparoître, comme il feroit néceffaire, tous les z, x, & y, de l'équation K. Ainfi cette valeur de Ψ ne convient point. Mais en fe fervant de la feconde, on y réuffit, tant au moyen de $s = zx$, que de $s = px + qy - z$. Il y a cependant, entre ces deux valeurs, une différence très-grande; c'eft qu'en vertu de cette dernière fuppofition, l'équation K ne devient identique que parce que $\Theta p + \Lambda$, & $\Theta q + \Xi$ font nuls, ce qui ne nous apprend rien; au lieu que la fuppofition de $s = zx$ donne, comme on va voir, une folution réelle.

En effet, on en conclut $\Sigma = o$, $\Delta = o$, $\Theta = x$, $\Lambda = z$, $\Xi = o$; d'où il résulte, en substituant dans K ces valeurs, y mettant aussi pour γ, η, ε les leurs, & enfin en réduisant,

$$q\frac{d\Psi}{dp} - p\frac{d\Psi}{dq} + (p^2 - q^2)\frac{d\Psi}{ds} = o,$$

qui ne contient plus ni z, ni x, ni y; & dont l'intégrale donne, pour celle de la proposée, $p^2 + q^2 = F{:}\,(pq + s)$, ou remettant pour s sa valeur,

$$p^2 + q^2 = F{:}\,(pq + zx),$$

qui est l'intégrale cherchée.

88. Maintenant, si on fait attention à l'équation V qui a servi à déterminer s, on verra qu'elle devient identique dans tous les cas indépendamment des coëfficiens γ, ζ, η, en fesant $Ap + B = o$ & $Aq + C = o$; c'est-à-dire, $\Theta p + \Lambda = o$ & $\Theta q + \Xi = o$; ou $p\frac{ds}{dz} + \frac{ds}{dx} = o$ & $q\frac{ds}{dz} + \frac{ds}{dy} = o$. Ainsi, si une seule & même valeur de s donne à la fois ces deux équations, cette valeur sera néceſſairement, dans tous les cas, une de celles que fournira l'équation V. Pour la déterminer, j'intègre la première des équations précédentes où y est traitée comme constante; & je trouve $s = F{:}\,(px - z)$; d'où la valeur complette de s (§ 76) sera

$$s = F{:}\,(P\overline{px - z} + Q),$$

P & Q étant des fonctions de y seule, qu'on déterminera facilement en différentiant cette valeur de s par z & y, & comparant le résultat avec la seconde équation $q\frac{ds}{dz} + \frac{ds}{dy} = o$; ce qui donnera $P = 1$, $Q = qy$. La valeur de s pour ce cas est donc $s = F{:}\,(px + qy - z)$, & c'est effectivement une de celles qui se

font préfentées dans l'exemple précédent. On peut en outre remarquer que cette valeur fatisfera toujours, quoique d'une manière infignifiante, comme on a vu dans ce même exemple, à l'équation K; puifque la fuppofition de $\Theta p + \Lambda = o$, & $\Theta q + \Xi = o$ la rend auffi identique.

Cette fauffe valeur de s, quoique toujours *effentiellement* préfente, ne fera cependant pas toujours *formellement* vifible. Quelquefois elle fe cachera fous la forme du fyftême des deux *co-fonctions* (je nomme ainfi les deux fonctions fimultanées qui conftituent la valeur complette d'une variable principale Ψ, telles que font Γ & Ω dans $\Psi = F\colon [\Gamma, \Omega]$) de manière à ce qu'on ne puiffe la diftinguer. On en appercevra facilement la raifon, fi on fe rappelle ce que j'ai obfervé ci-deffus, favoir; que l'équation $\Psi = F\colon (\Gamma, \Omega)$ peut indiftinctement prendre la forme quelconque

$$\Psi = F\colon ((\Gamma, \Omega), [\Gamma, \Omega]).$$

En effet, la première formule provient de $d\Psi = A\,d\Gamma + B\,d\Omega$, A & B étant des arbitraires qui ne font liées entr'elles que par la loi $\frac{dA}{d\Omega} = \frac{dB}{d\Gamma}$. Or pour réduire cette équation différentielle à celle

$$d\Psi = M\,(a\,d\Gamma + b\,d\Omega) + N\,(g\,d\Gamma + h\,d\Omega)$$

d'où réfulteroit la feconde, il fuffit de faire $A = Ma + Ng$, $B = Mb + Nh$; ce qui eft toujours poffible.

On a un exemple de ceci dans la première expreffion de Ψ (§ 86), favoir;

$$\Psi = F\colon (qx - py,\ qz - [p^2 + q^2]\,y),$$

qui ne paroît pas contenir la fonction $px + qy - z$. Il eft cependant facile de s'afsûrer qu'elle y exifte, en fefant dâns

$$q\frac{d\Psi}{dy} + p\frac{d\Psi}{dx} + (p^2 + q^2)\frac{d\Psi}{dz} = 0,$$

d'où dérive cette expreſſion, $\Psi = px + qy - z$. Il arrive en effet que par-là cette équation devient identique : & pour retrouver cette fonction $px + qy - z$, il ſuffira d'ôter celle $qz - p^2y - q^2y$ de ſa co-fonction $qx - py$, après avoir multiplié celle-ci par p qui eſt ici conſtante. On aura pour reſte, $q\ (px + qy - z)$; & on verra qu'on peut donner à l'expreſſion de Ψ ci-deſſus, la forme

$$\Psi = F : (qx - py, px + qy - z).$$

89. Cette circonſtance pourroit même ſouvent induire ici en erreur, en perſuadant qu'il n'exiſte point de valeur de s qui ſatisfaſſe à la condition indiſpenſable de réduire l'équation K aux ſeules variables p, q, s, lors même qu'il y en a une. En effet, quoique la fauſſe valeur $px + qy - z$ rende cette équation identique, auſſi bien que la véritable valeur de s, comme elle ne produit cet effet que parce qu'elle anéantit les quantités $\Theta p + \Lambda$, $\Theta q + \Xi$, & nullement en vertu d'une valeur qu'elle aſſigne à la variable principale Ψ, on ſent que toute détermination qui dépend de cette valeur à aſſigner, ne peut manquer d'être dénaturée par le mélange de la fonction $px + qy - z$. Ainſi avant de conclure qu'une équation n'eſt point intégrable par la méthode préſente, il faut s'aſſûrer que les valeurs dont on a fait l'eſſai, n'étoient point compliquées de celle $px + qy - z$.

Pour rendre ceci plus intelligible, ſuppoſons

$\epsilon = py + qx$, $\gamma = -(2q^2z + pq)$, $\zeta = -(p^2 + q^2)$, $\eta = 2p^2z - pq$.

On trouve pour une des valeurs de λ,

$\lambda = \frac{2p\zeta - q}{2q\zeta + p}$, d'où $\Psi = F: (px + qy - \zeta, q\zeta - p\zeta^2 - [p^2 + q^2]y)$.
Il femble dabord que la feconde fonction doit être la véritable valeur de s; & comme on s'apperçoit bientôt qu'elle ne remplit pas la condition ci-deffus, il eft affez naturel de croire que cette expreffion de Ψ ne fournit point de valeur convenable. Avant de porter ce jugement, examinons fi cette fonction n'eft point un compofé de cette véritable valeur que nous ne connoiffons point, & de celle $px + qy - \zeta$; c'eft-à-dire, effayons de combiner en-tr'elles ces deux co-fonctions, de manière à en dégager la valeur réelle de s. Pour cela, je multiplie la première fonction $px + qy - \zeta$ par q, qui eft ici conftante auffi bien que p; je l'ajoute à la feconde, & la fomme en eft $p\ (qx - py - \zeta^2)$. J'effaye donc la valeur $s = \zeta^2 + py - qx$, & je trouve qu'elle réduit l'équation K, ou plutôt celle k à

$$p\frac{d\Psi}{dp} - q\frac{d\Psi}{dq} = 0\text{; d'où } \Psi = F: (pq, s)\text{, \&}$$

$$pq = F: s = F: (\zeta^2 + py - qx),$$

qui eft l'intégrale cherchée.

90. Mais comme il faut favoir diftinguer, parmi le nombre infini de combinaifons dont font fufceptibles les deux co-fonctions qui conftituent la valeur complette de Ψ en ζ, x, y, & que je défignerai par ρ & σ, celle qui donnera précifément cette valeur véritable de s, voici une règle générale applicable à tous les cas.

Je remarque dabord que les trois variables ζ, x y ne doivent fe rencontrer dans les deux coëfficiens η & $\gamma\lambda$ de l'équation k, que fous les deux formes fuivantes, favoir ; fous celle de fonctions

de la fonction s elle-même, qu'on puisse conséquemment éliminer par la substitution de s à sa valeur ; ou sous celle d'un même facteur commun à ces deux coëfficiens, qui en disparoisse en même tems par la division : sans quoi il seroit impossible de réduire l'équation k à ne plus contenir ces trois variables. Ainsi la première opération sera d'examiner si ces deux coëfficiens ont un facteur commun en z, x, y, & en ce cas de diviser par ce facteur toute l'équation. Cette opération faite, on pourra regarder η & $\gamma\lambda$ comme deux fonctions de p, q & s seulement ; quoique cette dernière soit encore inconnue : & ils le seront néceſſairement, si la proposée est en effet intégrable par cette méthode. On ne considèrera plus dès-lors que le coëfficient de $\frac{d\Psi}{ds}$, & en le nommant H, on aura à satisfaire à la condition $H = F: (p, q, s)$. Il est clair que si on connoissoit s, & qu'on mît dans H cette lettre au lieu de la fonction qu'elle représente, les trois variables z, x, y en disparoîtroient entièrement ; fesons donc la même opération d'une manière indéterminée, & déterminons par-là l'inconnue s. Nous savons dabord qu'elle est le résultat d'une certaine combinaison de ρ, σ, p & q ; c'est-à-dire, qu'elle est une certaine fonction de ces quatre variables. Supposons donc que cette fonction soit telle que

$$ds = a\,d\rho + b\,d\sigma + g\,dp + h\,dq.$$

On voit que tout se réduit à assigner ces quatre coëfficiens qui ne renferment que ρ, σ, p & q. Maintenant pour effectuer dans H la substitution de s à sa fonction équivalente, commençons par les quantités Σ, Δ, Θ, Λ. Les fonctions ρ, σ de z, x, y, p, q étant données, nous pourrons déduire de cette valeur de ds,

$\frac{ds}{dz} = a\frac{d\rho}{dz} + b\frac{d\sigma}{dz}$, $\frac{ds}{dx} = a\frac{d\rho}{dx} + b\frac{d\sigma}{dx}$, $\frac{ds}{dy} = a\frac{d\rho}{dy} + b\frac{d\sigma}{dy}$, $\frac{ds}{dp} = a\frac{d\rho}{dp} + b\frac{d\sigma}{dp} + g$, $\frac{ds}{dq} = a\frac{d\rho}{dq} + b\frac{d\sigma}{dq} + h$;

or lorſque nous avons conſidéré ci-deſſus (§ 86) s comme fonction de z, x, y, p & q, nous avons ſuppoſé

$$ds = \Sigma dp + \Delta dq + \Theta dz + \Lambda dx + \Xi dy;$$

donc $\Sigma = a\frac{d\rho}{dp} + b\frac{d\sigma}{dp} + g$, $\Delta = a\frac{d\rho}{dq} + b\frac{d\sigma}{dq} + h$, $\Theta = a\frac{d\rho}{dz} + b\frac{d\sigma}{dz}$, $\Lambda = a\frac{d\rho}{dx} + b\frac{d\sigma}{dx}$,

& par-là ces quantités ne contiendront plus de z, x, y, que ceux qu'introduira dans $\frac{d\rho}{dp}$, $\frac{d\rho}{dq}$ &c., $\frac{d\sigma}{dp}$, $\frac{d\sigma}{dq}$, &c. la ſubſtitution des valeurs de ρ & σ. Mais ces variables ſeront toutes connues, comme dans η, $\gamma\lambda$ & ϵ; & il ſera facile de les en faire diſparoître, ou du moins deux d'entr'elles, au moyen des valeurs de ρ & σ. En effet, de celles-ci on déduira celles de x & y, par exemple, & les ayant ſubſtituées, on ſera certain qu'il ne reſte dans toute la quantité H aucune autre de ces trois variables, que les z viſibles; & ce ſera par la condition de l'anéantiſſement de ces z, qu'on déterminera les coëfficiens cherchés a, b, g & h.

Appliquons maintenant cette règle à l'exemple précédent. Nous avons

$\eta = p(2pz - q)$, $\gamma\lambda = -q(2pz - q)$, $\epsilon = py + qx$, $\rho = px + qy - z$, $\sigma = qz - pz^2 - (p^2 + q^2)y$.

Ainſi on voit qu'il faut dabord diviſer toute l'équation k par $2pz - q$. On trouve enſuite, à cauſe de $\frac{d\rho}{dz} = -1$, & de $\frac{d\sigma}{dz} = q - 2pz$, $\Theta = -a + b(q - 2pz)$; & de même $\Lambda = ap$. Donc $\Theta p +$

$\Lambda =$

$\Lambda = bp\ (q - 2pz)$: & enfin l'équation k se change en

$$p\frac{d\Psi}{dp} - q\frac{d\Psi}{dq} + (p\Sigma - q\Delta + [p^2y + pqx]\,b\,)\frac{d\Psi}{ds} = 0\,;$$

d'où $H = p\Sigma - q\Delta + (p^2y + pqx)\ b$ qui, mettant pour Σ & Δ leurs valeurs ; savoir, $\Sigma = xa - (z^2 + 2py)\ b + g$, $\Delta = ya + (z - 2qy)\ b + h$, devient

$$pxa + pqxb + 2q^2yb - qya - p^2yb - pz^2b - qzb + pg - qh.$$

Or des valeurs de ρ & σ on conclut celles

$$y = \frac{qz - pz^2 - \sigma}{p^2 + q^2},\ x = \frac{(p^2 + q^2)\ \rho + p^2z + pqz^2 + q\sigma}{p^3 + pq^2}\,;$$

les ayant donc substituées dans l'expression précédente, & prenant la somme des termes affectés de la seule variable z qui y reste ; savoir,

$$(a - qb)\ ([p^2 - q^2]\ z + 2pqz^2)\,,$$

elle doit être zéro ; ce qui exige que $a - qb = 0$. Par-là la valeur de ds devient

$$ds = b\ (qd\rho + d\sigma) + gdp + hdq\,,$$

dont l'intégrale, à cause de b, g & h sur lesquelles le calcul ne décide rien, est en général $s = F:(q\rho + \sigma)$ en traitant p & q comme constantes ; ou plus simplement $s = b\ (q\rho + \sigma)$; ce qui suffit ici, b étant telle fonction de p & q qu'on voudra.

Dans l'exemple précédent b étoit $= \frac{-1}{p}$; supposons-le maintenant $= 1$, nous aurons $s = pqx - p^2y - pz^2$. Donc $\Sigma = qx - 2py - z^2$, $\Delta = px$, $\Theta = -2pz$, $\Lambda = pq$, $H = s$; & l'équation k devient

$$p\frac{d\Psi}{dp} - q\frac{d\Psi}{dq} + s\frac{d\Psi}{ds} = 0\,,$$

dont l'intégrale est $\Psi = F:(qs\,,\ pq)$, ou en divisant la première

de ces fonctions par la seconde; $\Psi = F:(\frac{s}{p}, pq)$; c'eſt-à-dire,

$$pq = F:\frac{s}{p} = F:(qx - py - z^2),$$

comme ci-deſſus.

91. Je reprends enfin l'équation Æ (§ 56), dans le deſſein, ſinon de l'intégrer généralement, du moins de rechercher tous les cas particuliers où il ſera poſſible de parvenir à cette intégration, & de montrer pour les autres la route qu'il faudroit ſuivre, ſi la complication des opérations ne s'y oppoſoit point.

J'obſerve dabord que, quelles que ſoient les deux fonctions Ψ & Π, les coëfficiens G & E, ou R & Q de dq & dp, dans l'expreſſion de $d\Psi$ & $d\Pi$, feront dans un certain rapport $\frac{G}{E}$ & $\frac{R}{Q}$:& qu'à cauſe de la permutabilité de ces deux fonctions entr'elles, ſi je fais $\frac{G}{E} = \lambda$, λ appartiendra également à $\frac{R}{Q}$; d'où il s'enſuivra une double expreſſion pour la valeur de λ.

Soit donc $G = \lambda E$: je ſubſtitue dans Æ cette valeur de G; & diviſant par E, j'ai

$$\epsilon(\lambda q + p) A + \epsilon B + \epsilon\lambda C + (\lambda\zeta - \eta - \gamma\lambda^2) E = 0.$$

Feſant enſuite la même ſubſtitution dans la valeur de $d\Psi$, je la change en

$$d\Psi = Adz + Bdx + Cdy + E(dp + \lambda dq),$$

d'où éliminant E, au moyen de l'équation précédente, il reſte

$$d\Psi = Adz + Bdx + Cdy + \frac{\epsilon(\lambda q + p) A + \epsilon B + \epsilon\lambda C}{\gamma\lambda^2 - \zeta\lambda + \eta}(dp + \lambda dq);$$

commençons par les cas les plus ſimples.

Je donne à cette même équation la forme ſuivante..... (Rr)

$$d\Psi = A\ (d\zeta + \frac{\epsilon(\lambda q + p)}{\gamma\lambda^2 - \zeta\lambda + \eta}[dp + \lambda dq])$$
$$+ B\ (dx + \frac{\epsilon}{\gamma\lambda^2 - \zeta\lambda + \eta}[dp + \lambda dq])$$
$$+ C\ (dy + \frac{\epsilon\lambda}{\gamma\lambda^2 - \zeta\lambda + \eta}[dp + \lambda dq]),$$

& je remarque qu'il peut arriver que les valeurs de $d\Psi$ & $d\Pi$ ne dépendent, chacune que d'un de ces trois termes (que je désignerai dans la suite par leurs coëfficiens respectifs A, B, C) ce qui exige; 1°. que ce terme ne contienne, outre p & q, que celle des trois variables ζ, x, y dont il renferme la différentielle; & 2°. que de plus il soit susceptible de devenir la différentielle exacte ds d'une fonction à trois variables (§ 1), en le multipliant par un facteur μ. On pourra donc, lorsque la première de ces conditions n'aura pas lieu ; c'est-à-dire, lorsque le terme en question contiendra une seconde variable, la faire disparoître par la détermination de λ. Et si la proposée est de la classe dont il s'agit ici, elle satisfera aussi, au moyen de l'élimination de cette variable superflue, à la seconde condition ; ainsi on aura $d\Psi = \frac{A}{\mu} ds$ par exemple, en prenant le premier terme, d'où $\Psi = F{:}s$; & comme alors s ne contient ni x, ni y; B & C qui sont (§ 56) $\frac{d\Psi}{dx}$ & $\frac{d\Psi}{dy}$, & conséquemment aussi les deux autres termes de la formule Rr dont ils sont les coëfficiens, deviendront zéro.

Voilà donc une valeur de $d\Psi$ déterminée, par le moyen d'une des valeurs de λ. Mais comme on a vu que λ en a toujours deux, on pourra, au moyen de cette seconde valeur qui soit λ', faire la même opération sur un des deux autres termes qui donnera,

par exemple, $d\Psi = \frac{B}{\mu'}\, ds'$, d'où $\Psi = \phi : s'$; & l'une ou l'autre de ces deux valeurs de Ψ sera celle de Π.

On voit qu'en général ce procédé réussira, lorsque chacune des deux fonctions Ψ & Π ne contient, outre p & q, qu'une seule des trois variables z, x, y, mais différente pour chacune; sans quoi, ce cas retomberoit dans celui que j'ai résolu (§ 86), où les deux fonctions ne renfermoient z, x & y que sous une même forme s, qui dans ce cas-ci se réduiroit à une seule des trois variables.

Il s'agit maintenant de déterminer λ, par la condition que le terme sur lequel on opère, par exemple le premier, (on pourra appliquer le même raisonnement aux autres) ne contienne que z seule, sans x ni y. Cette opération se comprendra mieux par un exemple. Soit la proposée dont on demande l'intégrale,

$$(q^2 - p^2)\left(\frac{dp}{dx}\frac{dq}{dy} - \frac{dp}{dy}\frac{dq}{dx}\right) + q\,(y - 2pz)\,\frac{dp}{dx} + (2p^2z - 2q^2z + py)\,\frac{dp}{dy} + 2pqz\,\frac{dq}{dy} + 2pzy = 0.$$

J'ai ici $\varepsilon = q^2 - p^2$, $\gamma = q\,(y - 2pz)$, $\zeta = 2p^2z - 2q^2z + py$, $\eta = 2pqz$, $\vartheta = 2pzy$, &

$$\frac{\varepsilon}{\gamma\lambda^2 - \zeta\lambda + \eta} = \frac{q^2 - p^2}{q\lambda^2(y - 2pz) - \lambda(2p^2z - 2q^2z + py) + 2pqz},$$

d'où il faut chasser conséquemment une des variables z ou y. Je commencerai par le terme A : il faut alors que ce soit y qui disparoisse ; ce qui exige seulement que $q\lambda^2 - p\lambda$ qui est le coëfficient de y, soit $= 0$. On tire de là $\lambda = 0$, ou $\lambda = \frac{p}{q}$. La première supposition réduiroit ce premier terme à

$$A\left(dz + \frac{\varepsilon}{\eta} p\,dp\right),$$

& ne peut avoir lieu ; puifque, $\frac{\varepsilon}{\eta}$ contenant q, ce terme n'eft point fufceptible d'intégration. Mais la feconde le change en

$$A\left(dz + \frac{1}{2z}[q\,dp + p\,dq]\right)$$

qui, en le multipliant par $2z$, ce qui eft permis à caufe du coëfficient indéterminé A, devient

$$A\left(2z\,dz + p\,dq + q\,dp\right),$$

d'où intégrant, $\Psi = F:(z^2 + pq)$.

Il feroit inutile de faire cet effai fur le fecond terme B ; car ce terme ne doit contenir que x ; il faudroit donc éliminer z & y, ce qui eft impoffible, au moyen de la détermination d'une feule quantité λ.

Je paffe donc au troifième terme, & éliminant la variable z, j'ai, pour fatisfaire à cette condition,

$$pq\lambda^2 + (p^2 - q^2)\lambda - pq = 0;$$

d'où $\lambda = \frac{q}{p}$, ou $\lambda = -\frac{p}{q}$. Par la première valeur, qui feule réuffit, ce terme devient $C\left(dy + \frac{1}{y}[p\,dp + q\,dq]\right)$, ou multipliant par $2y$, $C(2y\,dy + 2p\,dp + 2q\,dq)$. Donc $\Pi = F:(y^2 + p^2 + q^2)$; & l'intégrale cherchée eft

$$pq + z^2 = \Phi:(y^2 + p^2 + q^2).$$

Comme la dernière des équations G (§ 56) n'a point été employée, dans les déterminations précédentes, il faudra vérifier fi, d'après ces déterminations, elle a effectivement lieu, ce qui eft indifpenfable.

L'effentiel eft donc que par la détermination de λ, le terme fur lequel on opère, devienne une fonction différentielle à trois variables intégrable : & c'eft ce qu'il fera toujours aifé de vérifier par la méthode connue. Il ne reftera plus alors qu'à trouver le facteur propre à rendre en effet ce terme une différentielle exacte.

Lorfque la propofée contient deux de ces trois variables z, x, y, on peut, comme on vient de voir, déterminer par cette méthode les deux valeurs de Ψ & Π. Mais lorfqu'elle n'en contient qu'une, on ne pourra non plus déterminer qu'une de ces valeurs. Je m'occuperai un peu plus tard de ce cas, & je donnerai un moyen fimple de parvenir à la connoiffance de la feconde valeur, d'après la première.

92. En repréfentant par (p, q, z) une fonction déterminée, mais quelconque, de p, q, z, je rapporterai aux trois formules fuivantes, toutes les manières d'être poffibles de Ψ & Π, dans l'intégrale de ces équations;

$$1^{o}. \left.\begin{array}{c}\Psi=(p, q, z)\\ \&\\ \Pi=[p, q, x]\end{array}\right\} \quad 2^{o}. \left.\begin{array}{c}\Psi=(p, q, z)\\ \&\\ \Pi=[p, q, y]\end{array}\right\} \quad 3^{o}. \left.\begin{array}{c}\Psi=(p, q, x)\\ \&\\ \Pi=[p, q, y]\end{array}\right\}$$

les autres combinaifons n'étant que des permutations de Ψ & Π. En comparant ces valeurs de Ψ & Π, avec celles de l'art. 56, on verra qu'il en réfulte, dans la 1re formule, $B=C=M=P=0$;

dans la 2de, $B=C=M=N=0$;

dans la 3me, $A=C=M=N=0$;

& qu'on a conféquemment, pour ces trois cas, dans le même ordre, β étant toujours $= ER - GQ$,

1°. $\gamma = - AQq$; $\zeta = -(ARq - AQp + EN)$; $\eta = ARp - GN$; $\vartheta = - ANq$.

2°. $\gamma = PE - AQq$; $\zeta = -(ARq - AQp - PG)$; $\eta = ARp$; $\vartheta = APp$.

3°. $\gamma = PE$; $\zeta = PG + BQ$; $\eta = BR$; $\vartheta = BP$.

Je vais analyser ces trois formules, dans toute leur généralité, en y appliquant ma méthode, afin de faire connoître exactement l'étendue de cette solution, & de découvrir les cas où elle pourroit être insuffisante.

93. Dans la première formule Ψ contient z, & Π contient x. Les deux valeurs de $d\Psi$ seront données par les deux premiers termes A & B de sa valeur générale Rr (§ 91); & la seconde de ces deux valeurs, sera celle de $d\Pi$. Au moyen des substitutions relatives à cette formule (§ 92), la fraction $\frac{\varepsilon}{\gamma\lambda^2 - \zeta\lambda + \eta}$ (que je désignerai dans la suite par K) devient, en divisant haut & bas par E,

$$\frac{R - \frac{G}{E} Q}{(\lambda - \frac{G}{E}) N + (\lambda q + p)(R - \lambda Q)\frac{A}{E}}.$$

Il s'agit donc d'examiner si, dans tous les cas, en fesant disparoître x du premier terme A, & z du second terme B de l'équation Rr (§ 91), on parviendra à la valeur de $\lambda = \frac{G}{E}$.

Commençons par le premier. On voit dabord que, Π contenant seule x, les coëfficiens N, Q, R de la valeur de $d\Pi$ (§ 56) seront seuls affectés de cette variable. Elle ne peut donc se rencontrer dans K, que sous deux formes; savoir, celle N; & celle

$R - \frac{G}{E} Q$ qui, parce que λ eſt eſſentiellement $= \frac{G}{E}$, eſt la même choſe que $R - \lambda Q$. Or ſoit que N ſeule renferme x; ſoit que ce ſoit $R - \frac{G}{E} Q$; ſoit enfin que toutes deux la contiennent en même tems, il faudra, pour la faire diſparoître, que $\lambda - \frac{G}{E} = 0$.

En effet, dans le premier cas, cela eſt évident, $\left(\lambda - \frac{G}{E}\right) N$ repréſentant tous les termes affectés de x. Dans le ſecond, ce l'eſt auſſi, ce même terme repréſentant alors tous ceux ſans x, & la fraction entière devenant, par l'anéantiſſement de ce terme, diviſible par $R - \frac{G}{E} Q$, ou $R - \lambda Q$. Ce ſera encore la même choſe, lorſque N & $R - \lambda Q$ contiendront à la fois x; car alors $\left(\lambda - \frac{G}{E}\right)$ N repréſentera tous les termes qui renferment x, ſous une forme différente de celle du numérateur, ce qui retombe dans le cas précédent. Ainſi, dans tous les cas, il ſuffira de faire diſparoître x, pour avoir l'équation $\lambda - \frac{G}{E} = 0$ qui détermine la valeur de λ; & pour effectuer cette élimination, on a la règle ſuivante.

1°. Si le numérateur ne contient point x, on égalera à zéro la ſomme des termes du dénominateur affectés de cette variable;

2°. ſi le numérateur contient x, on égalera à zéro la ſomme des termes du dénominateur qui en ſont affectés, d'une manière différente que dans le numérateur, ou qui ne le ſont point du tout.

94. Je viens de dire qu'il ſuffiſoit de faire diſparoître x, pour avoir l'équation $\lambda - \frac{G}{E} = 0$. Mais on auroit tort d'en conclure que la ſomme des termes qu'on annulle, dans cette opération, ſoit préciſément

précisément $(\lambda - \frac{G}{E}) N$; & il arrivera très-souvent que cette somme n'en soit qu'une partie, comme dans l'équation

$$2x(p^2 - q^2)\left(\frac{dp}{dx}\frac{dq}{dy} - \frac{dp}{dy}\frac{dq}{dx}\right) - q^2 x \frac{dp}{dx} - (2p^2 q + 4px)\frac{dp}{dy} + (p^2 x - 2pq^2 - 4qx)\frac{dq}{dy} - (pq^2 + 2qx) = 0.$$

On tire delà

$$K\ (\S\ 93) = \frac{2(p^2 - q^2)x}{-q^2 x \lambda^2 + (2p^2 q + 4px)\lambda + p^2 x - 4qx - 2pq^2}.$$

Ensuite, pour expulser x, on fait $2p^2 q\lambda - 2pq^2 = 0$; c'est-à-dire, $2p^2 q(\lambda - \frac{q}{p}) = 0$, d'où $\lambda - \frac{q}{p} = 0 = \lambda - \frac{G}{E}$. Mais N n'est pas $= 2p^2 q$; & on verra facilement que la supposition de $\lambda - \frac{q}{p} = 0$ anéantit, non-seulement $2p^2 q\lambda - 2pq^2$, ou $2p^2 q(\lambda - \frac{q}{p})$, mais encore $4px\lambda - 4qx$, ou $4px(\lambda - \frac{q}{p})$: deforte que $N = 2p^2 q + 4px$.

Jusqu'ici nous n'avons pas eu besoin de cette connoissance de N : mais il est un cas où elle devient nécessaire; savoir, lorsque $\lambda - \frac{G}{E} = 0$ coïncide avec $\lambda q + p = 0$, ou plutôt avec $\lambda + \frac{p}{q} = 0$. On voit qu'alors l'expression générale de la fraction K se change en

$$\frac{R - \lambda Q}{(\lambda q + p)(N + [R - \lambda Q]\frac{A}{E})};$$

de sorte que tout le dénominateur est multiplié par $\lambda q + p$: & d'après ce qui précède, la règle à observer est d'annuller, en vertu de l'équation $\lambda + \frac{p}{q} = 0$, la partie N du dénominateur; & le

facteur $\lambda q + p$ qui affecte l'autre partie difparoîtra, parce que le même facteur fe trouve dans le numérateur $\varepsilon\ (\lambda q + p)$ de la fraction contenue dans le terme Δ (§ 91). Cette opération, comme on voit, exige qu'on connoiffe N. Soit

$$2pqx\left(\frac{dp}{dx}\frac{dq}{dy} - \frac{dp}{dy}\frac{dq}{dx}\right) - q^4 x\frac{dp}{dx} - (pq^2 + 2qx)\frac{dp}{dy} + (p^2q^2x + p^2q + 2px)\frac{dq}{dy} - (pq^4 + 2q^3x) = 0.$$

K devient $= \frac{2pqx}{-q^4x\lambda^2 + (pq^2 + 2qx)\lambda + (p^2q^2x + p^2q + 2px)}$; ainfi, afin de faire difparoître x, il faudra annuller dans le dénominateur les termes qui ne font point affectés de cette lettre; d'où réfulte $pq^2\lambda + p^2q = 0$, ou $\lambda q + p = 0$. Je puis donc donner à la fraction K la forme

$$\frac{2pqx}{(\lambda q + p)(pq^2x - \lambda q^3x + 2x + pq)},$$

& j'y fupprime dabord le terme $(\lambda q + p)\, pq$, ou $(\lambda + \frac{p}{q})\, pq^2$ qui m'a fervi à déterminer $\lambda - \frac{G}{E}$. Mais, dans le doute fi ce terme eft le feul qu'il faille annuller; c'eft-à-dire, fi $pq^2 = N$, je fuppoferai que $N = pq^2 + \omega q$ (ω étant une inconnue) : de forte que la fraction K fera

$$\frac{2pqx}{(\lambda q + p)(pq^2x - \lambda q^3x + 2x - \omega)}$$

qui, fubftituée dans le terme Δ (§ 91), donnera, après avoir mis pour λ fa valeur $-\frac{p}{q}$,

$$\Delta\left(dz + \frac{2px\,(qdp - pdq)}{2pq^2x + 2x - \omega}\right)$$

où il ne faut que déterminer ω, de manière que cette quantité

ſoit une différentielle exacte. Je ferai pour cela, $\frac{qdp - pdq}{q^2} = ds$; c'eſt-à-dire $\frac{p}{q} = s$, d'où je conclus

$$A\left(dz + \frac{2sq^3xds}{2sq^3x + 2x - \omega}\right).$$

Et comme le ſecond terme différentiel ne doit contenir que s, & qu'ainſi q & x en doivent diſparoître, il eſt clair qu'il faut faire $\omega = 2x$, d'où réſultera $A\,(dz + ds)$ dont l'intégrale, qui eſt la valeur de Ψ, eſt

$$F:(z + s) \text{ ou } F:\left(z + \frac{p}{q}\right).$$

95. Je paſſe à la ſeconde valeur de $d\Psi$, qui eſt celle de $d\Pi$, & qui eſt donnée par le ſecond terme B de la formule générale Rr. La fraction K devient dans ce cas, en déſignant la ſeconde valeur de λ par λ', & diviſant haut & bas par Q,

$$\frac{E\frac{R}{Q} - G}{(\lambda' E - G)\frac{N}{Q} + (\lambda' q + p)\left(\frac{R}{Q} - \lambda'\right)A},$$

d'où il faut expulſer z. Or z ne peut ſe rencontrer que dans les trois lettres A, E, G; c'eſt-à-dire, qu'elle ne peut ſe préſenter que ſous les deux formes $E\frac{R}{Q} - G$ qui eſt la même choſe que $\lambda' E - G$, & A. On conclura delà qu'il ſuffira d'annuller le terme $(\lambda' q + p)\left(\frac{R}{Q} - \lambda'\right)A$, pour faire diſparoître z de cette fraction : ce terme repréſentant; ou la ſomme des termes qui contiennent z dans le dénominateur, ſi le numérateur ne contient point cette variable; ou, dans le cas contraire, la ſomme des termes du dénominateur qui ne contiennent point z, ou qui la contiennent

d'une autre manière que le numérateur, & on aura, pour cela, les deux équations $\lambda' q + p = 0$, $\lambda' - \frac{R}{Q} = 0$, dont la dernière eſt la véritable. Cette valeur peut bien, en certains cas, devenir la même que $\lambda' q + p = 0$; mais on voit qu'alors on aura la valeur double $(\lambda' q + p)^2 = 0$. D'ailleurs, il n'en réſultera aucun inconvénient ſemblable à celui de l'art. précédent; parce que le reſte du dénominateur n'eſt pas diviſible par ce facteur.

96. Dans la ſeconde formule, Ψ. contient z, & Π contient y. Les deux valeurs de $d\Psi$ feront données par les termes A & C; & la ſeconde ſera celle de $d\Pi$. La fraction K devient, dans ce nouveau cas,

$$\frac{R - \frac{G}{E} Q}{\lambda (\lambda - \frac{G}{E}) P + (\lambda q + p)(R - \lambda Q) \frac{A}{E}}$$

d'où, au moyen des mêmes raiſonnemens, on verra qu'on éliminera y, qui peut ſe rencontrer dans P, Q & R, en feſant $\lambda - \frac{G}{E} = 0$; c'eſt-à-dire, en ſuivant exactement les règles données pour la formule précédente, & y ſubſtituant ſeulement y à x.

Il en ſera de même de la valeur de $d\Pi$ que fournit le terme C, en feſant diſparoître la variable z; c'eſt-à-dire, en annullant dans la fraction K qui, en ſe conformant à ce que j'ai dit ci-deſſus, devient

$$\frac{E \frac{R}{Q} - G}{\lambda' (\lambda' E - G) \frac{P}{Q} + (\lambda' q + p)(\frac{R}{Q} - \lambda') A},$$

le terme $(\lambda' q + p)\left(\frac{R}{Q} - \lambda'\right) A$. On appliquera donc ici, *mutatis mutandis*, tout ce qui a été dit à ce sujet.

J'ajouterai seulement la remarque suivante. Si on compare la solution générale de cette seconde formule, avec l'exemple de l'art. 91 qui en est un cas particulier, on verra qu'en effet, dans cet exemple, on a eu, pour éliminer y du premier terme, une double valeur de λ, dont l'une étoit $\lambda = 0$ qui n'a pas réussi ; & que de même, pour éliminer z du troisième terme, on a eu aussi une double valeur, dont l'une, qui étoit $\lambda' q + p = 0$, n'a pas réussi non plus. Et en général, toutes les fois qu'il se présentera une racine $\lambda = 0$, ou $\lambda q + p = 0$, conjointement avec une autre, on peut en toute sûreté la négliger. Une pareille racine ne sera la véritable, que lorsqu'elle sera tout-à-fait seule; soit qu'elle soit linéaire, comme art. 94; soit qu'elle soit élevée au quarré, ce qui prouve qu'alors la racine véritable coïncide avec elle.

97. Il me reste à examiner la troisième formule, où Ψ contient x, & Π contient y. Dans ce cas-ci la fraction K, en substituant les valeurs de β, γ, ζ, η, se change en

$$\frac{ER - GQ}{BR - (PG + BQ)\lambda + PE\lambda^2};$$

c'est-à-dire, qu'en divisant haut & bas par E, on aura, lorsqu'on cherche la valeur de $\lambda = \frac{G}{E}$ qui appartient à $d\Psi$,

$$\frac{R - \frac{G}{E} Q}{\frac{B}{E}(R - \lambda Q) + \lambda\left(\lambda - \frac{G}{E}\right) P};$$

& divisant de même par Q, on aura, lorsqu'on cherche la valeur

de $\lambda' = \frac{R}{Q}$ qui appartient à $d\Pi$,

$$\frac{E\frac{R}{Q} - G}{B\left(\frac{R}{Q} - \lambda'\right) + \lambda'\left(\lambda' E - G\right)\frac{P}{Q}}.$$

On fera difparoître de la première, la variable y que peuvent renfermer les trois lèttres P, Q, R feulement, en annullant le terme $\lambda\left(\lambda - \frac{G}{E}\right) P$ au moyen de la valeur $\lambda - \frac{G}{E} = 0$ (§ *préc.*) ; & de la feconde, la variable x que renfermeront les trois lettres B, G, E, en annullant le terme $B\left(\frac{R}{Q} - \lambda'\right)$: & chacun de ces deux termes repréfentera, dans le dénominateur dont il fait partie, la fomme ; des termes qui contiennent la variable à éliminer, fi le numérateur ne la contient point ; ou dans le cas contraire, de ceux qui ne la contiennent point, ou qui la contiennent d'une autre manière que le numérateur. Ainfi, dans tous les cas où la propofée contiendra deux des trois variables z, x, y, & où elle aura réellement une intégrale de la forme que j'ai fuppofée, il fera facile de déterminer, par cette méthode, les deux fonctions Ψ & Π.

98. Au refte, connoiffant l'une des deux fonctions Ψ ou Π, on pourra déduire immédiatement de la propofée la feconde valeur de λ qui convient à l'autre fonction.

En effet, dans la première formule (§ 93), fi c'eft Ψ qui eft déterminée, on connoîtra dès-lors A, E & G : & comme les coëfficiens ε, γ, ζ, η, ϑ font donnés par ceux de la propofée, on aura $ER - GQ = \varepsilon$; $AQq = -\gamma$ (§ 92). Divifant enfuite la première de ces deux équations par la feconde, & réduifant,

on en conclura $\frac{R}{Q} = \lambda' = \frac{\gamma G - \epsilon A q}{\gamma E}$, où tout eſt connu. Par exemple, dans l'équation de l'art. 94, on a $\Psi = \frac{p}{q} + \zeta$. Ainſi $A = 1$, $E = \frac{1}{q}$, $G = -\frac{p}{q^2}$. On a auſſi $\epsilon = 2pqx$; $\gamma = -q^4 x$; d'où $\lambda' = \frac{p}{q}$. Subſtituant cette valeur dans le ſecond terme de la formule générale Rr (§ 91), auſſi-bien que les valeurs de ϵ, γ, ζ, η, ce terme ſe change en

$$d\Pi = B\left\{dx + \frac{qx\,(dp + \frac{p}{q}\,dq)}{pq + 2x}\right\} = B\left\{dx + \frac{xd\cdot pq}{pq + 2x}\right\};$$

d'où $\Pi = F:(pqx + x^2)$, ou ſimplement $= pqx + x^2$.

Si c'eſt au contraire Π qui a été déterminée la première, les deux mêmes premiers termes donneront

$$\frac{ER - GQ}{AQq} = -\frac{\epsilon}{\gamma}.$$

Mais comme alors les quantités connues ſont N, Q, R, & que conſéquemment A, E, G ſont inconnues, il faut encore en éliminer A ; & c'eſt à quoi on réuſſira, au moyen de l'équation que donne la comparaiſon du coëfficient η du quatrième terme de la propoſée, en la diviſant de même par celle $AQq = -\gamma$; ſavoir,

$$\frac{ARp - GN}{AQq} = -\frac{\eta}{\gamma}.$$

On tire de la première,

$$\frac{1}{Aq}\left(\frac{ER - GQ}{Q}\right) = -\frac{\epsilon}{\gamma},$$

& de la ſeconde,

$$\frac{1}{Aq}\,GN = \frac{R\gamma p + Q\eta q}{\gamma q};$$

d'où, éliminant $\frac{1}{Aq}$, & fesant $\frac{G}{E} = \lambda$, il résulte

$$\lambda = \frac{\gamma p R^2 + \eta q Q R}{\gamma p Q R + \eta q Q^2 - \epsilon q N Q}.$$

Ainsi, dans le même exemple, si on connoît $\Pi = pqx + x^2$, on a $N = pq + 2x$, $Q = qx$, $R = px$, $\epsilon = 2pqx$, $\gamma = -q^4 x$, $\eta = p^2 q^2 x + p^2 q + 2px$. Donc $\lambda = -\frac{p}{q}$, ou $\lambda q + p = 0$, comme ci-dessus (§ 94).

Dans la seconde formule (§ 96), si on connoît déjà Ψ; c'est-à-dire, qu'on ait A, E, G, des valeurs de ϵ, η, relatives à cette formule (§ 92), on tire, en divisant l'une par l'autre, $\frac{ER - GQ}{ARp} = \frac{\epsilon}{\eta}$; d'où fesant $\frac{R}{Q} = \lambda'$,

$$\frac{E\lambda' - G}{Ap\lambda'} = \frac{\epsilon}{\eta}, \text{ \& } \lambda' = \frac{\eta G}{\eta E - \epsilon A p}.$$

Si au contraire on connoît Π, & conséquemment aussi P, Q, R, il faudra, comme dans la première formule, une troisième équation, pour éliminer A de $\frac{ER - GQ}{ARp} = \frac{\epsilon}{\eta}$ qu'on vient de trouver dans le cas précédent : & cette équation sera $\gamma = PE - AQq$, qu'on divisera de même par $ARp = \eta$. On aura donc ici $\frac{PE - AQq}{ARp} = \frac{\gamma}{\eta}$; d'où résulte

$$\lambda = \frac{G}{E} = \frac{\gamma R^2 p + \eta QRq - \epsilon PRp}{\gamma QRp + \eta Q^2 q}.$$

Dans la troisième formule, cette détermination ne sera pas moins facile. En effet, si on connoît Ψ & conséquemment B, E, G, comme on a pour cette formule, $ER - GQ = \epsilon$, & $BR = \eta$, on

on aura, en divisant l'une par l'autre, $\frac{ER - GQ}{BR} = \frac{\epsilon}{\eta}$; & parce que $\frac{R}{Q} = \lambda'$,

$$\frac{E\lambda' - G}{B\lambda'} = \frac{\epsilon}{\eta}, \text{ d'où } \lambda' = \frac{\eta G}{\eta E - \epsilon B};$$

& de même, si on connoît Π, & P, Q, R, divisant $ER - GQ = \epsilon$ par $PE = \gamma$, on aura $\frac{ER - GQ}{PE} = \frac{\epsilon}{\gamma}$; d'où, à cause de $\frac{G}{E} = \lambda$,

$$\frac{R - \lambda Q}{P} = \frac{\epsilon}{\gamma}, \text{ \& } \lambda = \frac{\gamma R - \epsilon P}{\gamma Q}.$$

Cette méthode est celle que j'ai annoncée (§ 91) pour le cas où, la proposée ne contenant qu'une des trois variables z, x, y, comme est l'équation même qui vient de me servir d'exemple, on ne peut déterminer, par l'élimination de cette variable, qu'une des deux fonctions Ψ, Π. Et on voit que dans tous les cas, au moyen de cette méthode, on déterminera l'autre fonction, de la manière la plus simple.

99. Si la fonction Ψ ou Π ne contient que p ou q, on aura, pour le premier cas, $\lambda = 0$, & pour le second, $\lambda = \infty$. Cette circonstance pourroit embarrasser dans la troisième formule (§ 97), lorsque Ψ ne contient que q & x; & Π, que p & y. Alors, à cause de $E = R = 0$, on a (§ 92) $\gamma = 0$, $\eta = 0$; & la fraction K se réduit à $\frac{-\epsilon}{\zeta\lambda}$. Si on opère dabord sur la fonction Π (§ 91), on parvient à

$$d\Pi = C\left(dy - \frac{\lambda'\epsilon(dp + \lambda' dq)}{\zeta\lambda'}\right) = (\S\ 92)\ C\left(dy + \frac{\lambda' GQ(dp + \lambda' dq)}{\lambda'(PG + BQ)}\right).$$

Et comme x ne peut être renfermée que dans B & G, on voit qu'il suffira toujours d'annuller le terme $BQ\lambda'$, en fesant $\lambda' = 0$;

c'eſt-à-dire, d'opérer comme on a fait ci-deſſus (§ 94), ſans ſe mettre en peine de ce que le reſte $PG\lambda'$ du dénominateur a le même facteur λ'; puiſque, ſe trouvant auſſi dans le numérateur, ce facteur diſparoîtra de l'un & de l'autre par la diviſion. Ainſi on aura $d\Pi = C\,(dy + \frac{Q}{P}\,dp)$

Soit par exemple

$$\left(\frac{d^2 z}{dx^2}\,\frac{d^2 z}{dy^2} - \frac{d^2 z^2}{dx dy}\right) - 2\,(y + x)\,\frac{d^2 z}{dx dy} - 4xy = 0;$$

c'eſt-à-dire, $\varepsilon = 1$, $\gamma = 0$, $\zeta = -2\,(y + x)$, $\eta = 0$, $\vartheta = -4xy$. On aura

$$d\Pi = C\left(dy + \frac{\lambda'(dp + \lambda' dq)}{2\lambda'(y + x)}\right),$$

qui, en feſant $2\lambda' x$, ou $\lambda' = 0$, ſe réduit à $d\Pi = C\,(dy + \frac{dp}{2y})$, d'où $\Pi = y^2 + p$. On pourra, au moyen de cette valeur de Π qui donne $M = 0$, $N = 0$, $P = 2y$, $Q = 1$, $R = 0$, connoître celle de λ (§ 98) qui convient à $d\Psi$; ſavoir $\lambda = \frac{\gamma R - \varepsilon P}{\gamma Q} = \infty$, puiſque $\gamma = 0$. Mais, en ſubſtituant enſuite cette valeur de λ dans le terme B de la formule Rr, on trouveroit

$$d\Psi = B\left(dx + \frac{dq}{2\,(y + x)}\right)$$

qui eſt une valeur abſurde, à cauſe de y qu'elle renferme.

Cette fauſſe expreſſion provient de la rencontre des deux valeurs $\gamma = 0$, $\lambda = \infty$, dont le produit $= \frac{0}{0}$; & on pourroit dans ce cas-ci, donner au dénominateur $\gamma\lambda^2 + 2\,(y + x)\,\lambda$ la forme $(\frac{0}{0} + 2y + 2x)\,\lambda$, qui, en ſuppoſant l'indéterminée $\frac{0}{0} = -2y$, ôteroit à l'expreſſion de $d\Psi$ ſon abſurdité. Il faut donc, pour

éviter cette rencontre, lorſqu'on aura en même tems $\gamma = 0$ & $\lambda = \infty$, faire $\lambda = \frac{1}{\mu}$ (ce qui revient d'ailleurs au même que ſi (§ 91), au-lieu de ſuppoſer $\frac{G}{E} = \lambda$, on eût fait $\frac{E}{G} = \mu$), & ſubſtituant cette valeur, on aura en général

$$d\Psi = B\left(dx + \frac{\epsilon\mu\,(\mu dp + dq)}{\gamma - \zeta\mu + \eta\mu^2}\right),$$

qui, dans le cas préſent, ſe change en

$$d\Psi = B\left(dx + \frac{\mu\,(\mu dp + dq)}{2\,(y + x)\,\mu}\right);$$

& comme, à cauſe de $\lambda = \infty$, on a $\mu = 0$, on aura enfin, conformément à ce que je viens de dire en opérant ſur Π,

$$d\Psi = B\left(dx + \frac{dq}{2x}\right), \;\&\; \Psi = q + x^2.$$

Si on avoit voulu chercher auſſi immédiatement l'expreſſion de $d\Psi$, comme celle de $d\Pi$, il auroit fallu faire dabord la même transformation $\frac{1}{\mu} = \lambda$, afin d'éviter l'expreſſion vague $\frac{0}{0}$.

Ayant Ψ & Π, il ne s'agit plus, comme je l'ai dit (§ 91), que de vérifier ſi la dernière équation $\vartheta = -4xy$ a lieu. Or la valeur de Ψ qu'on vient de trouver, donne $A = 0$, $B = 2x$, $C = 0$, $E = 0$, $G = 1$; & on a eu ci-deſſus, par la valeur de Π, $M = 0$, $N = 0$, $P = 2y$, $Q = 1$, $R = 0$. On conclura de-là (§ 56, ou 92 *form.* 3) $\epsilon = ER - GQ = -1$, $\gamma = 0$, $\zeta = 2y + 2x$, $\eta = 0$, $\vartheta = 4xy$, qui comparés avec les coëfficiens des termes correſpondans de la propoſée, n'en diffèrent que par un facteur commun $= -1$.

100. J'ai établi ci-deſſus (§ 93) la règle générale, que ſi le numérateur contient la variable à éliminer, il faudra dans le déno-

minateur de la fraction K, égaler à zéro la somme des termes qui sont affectés de la même variable, d'une manière différente que le numérateur; ou qui ne le sont point du tout. Cette règle ne sera pas toujours également facile à mettre en exécution : & sur-tout, lorsque les deux variables p & q seront *isolément fonctionnées* avec z, x, ou y, sans former à elles deux une certaine fonction s, de manière à ce que (p, q, z), par exemple, puisse se représenter par (s, z), on sera souvent fort embarrassé de reconnoître ces termes : en voici un exemple. Soit la proposée,

$$(2q^2 + 2qx + py - 2p^2)\left(\frac{dp}{dx}\frac{dq}{dy} - \frac{dp^2}{dy}\right) - (pq + px)\frac{dp}{dx} + (p^2 - py)\frac{dp}{dy} + 2pq\frac{dq}{dy} - p^2 = 0$$

qui, parce qu'elle contient x & y, ne peut appartenir qu'à la troisième formule (§ 92). J'ai donc ici,

$$K = \frac{2q^2 + 2qx + py - 2p^2}{2pq + (py - p^2)\lambda - (pq + px)\lambda^2},$$

où il n'est point aisé de distinguer la somme des termes du dénominateur qu'il faut annuller. On sait seulement que cette fraction est essentiellement de la forme $K = \frac{D}{mD + \rho}$; & il s'agit de l'y réduire.

Pour cela, je ferai le numérateur $= D$; & j'en conclurai, en D & dans les autres variables, la valeur de la variable à éliminer, afin de laisser dans cette expression toutes celles qui peuvent entrer dans la valeur de λ qu'on cherche. Je commencerai, par exemple, par éliminer y. Ainsi j'aurai

$$y = \frac{D + 2p^2 - 2q^2 - 2qx}{p},$$

& fubftituant cette valeur dans le dénominateur de K, cette fraction fe changera en

$$K = \frac{D}{2pq + \lambda\,(D + p^2 - 2q^2 - 2qx) - \lambda^2\,(pq + px)},$$

où il eft clair que, pour faire difparoître D, il faut fuppofer

$$\lambda^2\,(pq + px) - \lambda\,(p^2 - 2q^2 - 2qx) = 2pq,$$

d'où réfultent, pour λ, les deux valeurs $\lambda = \frac{p}{q+x}$; $\lambda = -\frac{2q}{p}$. La première de ces deux valeurs, qui feule convient, donne $K = \frac{1}{\lambda} = \frac{q+x}{p}$; & cette fubftitution change le terme B (§ 91) en $d\Psi = B\,(dx + \frac{1}{\lambda}[dp + \lambda dq]) = B\,(dx + dq + \frac{q+x}{p}dp)$, dont l'intégrale eft $\Psi = F:(px + pq)$.

Si c'eft au contraire x que je veux éliminer, j'aurai

$$x = \frac{D + 2p^2 - 2q^2 - py}{2q}:$$

par-là K devient $=$

$$\frac{2qD}{4pq^2 + 2q\lambda\,(py - p^2) - \lambda^2\,(pD + 2p^3 - p^2y)}.$$

Et il faudra faire

$$(p^2y - 2p^3)\,\lambda^2 + 2q\lambda\,(py - p^2) + 4pq^2 = 0;$$

d'où $\lambda = \frac{2q}{2p-y}$, ou $\lambda = -\frac{2q}{p}$; dont la première feule convient. On a donc

$$K = -\frac{2qD}{\lambda^2 pD} = -\frac{(2p-y)^2}{2pq}$$

qui, fubftituée dans le troifième terme qui eft $C\,(dy + K\lambda\,[dp + \lambda dq])$, le change en

$$C\,(dy + \frac{y-2p}{p}dp - \frac{2q}{p}dq);$$

d'où on conclut, en multipliant par p, & intégrant, Ψ, ou plutôt

$\Pi = \phi:(py - p^2 - q^2)$. Ainſi l'intégrale de la propoſée eſt

$$p^2 + q^2 - py = F:(pq + px);$$

pourvu cependant que la valeur de $\vartheta = BP$ (§ 92, *form.* 3), comme il arrive en effet.

101. Je paſſe au cas où la fraction K ne contient aucune des trois variables z, x, y; & où conſéquemment les fonctions différentielles

$$K(\lambda q + p).(\lambda dq + dp), \; K(\lambda dq + dp), \; K\lambda(\lambda dq + dp)$$

ne ſont réellement fonctions que de p & q. Il n'eſt plus poſſible alors de déterminer λ par l'élimination d'une des variables. On n'auroit, pour fixer cette détermination, que la ſeconde condition (§ 91). Mais voici une méthode bien plus facile pour ce cas-là. Dabord, il ſuit de l'hypothèſe, qu'en ſe ſervant de ma notation ordinaire (§ 92), on pourra rapporter aux trois formules ſuivantes, toutes les manières d'être poſſibles de Ψ & Π dans l'intégrale de ces équations; ſavoir,

$$1^{o}.\left\{\begin{matrix}\Psi = (p, q) + z \\ \& \\ \Pi = [p, q] + x\end{matrix}\right\} \; 2^{o}.\left\{\begin{matrix}\Psi = (p, q) + z \\ \& \\ \Pi = [p, q] + y\end{matrix}\right\} \; 3^{o}.\left\{\begin{matrix}\Psi = (p, q) + x \\ \& \\ \Pi = [p, q] + y\end{matrix}\right\}$$

Ces trois formules ne ſont évidemment qu'un cas particulier de celles de l'art. 92, dans leſquelles il ſuffira, pour ce cas-ci, de faire en outre;

dans la 1re, $A = 1$, $N = 1$ (§ 56);

dans la 2de, $A = 1$, $P = 1$;

dans la 3me, $B = 1$, $P = 1$;

ce qui donne, C étant toujours $= ER - GQ$ (§ 92),

$1^o. \gamma = - Qq$; $\zeta = -(Rq - Qp + E)$; $\eta = Rp - G$; $\vartheta = -q$;
$2^o. \gamma = E - Qq$; $\zeta = -(Rq - Qp - G)$; $\eta = Rp$; $\vartheta = p$;
$3^o. \gamma = E$; $\zeta = G + Q$; $\eta = R$, $\vartheta = 1$.

On n'a donc, dans ces trois formules, pour connoître la valeur de $d\Psi$ & $d\Pi$, que les quatre lettres E, G, Q, R à déterminer : & on a pour cela cinq équations, mais dont la 5^{me} exige ſeulement qu'on réduiſe le dernier terme de la propoſée à une de ces trois valeurs de ϑ. Suppoſons qu'on ait à intégrer

$$(p - q)\left(\frac{dp}{dx}\frac{dq}{dy} - \frac{dp^2}{dy}\right) + q\frac{dp}{dx} + (2q - p)\frac{dp}{dy} + q = 0;$$

le dernier terme de cette équation fait préſumer qu'elle appartient à la première formule; mais comme on a ici $+ q$, & que dans la formule il y a $- q$, je multiplierai cette propoſée par le facteur $- 1$; & j'aurai, en comparant terme à terme, $ER - GQ = \epsilon = q - p$, $- Qq = \gamma = - q$, $-(Rq - Qp + E) = \zeta = p - 2q$, $Rp - G = \eta = 0$; d'où je conclus $Q = 1$, $G = Rp$; & $ER - GQ = ER - Rp = q - p$, $R = \frac{q-p}{E-p}$; & comme $Rq - Qp + E = 2q - p$, ou à cauſe de $Q = 1$, que $Rq + E = 2q$, & $R = \frac{2q-E}{q}$, égalant entr'elles ces deux valeurs de R, j'en conclurai ultérieurement $E = q + \frac{1}{2}p \pm \frac{1}{2}p$; d'où

$$R = \frac{2q-E}{q} = \frac{q - \frac{1}{2}p \pm \frac{1}{2}p}{q}.$$

De plus $Q = 1$; & $\frac{dQ}{dq}$ doit être $= \frac{dR}{dp}$, ce qui prouve que la valeur de R ne peut être que $\frac{q}{q} = 1$; & conſéquemment, celle de E ſera $= q$. On a donc $E = q$, $G = p$, $Q = 1$, $R = 1$; d'où

$$d\Psi = dz + qdp + pdq, \text{ \& } \Psi = z + pq;$$

$$d\Pi = dx + dp + dq, \text{ \& } \Pi = x + p + q;$$

& enfin l'intégrale cherchée eſt

$$pq + z = F:(p + q + x).$$

102. Je prendrai, pour ſecond exemple, l'équation qui réſulte, en cherchant les ſurfaces engendrées par la circonférence d'un cercle qui ſe meut, de manière que ſon plan ſoit toujours perpendiculaire à la courbe que parcourt ſon centre, d'après la propriété commune à ces ſurfaces, d'avoir un de leurs deux rayons de courbure conſtant, & égal au rayon a du cercle générateur. Cette équation eſt *

$$a^2\left(\frac{d^2z}{dx^2}\frac{d^2z}{dy^2} - \frac{d^2z^2}{dxdy}\right) + a\left(1 + \frac{dz^2}{dy}\right)\sqrt{1 + \frac{dz^2}{dx} + \frac{dz^2}{dy}}\,\frac{d^2z}{dx^2} -$$

$$2a\frac{dz}{dx}\frac{dz}{dy}\sqrt{1 + \frac{dz^2}{dx} + \frac{dz^2}{dy}}\,\frac{d^2z}{dxdy} + a\left(1 + \frac{dz^2}{dx}\right)\sqrt{1 + \frac{dz^2}{dx} + \frac{dz^2}{dy}}\,\frac{d^2z}{dy^2}$$

$$+ \left(1 + \frac{dz^2}{dx} + \frac{dz^2}{dy}\right)^2 = 0;$$

c'eſt-à-dire, $\epsilon = a^2$; $\gamma = a(1 + q^2)\sqrt{1 + p^2 + q^2}$, $\zeta = -2apq\sqrt{1 + p^2 + q^2}$, $\eta = a(1 + p^2)\sqrt{1 + p^2 + q^2}$; $\vartheta = (1 + p^2 + q^2)^2$.

Le dernier terme, qui eſt la valeur de ϑ, n'eſt conforme à aucune des trois formules ci-deſſus ; je diviſerai donc dabord la propoſée par $(1 + p^2 + q^2)^2$, & ϑ deviendra $= 1$. J'eſſayerai ſi dans cet état elle dérive de la troiſième formule qui a auſſi $\vartheta = 1$; ſinon, je la multiplierai encore par p ou par $-q$, afin de faire le même eſſai ſur les deux autres formules.

* Voyez le Problême premier du mémoire cité art. 70.

J'ai,

J'ai, par ma première fuppofition,

$$ER - GQ = \epsilon = \frac{a^2}{(1+p^2+q^2)^2}; \; E = \gamma = \frac{a(1+q^2)}{\sqrt{(1+p^2+q^2)^3}};$$

$$G + Q = \zeta = \frac{-2apq}{\sqrt{(1+p^2+q^2)^3}}; \; R = \eta = \frac{a(1+p^2)}{\sqrt{(1+p^2+q^2)^3}}.$$

On tire de-là, en vertu de la feconde & de la quatrième équation,

$$ER = \frac{a^2(1+q^2)(1+p^2)}{(1+p^2+q^2)^3},$$

d'où réfulte dans la première,

$$QG = \frac{a^2p^2q^2}{(1+p^2+q^2)^3}.$$

Prenant enfuite le quarré de la troifième, on aura

$$G^2 + 2QG + Q^2 = \frac{4a^2p^2q^2}{(1+p^2+q^2)^3},$$

d'où ôtant la valeur de QG prife quatre fois,

$$G^2 - 2QG + Q^2 = 0; \; \& \; Q = G = \frac{-apq}{\sqrt{(1+p^2+q^2)^3}}$$

en vertu de la troifième équation. On connoît donc E, G, Q, R; & on a

$$d\Psi = dx + \frac{a(1+q^2)\,dp - apq\,dq}{\sqrt{1+p^2+q^2}^{\,3}}$$

$$= dx - a\,\frac{(2p^2q\,dq - 2q^2p\,dp - 2p\,dp) : p^4}{2\sqrt{1+\frac{q^2}{p^2}+\frac{1}{p^2}}^{\,3}}$$

ou fefant $\sqrt{1+\frac{q^2}{p^2}+\frac{1}{p^2}} = k$,

$$d\Psi = dx - a\frac{dk}{k^2} \; \& \; \Psi = x + \frac{a}{k} = x + \frac{a}{\sqrt{1+\frac{q^2}{p^2}+\frac{1}{p^2}}} =$$

$$x + \frac{ap}{\sqrt{1+p^2+q^2}}.$$

On trouvera de même,

$$d\Pi = dy + a\,\frac{(1+p^2)\,dq - pq\,dp}{\sqrt{1+p^2+q^2}^{\,3}},\ \&\ \Pi = y + \frac{aq}{\sqrt{1+p^2+q^2}}.$$

Ainſi, on a pour l'intégrale cherchée,

$$\frac{a}{\sqrt{1+\frac{dz^2}{dx}+\frac{dz^2}{dy}}}\,\frac{dz}{dx} + x = F:\left(\frac{a}{\sqrt{1+\frac{dz^2}{dx}+\frac{dz^2}{dy}}}\,\frac{dz}{dy}+y\right),$$

précifément comme dans le Mémoire cité.

Pour intégrer ultérieurement cette équation, je fais

$$\frac{aq}{\sqrt{1+p^2+q^2}} + y = w,\ \text{d'où}\ \frac{ap}{\sqrt{1+p^2+q^2}} + x = F:w.$$

J'élimine $\frac{a}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$, & j'ai $p\,(w-y) = q\,(F:w - x)$. Prenant enſuite le quarré de la première équation, il me vient $1 + p^2 + q^2 = \frac{a^2 q^2}{(w-y)^2}$, ou $(1+q^2)\,(w-y)^2 + p^2\,(w-y)^2 = a^2 q^2$;

& comme en vertu de la réſultante précédente,

$$p^2\,(w-y)^2 = q^2\,(F:w - x)^2,$$

je conclus

$$(w-y)^2 = q^2\,(a^2 - [w-y]^2 - [F:w - x]^2);$$

& j'ai enfin, pour valeurs de q & p,

$$q = \frac{w-y}{\sqrt{a^2-(w-y)^2-(F:w-x)^2}} = \frac{dz}{dy};$$

$$p = \frac{F:w-x}{\sqrt{a^2-(w-y)^2-(F:w-x)^2}} = \frac{dz}{dx};$$

ainſi $z = \int \frac{(w-y)\,dy + (F:w-x)\,dx}{\sqrt{a^2-(w-y)^2-(F:w-x)^2}}$

$$= \sqrt{a^2-(w-y)^2-(F:w-x)^2} + \int \frac{w-y+(F:w-x)\,F':w}{\sqrt{a^2-(w-y)^2-(F:w-x)^2}}\,dw;$$

& ce dernier terme ne peut être évidemment que $\phi:w$. On a donc:

$$z = \sqrt{a^2 - (w-y)^2 - (F:w - x)^2} + \phi : w, \text{ \&}$$

$$\frac{w - y + (F:w - x)\, F':w}{\sqrt{a^2 - (w-y)^2 - (F:w-x)^2}} = \phi' : w, \text{ ou}$$

$$\frac{w - y + (F:w - x)\, F':w}{z - \phi:w} = \phi' : w.$$

Ainſi l'intégrale cherchée eſt donnée par les deux équations

$$(z - \phi:w)^2 + (y - w)^2 + (x - F:w)^2 = a^2, \text{ \&}$$

$$(z - \phi:w)\, \phi':w + (y - w) + (x - F:w)\, F':w = 0,$$

dont on verra facilement la conformité avec celles (A) & (B) du Mémoire cité : la différence ne conſiſtant, qu'en ce que w eſt à la place de $\phi:w$, & réciproquement ; & qu'au-lieu de w, ſe trouve la lettre z'.

103. Si la propoſée ne peut ſe rapporter à aucune des formules précédentes ; c'eſt-à-dire, ſi les valeurs de $d\Psi$ & $d\Pi$ ne ſont point ſuſceptibles d'être repréſentées, chacune par un ſeul des trois termes A, B, C de la formule générale (§ 91), il faudra eſſayer ſi une d'elles ne pourroit pas l'être par deux de ces trois mêmes termes ; l'autre l'étant toujours par un ſeul. Dans cette ſuppoſition, Ψ par exemple, outre p & q, contiendroit deux des trois variables z, x, y ; ce qui, par les trois combinaiſons deux à deux de ces variables, donne lieu à trois cas différens.

Au reſte ; ſoit que la propoſée contienne ces trois variables ; ſoit qu'elle n'en contienne que deux, ou une, on eſſayera toujours de déterminer, comme ci-deſſus, la valeur de λ par l'élimination d'une variable. Veut-on, par exemple, eſſayer de cette manière, ſi Ψ ne contient pas les deux variables x, y ? Cela ſuppoſe que la propoſée renferme z ; ſoit ſeule ; ſoit accompagnée de x ou y, ou de toutes les deux. Ainſi Ψ ne devant point être affectée de

cette troisième variable z, A sera $= 0$, & on mettra la valeur de $d\Psi$ (§ 91) sous la forme suivante, où K représente toujours la fraction $\frac{\varepsilon}{\gamma\lambda^2 - \zeta\lambda + \eta}$,

$$d\Psi = Bdx + Cdy + K\,(B + C\lambda)\,(dp + \lambda dq).$$

On déterminera ensuite λ, par la condition que z disparoisse de la fraction K : & fesant de plus $\frac{C}{B} = \mu$, ou $C = \mu B$, on substituera cette valeur de C dans l'expression de $d\Psi$ qui par-là deviendra

$$d\Psi = B\,(dx + \mu dy + K\,[1 + \lambda\mu]\,[dp + \lambda dq]).$$

Quant à μ, il faudra la déterminer par la condition, que ce second membre doit être susceptible de devenir une différentielle exacte à quatre variables, p, q, x, y, en la multipliant par un certain facteur, représenté généralement ici par l'indéterminée B. Or on sait, que pour qu'une équation à quatre variables

$$adp + bdq + edx + gdy = 0$$

soit telle, il faut que trois des quatre équations suivantes aient lieu, ... Tt *

$$e\frac{da}{dq} - a\frac{de}{dq} + b\frac{de}{dp} - e\frac{db}{dp} + a\frac{db}{dx} - b\frac{da}{dx} = 0$$

$$g\frac{da}{dq} - a\frac{dg}{dq} + b\frac{dg}{dp} - g\frac{db}{dp} + a\frac{db}{dy} - b\frac{da}{dy} = 0$$

$$g\frac{da}{dx} - a\frac{dg}{dx} + e\frac{dg}{dp} - g\frac{de}{dp} + a\frac{de}{dy} - e\frac{da}{dy} = 0$$

$$g\frac{db}{dx} - b\frac{dg}{dx} + e\frac{dg}{dq} - g\frac{de}{dq} + b\frac{de}{dy} - e\frac{db}{dy} = 0$$

d'où résulteront quatre équations aux différences partielles à qua-

* Voyez leçons de Calc. diff. & intég. de Mr. Cousin, page 293.

tre variables, dont la variable principale fera μ; & les trois autres feront p, q, x; ou p, q, y; ou p, x, y; ou enfin q, x, y; c'eft-à-dire, que dans chacune de ces quatre équations, il y aura une des quatre variables p, q, x, y qui aura été traitée comme conftante.

Nous voici donc parvenus à un réfultat femblable à celui des articles 58 & 59; avec la différence cependant, que ces équations-ci ne fe rapportent pas à la formule particulière D de l'art. 60; mais à la formule générale de l'art. 27, qui a un terme fans différence partielle, & dont l'intégrale renferme trois fonctions Ψ, Π, Ω. Et en fuivant le même raifonnement, nous conclurons ici que, lorfqu'on fera parvenu à intégrer une des équations Tt; par exemple, la 3^me^, où q a été traitée comme conftante, ce qui donnera une équation finie de la forme $\Psi' = F:(\Pi', \Omega')$; nous conclurons, dis-je, que la plus grande extenfion que puiffe prendre cette équation finie, en y remettant la lettre q, fera

$$M\Psi' + N = F:(P\Pi' + Q, G\Omega' + H),$$

M, N, P, Q, G, H étant toutes fonctions de q feule. Il fuffira donc de déterminer ces fonctions, pour en conclure la vraie intégrale complette des quatre équations fimultanées Tt.

104. Qu'on fe propofe d'intégrer l'équation

$$(z - 2p)\left(\frac{dp}{dx}\frac{dq}{dy} - \frac{dp^2}{dy}\right) + (q^2 - 2px)\frac{dp}{dx} + (q^2 - pq + 2py - zx)\frac{dp}{dy} + (zy - pq)\frac{dq}{dy} + q^2y - pqx = 0;$$

on a $K = \frac{z - 2p}{(q^2 - 2px)\lambda^2 - (q^2 - pq - zx + 2py)\lambda + zy - pq}$.

Pour en faire difparoître z, je fuppoferai (§ 100) $z - 2p = D$,

d'où $z = 2p + D$, &

$$K = \frac{D}{(q^2 - 2px)\lambda^2 - (q^2 - pq + 2py - 2px - Dx)\lambda + 2py + Dy - pq}.$$

On fera donc

$$(q^2 - 2px)\lambda^2 - (q^2 - pq + 2py - 2px)\lambda + 2py - pq = 0,$$

& il reſtera

$$K = \frac{D}{Dy + D\lambda x} = \frac{1}{y + \lambda x}.$$

Il réſulte, de l'équation précédente, $\lambda = 1$; d'où $K = \frac{1}{y+x}$; & ſubſtituant ces valeurs dans l'expreſſion générale de $d\Psi$ (§ 103), elle devient. . . . . (W)

$$d\Psi = B\left(dx + \mu dy + \frac{1+\mu}{y+x} dp + \frac{1+\mu}{y+x} dq\right).$$

Or il faut que cette quantité puiſſe devenir une différentielle exacte, en la multipliant par un facteur. Ainſi, en comparant cette expreſſion avec la formule ci-deſſus

$$adp + bdq + edx + gdy = 0,$$

on trouve $a = b = \frac{1+\mu}{y+x}$, $e = 1$, $g = \mu$, & les quatre équations Tt ſe changent en

$\frac{d\mu}{dq} - \frac{d\mu}{dp} = 0$, y étant conſtante,

$\frac{d\mu}{dq} - \frac{d\mu}{dp} = 0$, x étant conſtante,

$$(y+x)^2 \frac{d\mu}{dp} - (y+x)\frac{d\mu}{dx} - (y+x)\frac{d\mu}{dy} + 1 - \mu^2 = 0,$$

$$(y+x)^2 \frac{d\mu}{dq} - (y+x)\frac{d\mu}{dx} - (y+x)\frac{d\mu}{dy} + 1 - \mu^2 = 0.$$

On voit tout de ſuite que ces quatre équations ſe réduiſent à une des deux premières, & une des deux dernières, par exemple, la

troisième ; & intégrant celle-ci par la méthode de l'art. 24, on trouve

$$\frac{(y+x)(1-\mu)}{1+\mu} = F : (y - x, p + xy).$$

Ainsi $\Psi' = \frac{(y+x)(1-\mu)}{1+\mu}$, $\Pi' = y - x$, $\Omega' = p + xy$; on aura donc, selon ce que j'ai dit plus haut,

$$\Psi = M\frac{(y+x)(1-\mu)}{1+\mu} + N, \ \Pi = P(y-x) + Q, \ \& \ \Omega = G(p+xy) + H,$$

chacune de ces indéterminées étant fonction de q. Maintenant, pour déterminer ces fonctions, je différentierai l'équation $\Psi = F : (\Pi, \Omega)$ en supposant, par exemple, y constante ; & le résultat devra coïncider avec celui $\frac{d\mu}{dq} - \frac{d\mu}{dp} = 0$ que nous donne, pour la même hypothèse, la première des quatre équations Tt. Substituant donc, dans la formule de l'art. 27, à Ψ, Π, Ω, les valeurs qu'on vient de trouver, & fesant encore ici, comme (§ 61), $dG = G'dq$, $dH = H'dq$, &c. on aura dans l'hypothèse de y constante, l'équation aux différences partielles

$$-2M\frac{y+x}{(1+\mu)^2}\left(G(\overline{y-x}\,P'+Q')\frac{d\mu}{dx} + PG\frac{d\mu}{dq} - (P[\overline{p+xy}\,G'+H'] + Gy[\overline{y-x}\,P'+Q'])\frac{d\mu}{dp}\right) + GM\frac{1-\mu}{1+\mu}(\overline{y-x}\,P'+Q') + PG\left(\frac{(y+x)(1-\mu)}{1+\mu}M'+N'\right) = 0.$$

Pour réduire cette équation à celle $\frac{d\mu}{dp} - \frac{d\mu}{dq} = 0$, on voit qu'il faut annuller ; 1°. le coëfficient de $\frac{d\mu}{dx}$; 2°. le terme sans différence partielle ; & enfin 3°. qu'il faut égaler entr'eux les coëfficiens de $\frac{d\mu}{dp}$ & $\frac{d\mu}{dq}$. De ces trois conditions résultent, après réduction, les

trois équations suivantes,

$$1^o.\ G\left(\overline{y - x}\ P' + Q'\right) = o;$$

$$2^o.\ PG\left(\frac{(y+x).(1-\mu)}{1+\mu} M' + N'\right) = o;$$

$$3^o.\ PG = P\left(\overline{p + xy}\ G' + H'\right).$$

Dabord, P ni G ne peuvent être $= o$; car autrement Π & Ω ne contiendroient plus, l'une $y - x$, & l'autre $p + xy$; ce qui est absurde. Il résulte de-là que la première équation donne $(y - x)$ $P' + Q' = o$, & conséquemment P' & $Q' = o$; puisque ni P' ni Q' ne doivent contenir y ni x; ainsi P & Q sont constantes. De même, en vertu de la seconde équation, on a M' & $N' = o$, & M & N constantes. Enfin, par la troisième, $G = (p + xy)\ G'$ $+ H'$; ce qui exige encore ici que G' soit $= o$; d'où G est constante, aussi bien que H' qui lui est égale; & ensuite, $H = q$. Il suit de-là, que

$$\Psi = \frac{(y + x)(1 - \mu)}{1 + \mu}, \Pi = y - x; \Omega = p + q + xy;$$

& enfin, que l'intégrale complette du système des quatre équations simultanées Tt est

$$\frac{(y+x)(1-\mu)}{1+\mu} = F:(y - x, p + q + xy).$$

Les deux valeurs les plus simples qu'offre cette expression, sont

$$\frac{(y+x)(1-\mu)}{1+\mu} = y - x \ \&$$

$$\frac{(y+x)(1-\mu)}{1+\mu} = p + q + xy.$$

De la première résulte $\mu = \frac{x}{y}$, qui substituée dans l'équation W ci-dessus, la change en

$$d\Psi = B\left(dx + \frac{x}{y}\,dy + \frac{1}{y}\,dp + \frac{1}{y}\,dq\right);$$

&

& en la multipliant par y ; c'eſt-à-dire, en feſant $B = y$, on aura

$$d\Psi = d\,(p + q + xy).$$

La ſeconde donne $\mu = \frac{y+x-p-q-xy}{y+x+p+q+xy}$: & l'équation W ſe transforme en

$$d\Psi = B\left(dx + \frac{(y+x-p-q-xy)\,dy + 2dp + 2dq}{y+x+p+q+xy}\right),$$

dont le facteur ne ſe préſente pas auſſi facilement. Mais on trouvera dumoins, que cette ſeconde valeur de $d\Psi$ n'eſt pas moins ſuſceptible que la première, de devenir une différentielle exacte, au moyen d'un facteur. On eſt donc aſſuré qu'une de ces deux valeurs de Ψ eſt la véritable : mais pour en déterminer le choix, il faut chercher à chacune d'elles une valeur correſpondante de l'autre fonction Π, & examiner enſuite ſi par-là la cinquième des équations G (§ 56) devient identique.

105. Pour parvenir à cette valeur de Π, de celle $\Psi = p + q + xy$, je tire $A = 0$, $B = y$, $C = x$, $E = 1$, $G = 1$ (§ 56). De plus, la valeur de Π ne pouvant contenir que z, j'ai auſſi $N = 0$, $P = 0$. Ainſi il ne me reſte à déterminer que M, Q & R. Or les quatre premières équations G me donnent, en y ſubſtituant toutes ces valeurs, & multipliant la propoſée par un facteur ω,

$R - Q = \epsilon = (z - 2p)\,\omega$,

$Mq - Qx = \gamma = (q^2 - 2px)\,\omega$,

$Mq - Mp - Rx + Qy = \zeta = (q^2 - pq + 2py - zx)\,\omega$,

$Ry - Mp = \eta = (zy - pq)\,\omega$.

Prenant donc dans la ſeconde, la valeur de Mq ; & dans la quatrième, celle de Mp, & les ſubſtituant dans la troiſième, je par-

viens à un réſultat $Q - R = \omega (2p - z)$, qui eſt parfaitement d'accord avec la première équation, quelle que ſoit l'indéterminée ω. Je puis donc la ſuppoſer $= 1$, d'où

$$R - Q = z - 2p,$$
$$Mq - Qx = q^2 - 2px,$$
$$Ry - Mp = zy - pq;$$

& j'en conclus $R = z$, $Q = 2p$, $M = q$; d'où

$$d\Pi = qdz + 2pdp + zdq, \text{ \& } \Pi = p^2 + qz.$$

Conſéquemment l'intégrale de la propoſée eſt

$$p + q + xy = F:(p^2 + qz)$$

qui ſatisfait effectivement à la dernière des cinq équations G (§ 56).

106. Le cas où, dans la même hypothèſe, la propoſée ne contiendroit aucune des trois variables z, x, y, ne peut ſe traiter comme nous avons fait à l'art. 101, où les valeurs de Ψ & Π ne renfermoient toutes deux, qu'une de ces trois variables, & où, d'après cela, nous avons pu réduire toutes les intégrales de ce genre à une ſeule forme : en voici la raiſon. Tant qu'il n'y a qu'une des trois variables z, x, y, quelle que ſoit la conſtante qui multiplie z, par exemple, dans Ψ; & x dans Π; comme ſi on avoit

$$(p, q) + mz = F:([p, q] + nx),$$

(car il eſt évident, que pour que z & x exiſtent réellement dans l'intégrale, ſans paroître dans la propoſée, elles ne peuvent y exiſter que ſous la forme mz, nx) il eſt clair que cette équation reſte la même, en écrivant

$$m \left(\frac{(p, q)}{m} + z\right) = F:\left(n\left(\frac{[p, q]}{n} + x\right)\right);$$

ou ſimplement

$$\frac{(p,q)}{m} + z = F:\left(\frac{[p,q]}{n} + x\right);$$

& qu'ainſi, en ſuppoſant z & x, ſans autre coëfficient que l'ünité, on parviendra toujours à une fonction de p & q convenable à cette ſuppoſition, & telle qu'il n'en réſulte aucune altération dans l'intégrale cherchée : ce qui n'a pas lieu, lorſqu'y ayant deux de ces variables, on a par exemple,

$$\Psi = (p, q) + mz + m'x.$$

107. Ce cas, & une infinité d'autres, rentrent dans la ſolution générale; c'eſt-à-dire, dans celle où Ψ, auſſi bien que Π, eſt cenſée contenir, outre p & q, les trois variables z, x, y. Feſant donc (§ 91) $B = \xi A$, $C = \mu A$, on aura, pour l'expreſſion de $d\Psi$, ou de $d\Pi$ (car à cauſe de la permutabilité de ces deux fonctions entr'elles, elles paroîtront néceſſairement enſemble)

$$d\Psi = A\left(dz + \xi dx + \mu dy + \frac{\varepsilon}{\gamma\lambda^2 - \zeta\lambda + \eta}(\lambda q + p + \xi + \lambda\mu)(dp + \lambda dq)\right);$$

& il s'agira de rendre cette quantité ſuſceptible de devenir une différentielle exacte au moyen d'un facteur. Or, comme on a ici cinq variables p, q, z, x, y, cette condition ſera exprimée par dix équations analogues à celles de l'art. 103; mais dont il ſuffira d'en réaliſer ſix *. Ainſi il faudroit, au moyen de ces ſix équations, ſavoir déterminer λ, μ, ξ; en obſervant qu'ici, dans chacune d'elles, il y a deux des cinq variables qui ſont traitées comme conſtantes. On trouvera (§ 62) un exemple de ce genre, où j'ai

* Voyez leçons de Calc. différ. & intég. de Mr. Couſin, page 293.

completté une pareille intégrale ; & on se conduiroit d'après le même principe, pour completter les intégrales qui résulteront de ces six équations.

CHAPITRE NEUVIEME.

Des équations à trois variables z, x, y, d'un ordre & d'un degré quelconques.

108. J'Ai réduit, dans le chapitre second, toutes les intégrales des équations aux différences partielles à trois variables z, x, y du 1[er] ordre & d'un degré quelconque, à une des trois formules

1°. $\Pi = \int(\varpi dx + Kdy)$ (§ 18), où K ne contient que x, y & ϖ;

2°. $x = \int(\frac{d\Pi - Kdy}{\varpi})$ (§ 20), lorsque K contient Π, y & ϖ; & enfin

3°. $\int Ydy = \int\frac{d\Pi - \varpi dx}{K}$, lorsque K contient Π, x & ϖ.

J'adopterai encore ici ces mêmes formules, avec la différence que Π sera fonction de p, q, z, x, y. Mais comme elles dérivent toutes trois d'une même équation $d\Pi = \varpi dx + Kdy$, par laquelle il faut nécessairement passer, je me bornerai à la première d'entr'elles ; & il sera facile de juger, par l'expression de K, laquelle des trois il conviendra d'employer dans chaque cas particulier.

Je supposerai donc que la fonction Π soit telle, que

$$d\Pi = Adz + Bdx + Cdy + Edp + Gdq;$$

& de $\Pi = \int(\varpi dx + Kdy)$, je conclurai

$$Ap + B + E\frac{dp}{dx} + G\frac{dp}{dy} = \varpi,$$

$$Aq + C + E\frac{dp}{dy} + G\frac{dq}{dy} = K.$$

Eliminant enſuite ϖ, au moyen de ces deux équations, je parviendrai à une équation aux différences partielles du ſecond ordre, dont la forme & le degré dépendront de la manière dont K contient ϖ. Il ne s'agit donc ici, comme à l'art. 18, que de connoître quelle fonction de ϖ doit être K, afin que la réſultante de l'élimination de ϖ produiſe une équation, qu'on puiſſe comparer, terme à terme, avec la propoſée. Et en ſuivant les mêmes raiſonnemens qu'à l'article cité, on verra qu'il ſuffit, pour trouver cette équation entre ϖ & K, d'en former une qui contienne exactement les mêmes termes que la propoſée, mais dont tous les coëfficiens ſoient indéterminés ; & d'y ſubſtituer enſuite ϖ à $\frac{dp}{dx}$, & K à $\frac{dq}{dy}$. Il ne faudra plus alors que mettre, au lieu de ϖ & K, leurs valeurs ci-deſſus, & on aura l'équation de comparaiſon demandée.

109. Soit la propoſée à intégrer

$$p^2\frac{dp}{dy}\frac{dq}{dy} + pq\frac{dp^2}{dy} + pq\frac{dp}{dx}\frac{dq}{dy} + q^2\frac{dp}{dx}\frac{dp}{dy} + 4pqz\frac{dp}{dy} + 2q^2z\frac{dp}{dx} + 2p^2z\frac{dq}{dy} + 4pqz^2 - xy = 0.$$

Je commence par former l'équation indéterminée

$$\mathrm{a}\frac{dp}{dy}\frac{dq}{dy} + \mathrm{b}\frac{dp^2}{dy} + \mathrm{e}\frac{dp}{dx}\frac{dq}{dy} + \mathrm{g}\frac{dp}{dx}\frac{dp}{dy} + \mathrm{h}\frac{dp}{dy} + \mathrm{l}\frac{dp}{dx} + \mathrm{m}\frac{dq}{dy} + \mathrm{n} = 0,$$

& mettant K & ϖ, au lieu de $\frac{dq}{dy}$ & $\frac{dp}{dx}$, je la change en... (D)

$$(\mathrm{a}\frac{dp}{dy} + \mathrm{m})K + \mathrm{b}\frac{dp^2}{dy} + \mathrm{h}\frac{dp}{dy} + (\mathrm{g}\frac{dp}{dy} + \mathrm{l})\varpi + \mathrm{e}\varpi K + \mathrm{n} = 0,$$

qui contient la rélation la plus générale que puiſſe avoir dans ce

$l = 0$, $m = 0$, $C = 0$, $B = 0$, & $n = - xy$; & on conclura ultérieurement, au moyen de la 6^{me} ou 7^{me} équation ci-dessus, $A = 2z$.

Ainsi en résumant, $A = 2z$, $B = 0$, $C = 0$, $E = q$, $G = p$; $a = 0$, $b = 0$, $e = 1$, $g = 0$, $h = 0$, $l = 0$, $m = 0$, $n = - xy$; d'où

$$d\Pi = 2zdz + qdp + pdq, \text{ \& } \Pi = z^2 + pq.$$

De plus, l'équation D, qui détermine K en ϖ, se réduit à $\varpi K - xy = 0$, d'où $K = \frac{xy}{\varpi}$; on a donc enfin, pour l'intégrale cherchée,

$$z^2 + pq = \int(\varpi dx + \tfrac{xy}{\varpi}\, dy),$$

où il ne s'agit plus que de déterminer ϖ, de manière que la quantité sous le signe d'intégration soit une différentielle exacte, ainsi que je l'ai enseigné au chapitre second.

110. Etant parvenu à cette intégrale, on procèdera à son intégration ultérieure; & pour cela on employera; soit la méthode de l'art. 13; soit plutôt celle de l'art. 18, qui est plus générale. L'intégrale précédente n'est point de nature à pouvoir y appliquer cette méthode, à cause du terme z^2; mais, afin de donner un exemple du résultat de cette opération, je supposerai qu'on ait à intégrer

$$pq = \int(\varpi dx + \tfrac{xy}{\varpi} dy),$$

ou, représentant le second membre par Q, $pq - Q = 0$. Je formerai donc encore ici l'équation indéterminée

$$a \frac{dz}{dx}\frac{dz}{dy} + b = 0,$$

d'où, mettant ρ & K pour $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$, je conclurai $a\rho K + b = 0$ (ρ prend ici la place de ϖ qui est déjà employée) je substituerai ensuite

à

à K & ρ leurs valeurs $A\frac{dz}{dy}+C$, $A\frac{dz}{dx}+B$ (§ 18), & j'aurai enfin l'équation de comparaiſon

$$\mathrm{a}A^2\frac{dz}{dx}\frac{dz}{dy}+\mathrm{a}AB\frac{dz}{dy}+\mathrm{a}AC\frac{dz}{dx}+\mathrm{a}BC+\mathrm{b}=0,$$

d'où, ayant multiplié la propoſée $\frac{dz}{dx}\frac{dz}{dy}-Q=0$ par ω, je tire

$$\mathrm{a}A^2=\omega,\ \mathrm{a}AB=0,\ \mathrm{a}AC=0,\ \mathrm{a}BC+\mathrm{b}=-\omega Q.$$

On voit dabord que B & C ſont $=0$; & qu'ainſi $d\Pi$ ſe réduit à Adz, A étant fonction de z ſeule. On a enſuite $\mathrm{a}=\frac{\omega}{A^2}$, & $\mathrm{b}=-Q\omega$. Donc $K=-\frac{b}{a\rho}=\frac{A^2Q\omega}{\rho\omega}=\frac{A^2Q}{\rho}$; & comme ici K ne ſauroit contenir z (§ 13), puiſque Q renferme déjà x & y, il faut que A ſoit conſtante; & on a enfin

$$Az=\int(\rho dx+\frac{A^2Q}{\rho}dy),$$

où on peut donner à A telle valeur conſtante qu'on voudra, ou ce qui eſt plus ſimple, la faire $=1$; d'où il réſultera

$$z=\int(\rho dx+\frac{\int(\varpi dx+\frac{xy}{\varpi}dy)}{\rho}dy).$$

On aura en outre deux équations; dont la première, ayant ϖ pour variable principale, ſera donnée par la condition que $\varpi dx+\frac{xy}{\varpi}dy$ ſoit une différentielle exacte; & la ſeconde, ayant ρ pour variable principale, le ſera par celle, que toute la quantité ſous le ſigne d'intégration ſoit auſſi une différentielle exacte: & dans cette dernière, on regardera ϖ comme déjà déterminée par la précédente.

111. Cette méthode d'intégration pour les équations du ſecond

ordre d'un degré quelconque, eſt celle dont j'ai fait mention ci-deſſus (§ 85), lorſqu'il s'agiſſoit d'intégrer ultérieurement les intégrales des équations du troiſième ordre. On voit dabord qu'elle s'applique immédiatement à toutes celles de la première claſſe.

Quant aux intégrales de la ſeconde claſſe; c'eſt-à-dire, celles où Ψ & Π contiennent, ou peuvent contenir toutes deux σ, σ', z, x & y, d'une manière quelconque, on pourra quelquefois les ramener à la méthode précédente, au moyen d'une préparation analogue à celle que j'ai employée (§ 73). Telles ſeront les équations où les deux fonctions Ψ & Π contiennent σ, mais pas σ'. Soit par exemple,

$$r^2 s^2 + x = f:(rs + y),$$

r & s ayant la même ſignification que (§ 75). On feroit $rs + y = \text{H}$, d'où $r^2 s^2 + x = f:\text{H}$; & éliminant $rs = \text{H} - y$, $(\text{H} - y)^2 + x = f:\text{H}$. Enſuite, de $rs = \text{H} - y$, ou $\frac{dp}{dx}\frac{dp}{dy} = \text{H} - y$, on déduiroit évidemment, comme on a fait (§ 74) où l'équation étoit $\frac{dz}{dx}\frac{dz}{dy} = \text{H} - y$, en mettant ici p au lieu de z,

$$p = \frac{dz}{dx} = \int(\varpi\, dx + \frac{\text{H} - y}{\varpi}\, dy);$$

& intégrant de nouveau,

$$z = \int(dx \int(\varpi\, dx + \frac{\text{H} - y}{\varpi}\, dy)) + \phi:y.$$

112. Mais lorſque Ψ & Π contiendront toutes les deux σ & σ', ſi cette équation eſt ſuſceptible d'une intégration ultérieure, voici comme on pourra y parvenir. On commencera par ſuppoſer dans $\Psi = f:\Pi$, $\Psi = \text{G}$, $\Pi = \text{H}$; d'où 1°. $\text{G} = f:\text{H}$. Enſuite, Ψ & Π contenant toutes deux σ & σ', on en déduira les valeurs de

chacune de ces deux dernières fonctions ; ce qui fournira deux nouvelles équations ; dont l'une donnera σ ; & l'autre σ', en G, H & autres variables. On intègrera dabord l'équation qui fournit la valeur de σ (après lui avoir substitué sa fonction équivalente en r, s, t) de la même manière qu'on a intégré celle de l'article précédent. Son intégrale ne contenant plus que p & q, on en conclura, au moyen de la seconde équation qui renfermoit la valeur de σ', après avoir aussi remis, au lieu de cette dernière lettre, la fonction de p & q qu'elle représente ; on en conclura, dis-je, les deux valeurs de p & q ; c'est-à-dire $\frac{dz}{dx}$ & $\frac{dz}{dy}$; d'où résulte naturellement la connoissance de $pdx + qdy = dz$, & enfin, celle de z. Supposons qu'on se propose d'intégrer

$$rsx - pqy = f:(rsy + pqx)\text{ ; c'est-à-dire,}$$

$$\sigma x - \sigma' y = f:(\sigma y + \sigma' x),$$

σ étant $= rs$, & $\sigma' = pq$. Je fais $\sigma x - \sigma' y = \text{G}$, & $\sigma y + \sigma' x = \text{H}$; d'où 1°. $\text{G} = f:\text{H}$. Ensuite, de ces deux expressions je conclus

$$\sigma = \frac{\text{H}y + \text{G}x}{y^2 + x^2} \text{ \& } \sigma' = \frac{\text{H}x - \text{G}y}{y^2 + x^2}.$$

Il s'agit dabord d'intégrer la première de ces deux équations, qui en remettant pour σ sa valeur rs, devient

$$\frac{dp}{dx}\frac{dp}{dy} = \frac{\text{H}y + \text{G}x}{y^2 + x^2};$$

& on trouve, comme dans l'article précédent,

$$p = \frac{dz}{dx} = \int\left(\varpi dx + \frac{\text{H}y + \text{G}x}{(y^2 + x^2)\varpi} dy\right),$$

qui soit $=$ Q. D'ailleurs on a, par la valeur de σ',

$$pq = \frac{Hx - Gy}{y^2 + x^2}; \text{ donc } q = \frac{Hx - Gy}{(y^2 + x^2)Q}, \&$$

$$z = \int (pdx + qdy) = \int \left(Qdx + \frac{Hx - Gy}{(y^2 + x^2)Q} dy \right).$$

Tout ce que je viens de dire ſur l'intégration des équations du ſecond ordre & d'un degré quelconque, s'applique également à celles d'un ordre plus élevé : & la ſeule différence conſiſtera, en ce qu'il faudra donner à la fonction Π toute l'étendue convenable à chaque ordre ; c'eſt-à-dire, que pour le troiſième ordre, par exemple, il faudra joindre aux variables p, q, z, x, y, qui ſuffiſent dans le ſecond ordre, les trois nouvelles variables $r = \frac{dp}{dx}$, $s = \frac{dp}{dy}$, & $t = \frac{dq}{dy}$; & de même dans les ordres plus élevés.

TABLEAU RECAPITULATIF.

L'Enchaînement des propoſitions n'ayant pas permis de réunir, dans un même chapitre, les différentes méthodes qui peuvent s'appliquer à une même équation, j'ai cru, pour la commodité du lecteur, devoir lui préſenter ici, ſous un point de vue très-reſſerré, le tableau de celles auxquelles ſe rapporte chacune des méthodes d'intégration, que j'enſeigne dans ce Mémoire. Par ce moyen, ayant à intégrer une certaine équation aux différences partielles, on ſaura dabord quelle eſt celle de ces méthodes qui lui convient, & à quel article elle ſe trouve décrite. J'indiquerai auſſi l'ordre qu'il faut ſuivre, dans les différens eſſais qu'on aura ſouvent à faire

ſur une même équation : car il eſt très-peu de cas où l'on puiſſe, d'après la forme de la propoſée, conclure avec certitude à quelle méthode d'intégration elle appartient.

Je commencerai par les cas les plus ſimples, en avançant ſucceſſivement vers les plus compliqués.

I FORMULE GÉNÉRALE.

$$M \frac{dz}{dy} + N \frac{dz}{dx} + P = 0.$$

1°. Si M & N ne contiennent pas la variable principale z, on l'intègrera par la méthode directe de l'art. 2. Il eſt cependant des cas, où il faudra avoir recours à quelqu'une des méthodes indirectes ci-après. Ce ſont ceux, où on ne peut avoir la valeur de x, en y & s; ni réciproquement, celle de y, en x & s (§ 10).

2°. Si M & N contenant z, d'une manière quelconque, $P = 0$, la propoſée s'intègrera en général par la méthode directe de l'art. 4. Il peut cependant ſe préſenter ici la même difficulté que dans l'art. préc.; & il faut alors traiter encore cette équation par quelque méthode indirecte; c'eſt-à-dire, qu'elle rentre dans la claſſe de celles qui vont ſuivre.

3°. Les trois coëfficiens M, N, P étant quelconques, on pourra d'abord eſſayer la méthode générale de l'art. 1; ſoit en ſuivant le procédé indiqué art. 9, qui conſiſte à trouver une intégrale particulière de l'équation R (§ 1); ſoit en cherchant, au moyen de l'art. 36, l'intégrale complette de la même équation, par la conſidération des équations à cinq variables.

4°. Si ces eſſais ne réuſſiſſent point, on tentera d'intégrer la

proposée, par la considération des équations à quatre variables (§ 11, 30).

5°. Enfin, pour dernière ressource, on aura recours à la méthode de tâtonnement (§ 7, 8), & cette méthode réussira toutes les fois que la proposée contiendra formellement tous les termes qui doivent composer les deux équations de tâtonnement; c'est-à-dire, qu'il n'y aura point de ces termes qui se soient entredétruits (§ 10).

II. FORMULE GÉNÉRALE.

La proposée ne contenant que des différences partielles du Ier. ordre par deux variables x, y ; *mais sous une forme quelconque.*

1°. Si la formule $dz = pdx + Kdy$ qui en résulte (§ 12), est telle, qu'on puisse en conclure pour z, x, ou y, (ou pour une fonction quelconque Z, X, Y d'une de ces trois variables) une valeur qui ne renferme que les deux autres variables avec l'indéterminée p, on intègrera la proposée par la méthode enseignée (§ 12.... 17).

2°. Si cette condition n'a pas lieu, il faudra employer la méthode plus générale des art. 18..... 21.

III. FORMULE GÉNÉRALE.

$$M\frac{dz}{dy} + N\frac{dz}{dx} + P\frac{dz}{du} + Q = 0.$$

1°. Si les trois coëfficiens M, N, P ne sont point compliqués de la variable principale z, on se servira de la méthode directe des art. 24 & 25, qui réussira dans tous les cas où une au moins, des trois fonctions qui constituent l'intégrale d'une pareille équation (§ 24), ne renfermera que deux des trois variables u, x, y.

2°. Si M, N & P contenant z d'une manière quelconque, Q eſt $= 0$, la propoſée ſera du nombre de celles qui s'intègrent par l'art. 26, en ſuppoſant de même ici la reſtriction mentionnée dans l'art. préc. Et, ſi cette reſtriction n'a pas lieu, on aura recours à la méthode des art. 31 & 32, qui conſiſte à ramener la formule à quatre variables à celle à trois variables.

3°, Les coëfficiens M, N, P, Q étant quelconques, on peut auſſi employer la méthode de l'art. 36, qui porte ſur la conſidération des équations aux différences partielles à cinq variables; & la réuſſite dépend encore ici de certaines conditions énoncées dans ce même article.

4°. Enfin, on a pour dernière reſſource, la méthode de tâtonnement (§ 28, 29), analogue à celle que j'ai employée pour les équations à trois variables, & qui conſiſte à anéantir le terme ſans différence partielle; ce qui ramène la formule ci-deſſus au cas que nous venons d'examiner (2°).

IV. FORMULE GÉNÉRALE.

$$M \frac{dz}{dy} + N \frac{dz}{dx} + P \frac{dz}{du} + Q \frac{dz}{dt} = 0.$$

C'eſt la ſeule formule à cinq variables dont je me ſois occupé, à cauſe de ſon utilité pour l'intégration de celles à quatre variables. Elle s'intègre par la méthode directe de l'art. 35, ſous des conditions aſſez difficiles. Au reſte, il eſt aiſé d'étendre, *mutatis mutandis*, à ce nombre de variables, les méthodes ci-deſſus, lorſque la ſolution de quelque problème intéreſſant mènera à de pareils réſultats.

V. FORMULE GÉNÉRALE.

$$\alpha \frac{d^2 z}{dy^2} + \beta \frac{d^2 z}{dxdy} + \gamma \frac{d^2 z}{dx^2} + \delta \frac{dz}{dy} + \varepsilon \frac{dz}{dx} + \varpi = 0,$$

aucun des coëfficiens ne contenant p *ni* q, *&* *ceux* α, β, γ, *des trois termes du second ordre, n'étant fonctions que de* x *&* y.

1°. Si aucun de ces coëfficiens ne manquant dans l'équation, la quantité $\beta^2 - 4\alpha\gamma$ (§ 45) n'est pas $= 0$, on employera la méthode enseignée (§ 38.... 44).

2°. Si aucontraire, dans la même hypothèse, $\beta^2 - 4\alpha\gamma = 0$, il faudra se servir de celle qui se trouve détaillée (§ 45, 46).

3°. Si un des trois coëfficiens, α, β, γ, manque dans l'équation, on se conformera à l'art. 47; & s'il en manque deux, à celui 48.

4°. Pour intégrer ultérieurement ces premières intégrales, on suivra ce qui est dit (§ 41, 43, 44).

VI. FORMULE GÉNÉRALE.

$$\gamma \frac{d^2 z}{dx^2} + \zeta \frac{d^2 z}{dxdy} + \eta \frac{d^2 z}{dy^2} + \vartheta = 0,$$

où les coëfficiens γ, ζ, η, ϑ *peuvent contenir, de quelque manière que ce soit,* p *&* q.

1°. Les équations comprises dans cette formule très-étendue, qui renferme, non-seulement toutes les précédentes du second ordre, mais encore la formule de l'art. 38, dans toute sa généralité, se traiteront par la méthode expliquée (§ 56.... 71).

2°. Pour l'intégration ultérieure de ces premières intégrales, on pourra se servir de la méthode (§ 73, 74).

VII.

VII. FORMULE GÉNÉRALE.

$$\beta\left(\frac{d^2z}{dx^2}\frac{d^2z}{dy^2}-\frac{d^2z^2}{dxdy}\right)+\gamma\frac{d^2z}{dx^2}+\zeta\frac{d^2z}{dxdy}+\eta\frac{d^2z}{dy^2}+\vartheta=0,$$

β n'étant jamais zéro, sans quoi on retrouveroit la formule précédente.

1°. Si le terme $\frac{d^2z}{dx^2}\frac{d^2z}{dy^2}-\frac{d^2z^2}{dxdy}$ reste seul, cette équation très-simple, est intégrée par l'art. 86.

2°. Si tous les termes, qui ne contiennent pas de différence partielle du second ordre, disparoissent; c'est-à-dire, si $\vartheta=0$, on se conformera à ce qui est expliqué depuis l'art. 86 jusqu'à 91.

3°. En ne fesant aucune supposition particulière, si la proposée contient au moins une des trois variables z, x, y, on la rapportera; soit aux formules (§ 91); soit à celles (§ 103.... 105).

4°. Si la proposée ne contient aucune des trois variables z, x, y, on la traitera d'après les articles 101 & 102.

5°. Si ces différens procédés n'ont pas de succès, la proposée rentre dans la classe des équations de l'art. 107, pour lesquelles je n'ai pu que faire entrevoir une possibilité de solution.

6°. Quant à l'intégration ultérieure de ces premières intégrales, on en voit un exemple (§ 102), qui suffit pour donner une idée de la manière dont il faudra s'y prendre en d'autres occasions.

VIII. FORMULE GÉNÉRALE.

La proposée ne contenant que des différences partielles du premier & du second ordre par x *&* y; *mais sous une forme quelconque.*

Le chapitre neuvième est consacré à cet objet. On consultera donc, pour la première intégration de ces équations, les articles

108, 109; & pour leur intégration ultérieure, celui 110. Et on obſervera que les mêmes principes peuvent ſervir à établir une théorie ſemblable, pour les équations des ordres ſupérieurs.

IX. FORMULE GÉNÉRALE.

$$\alpha \frac{d^3 z}{dy^3} + \beta \frac{d^3 z}{dy^2 dx} + \gamma \frac{d^3 z}{dy dx^2} + \delta \frac{d^3 z}{dx^3} + \varepsilon \frac{d^2 z}{dy^2} + \zeta \frac{d^2 z}{dy dx} + \eta \frac{d^2 z}{dx^2} + \vartheta \frac{dz}{dy} + \lambda \frac{dz}{dx} + \mu = 0,$$

aucun de ces coëfficiens ne contenant de différences partielles des deux ordres inférieurs, & ceux α, β, γ, δ, ε, ζ, η, des ſept termes des deux ordres les plus élevés, ne contenant que x *&* y.

1°. Si la fonction $\beta\sigma\delta - 2\delta^2 - \alpha^2\sigma^3$ (§ 53) n'eſt pas $= 0$, la propoſée ſe rapportera aux art. 50 & 51; & pour l'intégration ultérieure, on conſultera l'art. 52.

2°. Si aucontraire cette fonction ſe réduit à zéro, on ſe conformera aux art. 53 & 54.

X. FORMULE GÉNÉRALE.

$$\beta \frac{d^3 z}{dx^3} + \gamma \frac{d^3 z}{dx^2 dy} + \delta \frac{d^3 z}{dx dy^2} + \zeta \frac{d^3 z}{dy^3} + \eta = 0,$$

où les coëfficiens β, γ, δ, ζ, η peuvent contenir, de quelque manière que ce ſoit, les différences partielles des premier & ſecond ordres.

1°. La méthode pour intégrer les équations compriſes dans cette formule eſt expliquée (§ 75.... 85).

2°. Et pour leur intégrale ultérieure, on conſultera les articles 111 & 112.

SECOND MÉMOIRE.

1°. Sur le lieu & l'intégration des équations différentielles à trois variables, qui ne ſont point intégrables dans le ſens ordinaire.

2°. Sur une méthode d'intégration, appliquée au cas de deux pareilles équations d'un ordre quelconque, avec des réflexions ſur le cas général de n *équations entre* n + 1 *variables.*

1. LA ſolution d'un problème dépend quelquefois du ſyſtème de pluſieurs équations différentielles ſimultanées, dont chacune en particulier n'eſt point intégrable : c'eſt de ce genre d'équations que je vais m'occuper dans ce Mémoire. Une équation à trois variables, qui ne ſatisfait point à la condition requiſe pour l'intégrabilité, appartient à une infinité de courbes à double courbure, qui ont, pour propriété commune, celle qui eſt repréſentée par cette équation. Le lieu de cette équation n'eſt point une ſurface ; puiſque ſon défaut d'intégrabilité déſigne qu'il n'exiſte point, entre ces trois variables, d'équation finie qui lui convienne. D'ailleurs, cette équation devient néceſſairement intégrable, du moment qu'on éta-

blit un rapport quelconque entre deux d'entr'elles : ce qui signifie que, dès qu'une des deux courbes de projection est déterminée, on parvient à la connoissance de l'autre ; & que conséquemment, la courbe à double courbure se trouve donnée par ses deux projections. *

2. On peut cependant parvenir à l'intégration la plus complette d'une équation de ce genre, de la manière suivante. Fesant $dV = V'du$, $dV' = V''du$, où V est fonction de u seule ; & ϖ, ϑ, ε étant trois fonctions quelconques de z, x, y, je représente en général toute pareille famille de courbes à double courbure par les trois équations $\varpi = V$; $\vartheta = V'$; $\varepsilon = V''$. Je tire de-là $d\varpi = dV = V'du = \vartheta du$, $d\vartheta = dV' = V''du = \varepsilon du$, d'où éliminant du, il vient $\varepsilon d\varpi = \vartheta d\vartheta$ qui représentera toutes ces équations non intégrables. Soit la proposée

$$Adz + Bdx + Cdy = 0.$$

Je développe la formule précédente, en considérant que ϖ, ε, ϑ peuvent contenir z, x, y. Ainsi elle devient

$$\left(\varepsilon \frac{d\varpi}{dz} - \vartheta \frac{d\vartheta}{dz}\right) dz + \left(\varepsilon \frac{d\varpi}{dx} - \vartheta \frac{d\vartheta}{dx}\right) dx + \left(\varepsilon \frac{d\varpi}{dy} - \vartheta \frac{d\vartheta}{dy}\right) dy = 0;$$

& comparant terme à terme, j'en conclus. . . . . (V)

$$\varepsilon \frac{d\varpi}{dz} - \vartheta \frac{d\vartheta}{dz} = A,\ \varepsilon \frac{d\varpi}{dx} - \vartheta \frac{d\vartheta}{dx} = B,\ \varepsilon \frac{d\varpi}{dy} - \vartheta \frac{d\vartheta}{dy} = C;$$

différentiant ensuite la première de ces équations par x, la seconde par z, & soustrayant l'une de l'autre ; fesant la même opération sur la seconde par y, & la troisième par z ; & enfin sur la seconde par y, & la troisième par x, j'aurai

* Voyez Lettre du Marquis de Condorcet à Mr. d'Alembert, page 15.

$$\frac{d\varepsilon}{dx}\frac{d\varpi}{dz} - \frac{d\varepsilon}{dz}\frac{d\varpi}{dx} = \frac{dA}{dx} - \frac{dB}{dz} \text{ qui soit } = M,$$

$$\frac{d\varepsilon}{dy}\frac{d\varpi}{dz} - \frac{d\varepsilon}{dz}\frac{d\varpi}{dy} = \frac{dA}{dy} - \frac{dC}{dz} \qquad = N,$$

$$\frac{d\varepsilon}{dy}\frac{d\varpi}{dx} - \frac{d\varepsilon}{dx}\frac{d\varpi}{dy} = \frac{dB}{dy} - \frac{dC}{dx} \qquad = P,$$

d'où éliminant $\frac{d\varepsilon}{dz}$, $\frac{d\varepsilon}{dx}$, $\frac{d\varepsilon}{dy}$, ce qui arrive ici de soi-même, on parvient enfin à l'équation

$$M\frac{d\varpi}{dy} - N\frac{d\varpi}{dx} + P\frac{d\varpi}{dz} = 0,$$

qui, étant intégrée par les méthodes ordinaires, donne un résultat de la forme $\varpi = F:(\sigma, s)$. Et on trouvera de même, en éliminant $\frac{d\varpi}{dz}$, $\frac{d\varpi}{dx}$, $\frac{d\varpi}{dy}$, $\varepsilon = \phi:(\sigma, s)$. On prendra donc de-là une valeur de ε & de ϖ, qu'on substituera dans $\varepsilon d\varpi = \vartheta d\vartheta$; & au moyen de la proposée, on tâchera de rendre le premier membre une différentielle exacte, afin d'en conclure la valeur de ϑ.

3. Qu'on demande, par exemple, la courbe à double courbure telle que, x & y étant les axes horizontaux, & z l'axe vertical, la soûtangente en un point quelconque de la courbe de projection sur le plan des z & x, soit égale à la ligne menée, de l'origine des x, à l'extrémité de l'ordonnée horizontale y correspondante à ce point?

On voit aisément que cette propriété est exprimée par l'équation

$$\sqrt{(x^2 + y^2)}\, dz - z dx = 0.$$

Donc ici $A = \sqrt{(x^2 + y^2)}$, $B = -z$, $C = 0$, & ensuite

$$M = \frac{x}{\sqrt{(y^2 + x^2)}} + 1,\ N = \frac{y}{\sqrt{(y^2 + x^2)}};\ P = 0, \text{ d'où}$$

$$(x + \sqrt{y^2 + x^2})\frac{d\varpi}{dy} - y\frac{d\varpi}{dx} = 0.$$

Or l'intégrale de cette équation eſt $\varpi = F:(x + \sqrt{y^2 + x^2}, z)$; ainſi, comme β eſt de même, $\beta = \phi:(x + \sqrt{y^2 + x^2}, z)$, je puis ſuppoſer $\varpi = z$, $\beta = x + \sqrt{y^2 + x^2}$, d'où

$$xdz + dz\sqrt{y^2 + x^2} - \vartheta d\vartheta = 0.$$

Multipliant enſuite la propoſée par un facteur indéterminé μ, je l'ajoute à la précédente ; ce qui me donne

$$xdz + dz\sqrt{y^2 + x^2} + \mu dz\sqrt{y^2 + x^2} - \vartheta d\vartheta - \mu z dx = 0,$$

qui devient intégrable, ſi $\mu = -1$; & il reſte

$$xdz + zdx = \vartheta d\vartheta, \text{ \& conſéquemment } \vartheta = \sqrt{\text{conſt.} + 2zx}.$$

On a donc, pour définir cette famille de courbes à double courbure, les trois équations finies

$$z = V;\ \sqrt{\text{conſt.} + 2zx} = V', \ x + \sqrt{y^2 + x^2} = V''.$$

4. Si on ſuppoſe une équation donnée entre deux des trois variables, on éliminera les deux qui reſteront, au moyen de ces trois équations ; ce qui déterminera V en u, par une équation différentielle du ſecond ordre qui ne contiendra pas u finie, & qu'on réduira par conſéquent à être du premier ordre, en feſant $du = pdV$, du étant conſtante. Ayant V, on en conclura facilement V' & V'' ; & par-là, cette expreſſion générale ſe particulariſera, pour ne plus repréſenter qu'un ſeul individu de cette famille. En effet V, V' & V'' étant alors trois fonctions connues de u, on parviendra, par l'élimination de cette variable, à deux équations entre z, x, y. Mais il feroit beaucoup plus ſimple d'éliminer dabord la troiſième variable, de la propoſée elle-même, comme je l'ai obſervé ci-deſſus (§ 1).

5. Le plus ſouvent, au lieu d'une équation entre deux des trois variables, on a pour déterminer la courbe à double courbure, une

ſeconde équation pareille à la première entre les mêmes co-ordonnées. On pourroit en conclure de nouveau trois équations finies analogues, dont les fonctions arbitraires de u, feroient U, U', U'': & ayant éliminé, au moyen de ces ſix équations, les trois variables z, x, y, il reſteroit trois nouvelles équations en V, V', V'' & U, U', U''. Maintenant, pour parvenir à une détermination de V & de U en u, il faudroit pouvoir éliminer de ces trois équations; ou V, V', V''; ou U, U', U'', afin d'avoir un réſultat qui ne contînt que U & u, ou V & u. Mais on ſait que cette opération exigeroit quatre pareilles équations, au lieu de trois; ainſi nous abandonnerons cette méthode, pour en chercher une autre beaucoup plus ſimple.

6. Il ſuit de tout ce qui précède, que lorſqu'on a deux équations non intégrables entre trois variables, le lieu en eſt néceſſairement une courbe à double courbure déterminée. Or, une pareille courbe ayant trois projections, & l'algèbre ne pouvant donner que des ſolutions parfaitement complettes; ce qui, au lieu de deux équations à deux variables, en exigeroit ici trois; il ne lui reſte d'autre moyen, que de s'exprimer par deux équations à trois variables, qui déſignent deux ſurfaces dont l'interſection mutuelle produit la même courbe à double courbure, & qui contiennent en elles les trois équations de projection, qu'on retrouve facilement, en éliminant ſucceſſivement chacune des trois variables.

Au reſte, comme dans les cas où les propoſées renfermeroient les différentielles des trois variables, il eſt poſſible de les réduire, par l'élimination, à n'en contenir que deux, je les ſuppoſerai toujours de la forme

$$Adz + Bdx = 0,\ Mdy + Ndx = 0.$$

Soient donc $Q = \text{conft.}$, & $R = \text{conft.}$ les deux équations finies à trois variables, qui font l'intégrale du fyftème de ces deux propofées fimultanées. J'en conclus, en différentiant,

$$\frac{dQ}{dz}dz + \frac{dQ}{dx}dx + \frac{dQ}{dy}dy = 0,$$

$$\frac{dR}{dz}dz + \frac{dR}{dx}dx + \frac{dR}{dy}dy = 0;$$

& j'en élimine dabord dy, & enfuite dz; ce qui me donne

$$\left(\frac{dQ}{dz}\frac{dR}{dy} - \frac{dQ}{dy}\frac{dR}{dz}\right)dz + \left(\frac{dQ}{dx}\frac{dR}{dy} - \frac{dQ}{dy}\frac{dR}{dx}\right)dx = 0,$$

$$\left(\frac{dQ}{dz}\frac{dR}{dy} - \frac{dQ}{dy}\frac{dR}{dz}\right)dy + \left(\frac{dQ}{dz}\frac{dR}{dx} - \frac{dQ}{dx}\frac{dR}{dz}\right)dx = 0,$$

que je compare, terme à terme, avec les deux propofées, après avoir multiplié celles-ci, chacune par un facteur indéterminé g, h; & j'en conclus les deux paires d'équations

$$1^o.\ \frac{dQ}{dz}\frac{dR}{dy} - \frac{dQ}{dy}\frac{dR}{dz} = gA,\quad 1^o.\ \frac{dQ}{dz}\frac{dR}{dy} - \frac{dQ}{dy}\frac{dR}{dz} = hM,$$

$$2^o.\ \frac{dQ}{dx}\frac{dR}{dy} - \frac{dQ}{dy}\frac{dR}{dx} = gB,\quad 2^o.\ \frac{dQ}{dz}\frac{dR}{dx} - \frac{dQ}{dx}\frac{dR}{dz} = hN.$$

Des deux N°. 1, réfulte $gA - hM = 0$. Enfuite, ôtant des deux N°. 2, $\frac{dQ}{dx}$, on a

$$\left(\frac{dQ}{dz}\frac{dR}{dy} - \frac{dQ}{dy}\frac{dR}{dz}\right)\frac{dR}{dx} = gB\frac{dR}{dz} + hN\frac{dR}{dy};$$

ou mettant, pour le coëfficient du premier membre, fa valeur tirée de la première équation,

$$gA\frac{dR}{dx} - gB\frac{dR}{dz} - hN\frac{dR}{dy} = 0.$$

Subftituons enfin à gA fa valeur hM, & divifons par h, il reftera

BM

$$BM\frac{dR}{dz} - AM\frac{dR}{dx} + AN\frac{dR}{dy} = 0,$$

qu'il faut intégrer ; & comme l'intégrale sera de la forme $\Psi = f:(\Pi, \Omega)$, & que Q est donnée par une équation tout-à-fait semblable, il s'ensuit que l'intégrale des deux proposées sera $(\Pi, \Omega) =$ const., & $[\Pi, \Omega] =$ const. ; ces deux expressions désignant des fonctions quelconques déterminées de Π & Ω ; ou simplement, $\Pi =$ const., $\Omega =$ const.

7. Supposons qu'on ait à intégrer les deux équations simultanées

$$(z^2x + xy^2)\,dz + (2zx^2 + zy^2 + z^3)\,dx = 0,$$
$$(z^2xy + xy^3)\,dy - (z^4 + z^2y^2 + z^2x^2 - x^2y^2)\,dx = 0;$$

on a $A = z^2x + xy^2$; $B = 2zx^2 + zy^2 + z^3$; $M = z^2xy + xy^3$; $N = -(z^4 + z^2y^2 + z^2x^2 - x^2y^2)$,
où on peut remarquer que $M = Ay$. Substituant donc ces valeurs, dans l'équation générale qui devient

$$By\frac{dR}{dz} - M\frac{dR}{dx} + N\frac{dR}{dy} = 0,$$

on aura. . . . . (A)

$$(2zx^2 + zy^2 + z^3)\,y\,\frac{dR}{dz} - (z^2xy + xy^3)\frac{dR}{dx} - (z^4 + z^2y^2 + z^2x^2 - x^2y^2)\frac{dR}{dy} = 0.$$

Pour intégrer cette équation, je la ramène à celles à trois variables, par la méthode enseignée dans le premier Mémoire art. 31, en prenant z pour variable principale. Par-là elle se change en. . . . . (B)

$$(z^4 + z^2y^2 + z^2x^2 - x^2y^2)\frac{dz}{dy} + (z^2xy + xy^3)\frac{dz}{dx} + 2zx^2y + zy^3 + z^3y = 0.$$

Je décompose ensuite (*Mém. prem.* § 7) cette équation en deux autres, savoir

$$(z\frac{dz}{dy}+y)(z^3+zy^2+zx^2)=0, \text{ \&}$$

$$(\overline{z^2+y^2}\,\frac{dz}{dx}-xy\frac{dz}{dy}+xz)\,yx=0,$$

qui, en les divisant par leurs facteurs inutiles, & éliminant, au moyen de la première, $\frac{dz}{dy}$ de la seconde, se réduisent à

$$z\frac{dz}{dy}+y=0,\quad z\frac{dz}{dx}+x=0;$$

ou en les additionnant, après avoir multiplié la première par dy, & la seconde par dx, à $zdz+ydy+xdx=0$, dont l'intégrale est

$$z^2+y^2+x^2=f:u=u \text{ (\textit{Mém. prem.} § 7 \& 8).}$$

Fesant donc cette transformation dans l'équation *B*, pour en chasser le terme sans différences partielles, & l'intégrant (*Mém. prem.* § 4), on aura

$$\frac{y^2+z^2}{zx}=\phi:u=\phi:(z^2+y^2+x^2).$$

Ainsi l'intégrale de l'équation A sera

$$R=F:(\frac{y^2+z^2}{zx},\ z^2+y^2+x^2),$$

& on pourra prendre la première de ces deux fonctions pour *P*, & l'autre pour *Q*; d'où il suit que l'intégrale des deux proposées est

$$\frac{y^2+z^2}{zx}=\text{const.}, \text{ \& } z^2+y^2+x^2=\text{const.}; \text{ c'est-à-dire,}$$

$$y^2+z^2-mzx=0, \text{ \& } z^2+x^2+y^2-r^2=0.$$

La première de ces deux équations désigne un cône scalène orthogonale; c'est-à-dire, un cône dans lequel la coupe verticale, passant par le sommet & le centre de la base, forme un triangle

rectangle, dont l'hypothénuse fait, avec la verticale qui aboutit au sommet, un angle qui a m pour tangente; l'origine des co-ordonnées étant à ce même sommet, & les x étant prises de haut en bas sur la verticale. La seconde est à une sphère dont le rayon $= r$, le centre, qui est l'origine des co-ordonnées, étant au sommet du cône précédent. Ainsi le lieu du système des deux équations proposées, est la courbe à double courbure résultante de l'intersection de ces deux surfaces.

8. Soient présentement, entre les trois mêmes variables, les deux équations du second ordre

$$Adq + Bdx + Cdy + Ddz = 0,$$
$$Mdp + Ndx + Pdy + Qdz = 0,$$

où $p = \frac{dz}{dx}$, $q = \frac{dy}{dx}$, dx étant supposée constante; & représentons par $G =$ const., $K =$ const. les deux intégrales. On aura, en différentiant,

$$\frac{dG}{dp}\,dp + \frac{dG}{dq}\,dq + \frac{dG}{dx}\,dx + \frac{dG}{dy}\,dy + \frac{dG}{dz}\,dz = 0;$$

& de même pour K;

& ôtant successivement dp, & puis dq; comparant ensuite les deux résultats, terme à terme, avec les deux proposées, après avoir multiplié chacune de celles-ci par un facteur indéterminé, on en conclura les deux séries d'équations

$$1^o.\ \frac{dK}{dp}\frac{dG}{dq} - \frac{dK}{dq}\frac{dG}{dp} = gA, \qquad 1^o.\ \frac{dK}{dp}\frac{dG}{dq} - \frac{dK}{dq}\frac{dG}{dp} = hM,$$
$$2^o.\ \frac{dK}{dp}\frac{dG}{dx} - \frac{dK}{dx}\frac{dG}{dp} = gB, \qquad 2^o.\ \frac{dK}{dx}\frac{dG}{dq} - \frac{dK}{dq}\frac{dG}{dx} = hN,$$
$$3^o.\ \frac{dK}{dp}\frac{dG}{dy} - \frac{dK}{dy}\frac{dG}{dp} = gC, \qquad 3^o.\ \frac{dK}{dy}\frac{dG}{dq} - \frac{dK}{dq}\frac{dG}{dy} = hP,$$
$$4^o.\ \frac{dK}{dp}\frac{dG}{dz} - \frac{dK}{dz}\frac{dG}{dp} = gD, \qquad 4^o.\ \frac{dK}{dz}\frac{dG}{dq} - \frac{dK}{dq}\frac{dG}{dz} = hQ.$$

Des deux N.os 1, on tire $gA = hM$. Otant ensuite, des deux N.os 2; des deux N.os 3; & des deux N.os 4, la lettre G, comme nous avons fait ci-dessus, pour la lettre Q (§ 6), on aura les trois équations. . . . . (C)

$$AN\frac{dK}{dp} + BM\frac{dK}{dq} - AM\frac{dK}{dx} = 0,$$

$$AP\frac{dK}{dp} + CM\frac{dK}{dq} - AM\frac{dK}{dy} = 0,$$

$$AQ\frac{dK}{dp} + DM\frac{dK}{dq} - AM\frac{dK}{dz} = 0,$$

au moyen desquelles il faut déterminer la valeur de K.

9. Je remarque dabord que, dans la totalité de ce systême d'équations, la variable principale K varie par les cinq variables p, q, z, x, y; mais que dans chacune d'elles, elle ne varie que par trois d'entr'elles. Je conclus de-là, comme j'ai fait dans le premier Mémoire (§ 59), que ces trois équations ne sont que les trois résultats de la différentiation d'une même formule $K = F:(\Gamma, \Omega)$, dans les trois hypothèses de z, y; ou z, x; ou x, y constantes. Et ce sera, d'après les principes que j'ai établis dans le même Mémoire (§ 60...63 & 103, 104), que je vais chercher une méthode d'intégration pour ce systême d'équations.

Pour cela, ayant intégré une quelconque d'entr'elles, par exemple la première, où z & y sont constantes; soit $K = F:(\Gamma', \Omega')$ son intégrale. L'intégrale du systême entier; c'est-à-dire, l'intégrale en ne supposant aucune des variables constante, ne peut être que $K = F:(R\Gamma' + V, I\Omega' + H)$, R, V, I, H étant fonctions de z & y. Il s'agira donc de déterminer ces fonctions; & pour cela, on fera disparoître de cette formule hypothétique la fonction ar-

bitraire, en la différentiant successivement par p, q, y; & par p, q, z : ce qui donnera deux équations aux différences partielles à quatre variables, dont il faudra que la première soit identique à la seconde équation du système C; & la seconde, à la troisième. Et cette condition suffira pour déterminer toutes les fonctions ci-dessus.

10. Prenons pour exemple les deux équations

$$d^2y + dx^2 + zdxdy + ydzdx = 0,$$
$$d^2z + ydx^2 + xdydx = 0;$$

les trois équations C ci-dessus se changeront en

$$y\frac{dK}{dp} + \frac{dK}{dq} - \frac{dK}{dx} = 0, \; z \;\&\; y \text{ étant constantes},$$
$$x\frac{dK}{dp} + z\frac{dK}{dq} - \frac{dK}{dy} = 0, \; x \;\&\; z \text{ étant constantes},$$
$$y\frac{dK}{dq} - \frac{dK}{dz} = 0, \quad x \;\&\; y \text{ étant constantes},$$

& intégrant une d'entr'elles, par exemple la seconde, j'aurai

$$K = \phi:(q + zy, p + xy),$$

d'où je conclus que la vraie intégrale de ces trois équations simultanées ne peut être que . . . . . (D)

$$K = \phi:(R\,\overline{q + zy} + V, I\,\overline{p + xy} + H),$$

R, V, I, H étant fonctions de z & x seulement. Je fais $dR = \varpi dz + \varpi' dx$, $dV = rdz + r'dx$, $dI = gdz + g'dx$, $dH = hdz + h'dx$; & différentiant l'équation D successivement par p, q, x; & puis par p, q, z, j'ai

$$I(\overline{q + zy}\,\varpi' + r')\frac{dK}{dq} + R(Iy + \overline{p + xy}\,g' + h')\frac{dK}{dp} - RI\frac{dK}{dx} = 0,$$
$$I(Ry + \overline{q + zy}\,\varpi + r)\frac{dK}{dq} + R(\overline{p + xy}\,g + h)\frac{dK}{dp} - RI\frac{dK}{dz} = 0.$$

dont la première doit se réduire à $y\frac{dK}{dp}+\frac{dK}{dq}-\frac{dK}{dx}=0$

& la seconde à $y\frac{dK}{dq}-\frac{dK}{dz}=0$.

On a donc ; dans celle-là, le coëfficient de $\frac{dK}{dp}=y$, celui de $\frac{dK}{dq}$ $=1$, & $RI=1$, d'où résulte évidemment $g'=0$, $\varpi'=0$, $h'=0$, & $Ir'=1$; & dans celle-ci, le coëfficient de $\frac{dK}{dp}=0$, celui de $\frac{dK}{dq}=1$, & $RI=1$, d'où résulte $g=0$, $h=0$, $\varpi=0$, $r=0$. Ainsi R ne contient ni z ni x, & elle est conséquemment une constante, aussi bien que I & H. Et ensuite, à cause de Ir' $=1$, $V=\int r'dx=\int\frac{1}{I}dx$. Fesant donc $R=a$, $I=\frac{1}{R}=\frac{1}{a}$, $H=b$, V sera $=\int adx=ax$; & on aura enfin

$$K=\phi:(a[q+zy]+ax,\ \tfrac{1}{a}[p+xy]+b),$$

d'où on conclura, comme ci-dessus (§ 7),

$$K=a(q+zy)+ax,\ G=\tfrac{1}{a}(p+xy)+b,$$

& les deux intégrales cherchées seront

$$\tfrac{1}{a}(p+xy)+b=\text{const.},\ a(q+zy+x)=\text{const};$$

c'est-à-dire,

$$p+xy=m,\ \&\ q+zy+x=n,\ \text{ou}$$

$$dz+xydx-mdx=0,\ \&\ dy+zydx+xdx-ndx=0,$$

qu'il faudra intégrer de nouveau par la méthode de l'article 6.

Il seroit inutile de parcourir, avec le même détail, les équations des ordres plus élevés ; il suffira de faire observer que ; quelque soit l'ordre des deux équations, la difficulté se réduit à l'intégra-

tion d'équations à quatre variables de la forme

$$T\frac{dz}{dy} + V\frac{dz}{dx} + W\frac{dz}{du} = 0,$$

ces trois coëfficiens ne contenant que u, x & y.

11. J'examinerai présentement le cas, où les équations simultanées sont au nombre de trois; c'est-à-dire, où la solution d'un problème seroit donnée par un systême de trois équations différentielles entre quatre variables, dont aucune en particulier n'est intégrable. On a vu ci-dessus (§ 6), que lorsqu'on a à intégrer deux équations différentielles, telles que

$$Adz + Bdx = 0, \quad Mdy + Ndx = 0,$$

dont les coëfficiens A, B, M, N contiennent les trois variables z, x, y, l'intégrale de ces deux équations, quoiqu'elles ne soient affectées chacune que de deux différentielles dz & dx, ou dz & dy, ne peut être donnée que par un systême de deux équations finies entre trois variables; par la raison que cette solution contient essentiellement la possibilité de trois équations à deux variables, quoique deux suffisent; & que l'analyse ne sauroit, en déterminant deux de ces équations, exclure la troisième. Il en sera de même dans le cas présent de trois équations à quatre variables, & généralement dans celui de n équations à $n+1$ variables. Il est vrai que par l'élimination on peut toujours, comme dans le cas ci-dessus, réduire ces équations finies à n'en contenir que deux; mais elles devroient, sous cette forme, être au nombre de $\frac{(n+1)n}{2}$, qui est le nombre de combinaisons deux à deux, dont est susceptible celui $n+1$. Il faudroit donc, pour avoir l'intégrale cherchée en équations à deux variables seulement, qu'au lieu d'être

dabord, ſans gêner cette opération, repréſenter chacun des binomes qui compoſent les trois équations ci-deſſus, & dans leſquels la lettre H ne ſe rencontre pas, par une ſeule lettre. Je ferai donc $\frac{dI}{du}\frac{dK}{dz} - \frac{dI}{dz}\frac{dK}{du} = \delta$, $\frac{dI}{du}\frac{dK}{dx} - \frac{dI}{dx}\frac{dK}{du} = \zeta$, $\frac{dI}{du}\frac{dK}{dy} - \frac{dI}{dy}\frac{dK}{du} = \eta$, $\frac{dI}{dz}\frac{dK}{dy} - \frac{dI}{dy}\frac{dK}{dz} = \mu$, $\frac{dI}{dz}\frac{dK}{dx} - \frac{dI}{dx}\frac{dK}{dz} = \xi$,

& par-là, les ſix équations de comparaiſon ſe changeront en.... (H)

$$1^{o}. \ \& \ 2^{o}. \ \eta \ \overline{\frac{dI}{du}\frac{dH}{dz} - \frac{dI}{dz}\frac{dH}{du}} - \delta \ \overline{\frac{dI}{du}\frac{dH}{dy} - \frac{dI}{dy}\frac{dH}{du}} = gA, \text{ ou } = -nC$$

$$3^{o}. \ \mu \ \overline{\frac{dI}{dz}\frac{dH}{du} - \frac{dI}{du}\frac{dH}{dz}} + \delta \ \overline{\frac{dI}{dz}\frac{dH}{dy} - \frac{dI}{dy}\frac{dH}{dz}} = mE$$

$$4^{o}. \ \eta \ \overline{\frac{dI}{du}\frac{dH}{dx} - \frac{dI}{dx}\frac{dH}{du}} - \zeta \ \overline{\frac{dI}{du}\frac{dH}{dy} - \frac{dI}{dy}\frac{dH}{du}} = gB$$

$$5^{o}. \ \delta \ \overline{\frac{dI}{du}\frac{dH}{dx} - \frac{dI}{dx}\frac{dH}{du}} - \zeta \ \overline{\frac{dI}{du}\frac{dH}{dz} - \frac{dI}{dz}\frac{dH}{du}} = nD$$

$$6^{o}. \ \mu \ \overline{\frac{dI}{dz}\frac{dH}{dx} - \frac{dI}{dx}\frac{dH}{dz}} - \xi \ \overline{\frac{dI}{dz}\frac{dH}{dy} - \frac{dI}{dy}\frac{dH}{dz}} = mG$$

c'eſt-à-dire, $gA + nC = o$ & enſuite ..... (J)

$$1^{o}. \ \eta \frac{dI}{du}\frac{dH}{dz} - \delta \frac{dI}{du}\frac{dH}{dy} + \left(\delta \frac{dI}{dy} - \eta \frac{dI}{dz}\right)\frac{dH}{du} = gA$$

$$2^{o}. \ \left(\mu \frac{dI}{du} + \delta \frac{dI}{dy}\right)\frac{dH}{dz} - \mu \frac{dI}{dz}\frac{dH}{du} - \delta \frac{dI}{dz}\frac{dH}{dy} = -mE$$

$$3^{o}. \ \eta \frac{dI}{du}\frac{dH}{dx} - \zeta \frac{dI}{du}\frac{dH}{dy} + \left(\zeta \frac{dI}{dy} - \eta \frac{dI}{dx}\right)\frac{dH}{du} = gB$$

$$4^{o}. \ \delta \frac{dI}{du}\frac{dH}{dx} - \zeta \frac{dI}{du}\frac{dH}{dz} + \left(\zeta \frac{dI}{dz} - \delta \frac{dI}{dx}\right)\frac{dH}{du} = nD$$

$$5^{o}. \ \left(\xi \frac{dI}{dy} - \mu \frac{dI}{dx}\right)\frac{dH}{dz} + \mu \frac{dI}{dz}\frac{dH}{dx} - \xi \frac{dI}{dz}\frac{dH}{dy} = mG$$

Pour ſimplifier encore ces équations, je ferai

Voilà le point de vue sous lequel se présente naturellement la solution de ce problème important, au moyen duquel on pourroit espérer de parvenir à l'intégration des équations au système du monde. Il ne s'agit plus que de vérifier si en effet on arrive, par l'élimination, à un résultat tel que je l'ai supposé.

13. Pour cela, ayant effectué l'élimination des trois équations F, en combinant dabord la première avec la seconde; puis la seconde avec la troisième; & enfin ces deux résultats l'un avec l'autre, les trois équations G seront

$$1^\circ.\quad \left\{ \overline{\frac{dI}{du}\frac{dK}{dy} - \frac{dI}{dy}\frac{dK}{du}} \cdot \overline{\frac{dI}{du}\frac{dH}{dz} - \frac{dI}{dz}\frac{dH}{du}} - \overline{\frac{dI}{du}\frac{dK}{dz} - \frac{dI}{dz}\frac{dK}{du}} \cdot \overline{\frac{dI}{du}\frac{dH}{dy} - \frac{dI}{dy}\frac{dH}{du}} \right\} dz +$$

$$\left\{ \overline{\frac{dI}{du}\frac{dK}{dy} - \frac{dI}{dy}\frac{dK}{du}} \cdot \overline{\frac{dI}{du}\frac{dH}{dx} - \frac{dI}{dx}\frac{dH}{du}} - \overline{\frac{dI}{du}\frac{dK}{dx} - \frac{dI}{dx}\frac{dK}{du}} \cdot \overline{\frac{dI}{du}\frac{dH}{dy} - \frac{dI}{dy}\frac{dH}{du}} \right\} dx = 0$$

$$2^\circ.\quad \left\{ \overline{\frac{dI}{du}\frac{dK}{dz} - \frac{dI}{dz}\frac{dK}{du}} \cdot \overline{\frac{dI}{du}\frac{dH}{dy} - \frac{dI}{dy}\frac{dH}{du}} - \overline{\frac{dI}{du}\frac{dK}{dy} - \frac{dI}{dy}\frac{dK}{du}} \cdot \overline{\frac{dI}{du}\frac{dH}{dz} - \frac{dI}{dz}\frac{dH}{du}} \right\} dy +$$

$$\left\{ \overline{\frac{dI}{du}\frac{dK}{dz} - \frac{dI}{dz}\frac{dK}{du}} \cdot \overline{\frac{dI}{du}\frac{dH}{dx} - \frac{dI}{dx}\frac{dH}{du}} - \overline{\frac{dI}{du}\frac{dK}{dx} - \frac{dI}{dx}\frac{dK}{du}} \cdot \overline{\frac{dI}{du}\frac{dH}{dz} - \frac{dI}{dz}\frac{dH}{du}} \right\} dx = 0$$

$$3^\circ.\quad \left\{ \overline{\frac{dI}{dz}\frac{dK}{dy} - \frac{dI}{dy}\frac{dK}{dz}} \cdot \overline{\frac{dI}{dz}\frac{dH}{du} - \frac{dI}{du}\frac{dH}{dz}} - \overline{\frac{dI}{dz}\frac{dK}{du} - \frac{dI}{du}\frac{dK}{dz}} \cdot \overline{\frac{dI}{dz}\frac{dH}{dy} - \frac{dI}{dy}\frac{dH}{dz}} \right\} du +$$

$$\left\{ \overline{\frac{dI}{dz}\frac{dK}{dy} - \frac{dI}{dy}\frac{dK}{dz}} \cdot \overline{\frac{dI}{dz}\frac{dH}{dx} - \frac{dI}{dx}\frac{dH}{dz}} - \overline{\frac{dI}{dz}\frac{dK}{dx} - \frac{dI}{dx}\frac{dK}{dz}} \cdot \overline{\frac{dI}{dz}\frac{dH}{dy} - \frac{dI}{dy}\frac{dH}{dz}} \right\} dx = 0.$$

Je les compare, terme à terme, avec les trois proposées, après avoir multiplié celles-ci, chacune par un des trois facteurs indéterminés & dans le même ordre g, n, m. Et, afin de parvenir à quelque résultat qui ne renferme qu'une des trois lettres, H, I, K, je commence par éliminer une d'entr'elles, par exemple H. Je puis

la première équation L, il en résultera

$$\zeta gA - \delta gB + \eta nD = 0, \text{ \&}$$

$$\xi gAE + \delta gAG + \mu nDE = 0;$$

c'est-à-dire,

$$gA\left(\frac{dI}{du}\frac{dK}{dx} - \frac{dI}{dx}\frac{dK}{du}\right) - gB\left(\frac{dI}{du}\frac{dK}{dz} - \frac{dI}{dz}\frac{dK}{du}\right) + nD\left(\frac{dI}{du}\frac{dK}{dy} - \frac{dI}{dy}\frac{dK}{du}\right)$$

$$= 0, \text{ \&}$$

$$gAE\left(\frac{dI}{dz}\frac{dK}{dx} - \frac{dI}{dx}\frac{dK}{dz}\right) + gAG\left(\frac{dI}{du}\frac{dK}{dz} - \frac{dI}{dz}\frac{dK}{du}\right) + nDE\left(\frac{dI}{dz}\frac{dK}{dy} - \frac{dI}{dy}\frac{dK}{dz}\right)$$

$$= 0.$$

Maintenant de ces deux nouvelles équations j'éliminerai la lettre I, après les avoir ordonnées toutes les deux par les différences partielles de cette lettre, en fesant dabord disparoître $\frac{dI}{dx}$ & $\frac{dI}{dy}$ qui s'évanouissent en même tems; & ensuite $\frac{dI}{dz}$ & $\frac{dI}{du}$ au moyen de la première équation L ci-dessus : & j'aurai enfin . . . . . (M)

$$gmAEG\frac{dK^2}{du^2} - gmAE^2\frac{dK}{du}\frac{dK}{dx} - mnDE^2\frac{dK}{du}\frac{dK}{dy} + (g^2A^2G + gmBE^2)\frac{dK}{du}\frac{dK}{dz} - g^2A^2E\frac{dK}{dx}\frac{dK}{dz} - gnADE\frac{dK}{dy}\frac{dK}{dz} + g^2ABE\frac{dK^2}{dz^2} = 0.$$

Ce résultat diffère beaucoup de la formule simple que je m'étois figurée au commencement de cette opération (§ 12). Son intégration dépend de celle des équations du premier ordre & du second degré, entre cinq variables K, u, z, x, y; & jusqu'ici je ne connois aucune méthode pour de pareilles équations, lorsque le nombre des variables excède trois. Je ne me suis point occupé moi-même de cet objet, dans le premier Mémoire de ce Recueil, où il auroit trouvé très-naturellement sa place, parce que je ne prévoyois pas qu'il dût être d'une aussi grande importance. Ainsi,

comme ce n'eſt point ici le lieu de ſe livrer à cette recherche, je me bornerai à faire entrevoir une poſſibilité d'appliquer à un nombre quelconque de variables, la méthode dont je me ſuis ſervi pour le cas de trois variables ſeulement (*prem. Mém. chap.* 2).

En effet, quelque ſoit ce nombre, on pourra toujours réduire la valeur de la variable principale z à la forme

$$dz = pdx + qdy + \ldots\ldots + Rdw;$$

R contenant, outre les variables $x, y, \ldots\ldots w$, les différences partielles p, q, &c. de z par toutes ces mêmes variables, excepté celle $\frac{dz}{dw}$ que je ſuppoſe être celle dont la valeur eſt repréſentée par R. Il ne s'agira plus alors que de faire enſorte que cette expreſſion de dz devienne une différentielle exacte, au moyen des valeurs de p, q, &c., qu'on déterminera d'après les conditions connues de l'intégrabilité d'une fonction.

Qu'on ait par exemple à intégrer l'équation à quatre variables $\frac{dz^2}{dx^2} + \frac{dz}{dy}\frac{dz}{du} = 1$; en feſant $\frac{dz}{dx} = p$, $\frac{dz}{dy} = q$, on en conclura $\frac{dz}{du} = \frac{1-p^2}{q}$, d'où

$$dz = pdx + qdy + \frac{1-p^2}{q}du,$$

valeur qui ſera abſurde, à moins que les trois équations ſuivantes n'aient lieu; ſavoir,

$$\frac{dp}{dy} = \frac{dq}{dx},$$

$$\frac{dp}{du} = \frac{-2pq\frac{dp}{dx} - (1-p^2)\frac{dq}{dx}}{q^2},$$

$$\frac{dq}{du} = \frac{-2pq\frac{dp}{dy} - (1-p^2)\frac{dq}{dy}}{q^2};$$

& c'eſt au moyen de ces trois équations qu'il s'agiroit de déterminer p & q : mais à cauſe du mélange de ces deux variables, cette détermination préſentera encore bien des difficultés.

On remarquera en outre, dans l'équation M ci-deſſus, les indéterminées q, m, n qui pourront ſervir à faire règner, entre les coëfficiens de cette équation, une certaine loi, ſi cela étoit néceſſaire pour la rendre intégrable : & on ſe ſouviendra que H, J, K étant trois fonctions permutables entr'elles, elles doivent ſe produire toutes les trois en même tems ; c'eſt-à-dire, que l'expreſſion de K, dans l'intégrale de cette équation, doit préſenter trois valeurs différentes, dont chacune puiſſe s'appliquer à l'une ou l'autre des fonctions H, J, K.

Si on réuſſiſſoit à intégrer de cette manière le ſyſtème de trois équations ſimultanées entre quatre variables, on auroit tout lieu d'eſpérer de parvenir à une méthode pour le cas général de n équations entre $n+1$ variables. Il eſt même vraiſemblable que ce premier pas indiqueroit la route qu'il faudroit ſuivre pour les cas plus compliqués. L'uſage de cette méthode, à en juger par ce que nous avons vu (§ 8.... 10) où il s'agiſſoit d'un ſyſtème de deux équations du ſecond ordre & des ordres ſupérieurs entre trois variables ſeulement, s'appliqueroit également à un ſyſtème d'équations d'un ordre quelconque. Or on ſait que le ſyſtème du monde, en ſuppoſant le ſoleil immobile, ſe réduit à ſix équations du ſecond ordre de la forme $d^2x + \Psi dt^2 = 0$, entre les ſix variables qui déterminent pour chaque inſtant la poſition de la terre & du ſoleil, & le tems t. C'eſt donc de la perfection de cette méthode qu'on peut attendre la ſolution de ce problème important de l'Aſtronomie phyſique.

TROISIÈME MÉMOIRE.

Sur le mouvement du fluide qui s'échappe d'un tuyau cylindrique entretenu conſtamment plein.

UNe des premières queſtions de l'Hydrodynamique, celle de déterminer la quantité de fluide qui dans un tems donné s'écoule par un orifice horizontal, d'un vaſe entretenu conſtamment plein, m'a fait faire une réflexion qui, toute ſimple qu'elle eſt, me paroît avoir échappé à tous les Auteurs qui ont traité cette matière : c'eſt que, dans le calcul du mouvement de ce fluide, il faut avoir égard à celui qui eſt déjà hors du vaſe, & qui eſt, pour ainſi dire, encore ſuſpendu en forme de colonne. En effet, le fluide affluent qui remplit à chaque inſtant le vuide qui ſe fait dans la partie ſupérieure du vaſe, n'ayant, dans cet inſtant, de mouvement que celui que lui communique, par ſa ténacité, le fluide inférieur qui l'entraine, on ne peut douter que toute la colonne ne contribue à ce mouvement. C'eſt d'après ce principe que je vais réſoudre le problème ; mais pour le renfermer dans les bornes les plus étroites, & ne point le compliquer des difficultés qu'y ajouteroit inu-

la conſidération de la forme du vaſe, de la contraction de &c.; voici le point de vue ſimple ſous lequel je l'exa-

poſe un tuyau cylindrique dans lequel, par quelque procédé que ce ſoit, pourvu qu'il n'en réſulte aucun mouvement ſenſible dans le fluide, on entretienne conſtamment l'eau à une certaine hauteur. Je fais entièrement abſtraction de la réſiſtance de l'air, ainſi que du frottement, & de l'adhérence aux parois du cylindre.

Soit donc (*Fig. I.*) BD un tuyau cylindrique ouvert par les deux bouts : ſi à ſon extrémité inférieure, on adapte un bouchon ; qu'on le rempliſſe de fluide juſqu'au point A ; & que le fluide étant bien en repos, on retire ſubitement le bouchon ; ce fluide s'échappera en tombant, comme feroit une maſſe ſolide de même figure. Je ſuppoſe que dans un tems *t*, la ſurface A ſoit deſcendue en a, & celle B en b. La colonne Bb repréſentera l'écoulement pendant ce tems. Bb ſera égale à la hauteur dont un corps tomberoit pendant le même tems, en vertu de la peſanteur. Or on ſait que $Bb = Aa = \frac{1}{2} g t^2 = t^2 . 15, 1$ pieds, *t* étant évalué en ſecondes. Ainſi, nommant r^2 la capacité intérieure du cylindre, on aura, pour l'écoulement pendant le nombre *t* de ſecondes, un cylindre dont la baſe ſera r^2, & la hauteur $t^2 . 15, 1$ pieds. Mais dans une autre hypothèſe d'accélération, on auroit en général $Bb = \int V dt$, *V* étant la viteſſe commune à chaque molécule après le tems *t*.

2. Je ſuppoſe maintenant que le cylindre ſe maintienne toujours plein à la même hauteur. Soit (*Fig. II.*) AB la colonne initiale : je conſidère le fluide au moment où ſa baſe inférieure B, après un

un tems t, eſt parvenue en C ; que le nouveau fluide a remplacé le vuide qui s'étoit fait dans la partie ſupérieure ; & que, la gravité ayant exercé ſon effet inſtantanée, la colonne AC eſt ſur le point de ſe mouvoir avec une viteſſe réſultante de tout cet expoſé, que je nomme v. Cette colonne AC deſcend donc uniformément de C en D pendant le tems dt, CD étant $= dx$; & il ſe fait, dans la partie ſupérieure, le vuide Aa $=$ CD $= dx$ qui ſe remplit auſſi-tôt. De manière que, lorſque la colonne aD $=$ AC commencera à deſcendre en E, pendant l'inſtant égal ſuivant dt, elle entraînera, en vertu de l'adhérence mutuelle des molécules du fluide, la petite partie Aa qui n'a aucune viteſſe. Ainſi la viteſſe en D, au lieu d'être $= v$, comme l'inſtant précédent, ſeroit, par les loix de la communication du mouvement, $\frac{aD.\, r^2 v}{(Aa + aD)\, r^2}$, ſi la gravité n'agiſſoit point en cet inſtant; ou nommant AB $= M$, BC $= x$, elle ſeroit $\frac{aD.\, v}{AD} = \frac{AC.\, v}{AC + CD} = \frac{(M+x)\,v}{M+x+dx}$. Mais à cauſe de la gravité qui agit ſur toute la colonne, on aura, pour la viteſſe au point D, $v' = v + dv = \frac{(M+x)\,v}{M+x+dx} + g\,dt$; d'où, négligeant les différentielles du ſecond degré, $dv = \frac{-vdx}{M+x} + g\,dt$, ou, mettant pour dt ſa valeur $\frac{dx}{v}$, feſant $M + x = \vartheta$, & réduiſant, $\vartheta v dv + v^2 d\vartheta - g\vartheta d\vartheta = 0$ qui, multipliant par 2ϑ, & intégrant, devient $\vartheta^2 v^2 - \frac{2}{3} g \vartheta^3 =$ conſt.; c'eſt-à-dire, $v = \frac{\sqrt{(2g\vartheta^3 + c)}}{\vartheta \sqrt{3}}$. Or, quand $x = 0$, $\vartheta = M$, & $v = 0$; donc $c = -2gM^3$, & $v = \frac{\sqrt{2g(\vartheta^3 - M^3)}}{\vartheta \sqrt{3}}$, ou

$$v = \frac{\sqrt{2g(x^3+3Mx^2+3M^2x)}}{(M+x)\sqrt{3}}.$$

On ſait qu'un corps, tombant librement de la hauteur x, acquiert une viteſſe $\sqrt{2gx}$; ainſi le fluide, après avoir parcouru, dans notre hypothèſe, le même eſpace x, n'a acquis qu'une viteſſe égale à celle d'un corps, qui ſeroit tombé de la hauteur $\frac{x^3+3Mx^2+3M^2x}{3(M+x)^2} < x$.

3. Maintenant, pour avoir $\int v dt$, ou ſon égale x, je mets pour v, ſa valeur $\frac{dx}{dt}$; d'où, laiſſant $M+x=\vartheta$, j'ai $dt = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2g}} \frac{\vartheta d\vartheta}{\sqrt{\vartheta^3 - M^3}}$ dont l'intégrale, qu'on ne peut avoir en termes finis, donnera t en x, & enſuite x en t; c'eſt-à-dire, la quantité dont la baſe du fluide au premier inſtant B, s'eſt abaiſſée pendant le tems t; & conſéquemment, la hauteur de la colonne de ce fluide qui eſt ſortie du cylindre, ou la quantité de l'écoulement pendant cet intervalle.

Comme nous aurons beſoin plus tard de la valeur de t en x, voici une manière de parvenir à une ſérie aſſez convergente. Je change

$$dt = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2g}} \frac{\vartheta d\vartheta}{\sqrt{\vartheta^3 - M^3}} \text{ en}$$

$$dt = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3g}} \frac{\frac{3\vartheta^2 d\vartheta}{2\sqrt{\vartheta^3 - M^3}}}{\vartheta} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3g}} \frac{d\sqrt{\vartheta^3 - M^3}}{\vartheta}.$$

Je commence par développer $\sqrt{\vartheta^3 - M^3}$ en ſérie, au moyen de la formule du binome, & j'en prends enſuite la différence que je diviſe par ϑ. Or

$\sqrt{\vartheta^3 - M^3} = \vartheta^{\frac{3}{2}}$ + *une suite dont le terme général, ou celui qui se trouve au rang* n, *y compris le terme* $\vartheta^{\frac{3}{2}}$, *est*

$$\left(\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)\ldots(\frac{1}{2}-n+2)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots\ldots\ldots(n-1)}\right)(-M^3)^{n-1}\,\vartheta^{-3n+\frac{9}{2}}$$

Sa différentielle, sous la même forme, est

$$d\sqrt{\vartheta^3 - M^3} = \frac{3}{2}\vartheta^{\frac{1}{2}}\,d\vartheta \ldots\ldots\ldots -$$
$$\left(\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)\ldots(\frac{1}{2}-n+2)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots\ldots(n-1)}\right)\left(3n-\frac{9}{2}\right)(-M^3)^{n-1}\,\vartheta^{-(3n-\frac{7}{2})}\,d\vartheta;$$

& divisant par ϑ,

$$\frac{d\sqrt{\vartheta^3 - M^3}}{\vartheta} = \frac{3}{2}\vartheta^{-\frac{1}{2}}\,d\vartheta \ldots\ldots\ldots -$$
$$\left(\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)\ldots(\frac{1}{2}-n+2)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots\ldots(n-1)}\right)\left(3n-\frac{9}{2}\right)(-M^3)^{n-1}\,\vartheta^{-(3n-\frac{5}{2})}\,d\vartheta;$$

dont l'intégrale est

$$t = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3g}}\Bigg(c + 3\sqrt{\vartheta} \ldots\ldots\ldots +$$
$$\left(\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)\ldots(\frac{1}{2}-n+2)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots\ldots(n-1)}\right)\left(\frac{6n-9}{6n-7}\right)\frac{(-M^3)^{n-1}}{\vartheta^{3n-\frac{7}{2}}}\Bigg).$$

Les premiers termes de la série sont, en commençant par $n = 2$, puisque $3\sqrt{\vartheta}$ en est le premier,

$$t = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3g}}\Bigg(c + 3\sqrt{\vartheta} - \frac{3}{10}\frac{M^3}{\vartheta^{\frac{5}{2}}} - \frac{9}{88}\frac{M^6}{\vartheta^{\frac{11}{2}}} - \frac{15}{272}\frac{M^9}{\vartheta^{\frac{17}{2}}} - \frac{105}{2944}\frac{M^{12}}{\vartheta^{\frac{23}{2}}} -$$
$$\frac{189}{7424}\frac{M^{15}}{\vartheta^{\frac{29}{2}}} - \&c.\Bigg).$$

c se détermine par la condition que, lorsque $t = 0$, $x = 0$ ou

$\vartheta = M$: & on pourra mettre la valeur de t sous cette forme

$$t = \frac{\sqrt{2\vartheta}}{\sqrt{3g}}\left(3 - \frac{3}{10}\left(\frac{M}{\vartheta}\right)^3 - \frac{9}{88}\left(\frac{M}{\vartheta}\right)^6 - \frac{15}{272}\left(\frac{M}{\vartheta}\right)^9 - \frac{105}{2944}\left(\frac{M}{\vartheta}\right)^{12} - \&c.\right)$$

$$- \frac{\sqrt{2M}}{\sqrt{3g}}\left(3 - \frac{3}{10} - \frac{9}{88} - \frac{15}{272} - \frac{105}{2944} - \&c.\right)$$

Sachant donc la hauteur BC que la colonne a parcourue dans sa chûte ; nous connoîtrons, *par approximation*, le tems qu'elle y a employé.

4. Remarquons en passant ; 1°. qu'en tems égaux l'écoulement sera proportionnel à la capacité r^2 du cylindre ; 2°. que plus la colonne du fluide contenu dans le cylindre au premier instant aura de hauteur, plus l'écoulement sera abondant : ce qu'on apperçoit facilement, & qui est confirmé par la formule

$$v = \sqrt{2g\,\frac{x^3 + 3Mx^2 + 3M^2x}{3(M+x)^2}},$$

d'où il résulte que la vitesse augmente, en même tems que la hauteur initiale M.

5. Nous avons supposé que chaque petite portion de fluide Aa est entraînée par toute la colonne aD, ce qui exige que cette colonne descende toujours librement sans rencontrer d'obstacle ; voyons ce qui arriveroit dans le cas contraire. Soit donc encore AB le cylindre ; qu'en D, BD étant $= a$, la colonne rencontre un plan inébranlable, le long duquel le fluide puisse s'écouler subitement. Il est clair que, jusqu'à ce point de rencontre, tout se passera comme dans le problème précédent ; & que pour avoir la vitesse u de la colonne lorsqu'elle parvient en D, il suffit de mettre dans son expression a pour x ; d'où

qu'ell[illegible] pour limite $\sqrt{gN} = \sqrt{g \cdot AD} = \sqrt{2g \cdot \frac{1}{2} AD}$; deforte que la plus grande viteffe, que puiffe acquérir le fluide, eft celle [illegible] hauteur $\frac{1}{2}$ AD.

6. On connoîtra auffi facilement $\int v dt$, ou la quantité de l'écoulement correfpondante au tems t. Pour cela, fefant $\sqrt{gN} = m$, $\frac{2tm}{N} = \zeta$, & $E^{t} = \vartheta$, on aura

$$\int v dt = \frac{N}{2} \text{Log.} \frac{q^2 (\vartheta + c)^2}{\vartheta},$$

q^2 étant une conftante à déterminer. Or, quand $t = 0$, $\int v dt = 0$; puifque nous ne comptons t que depuis l'inftant où le fluide eft parvenu en D, & que nous ne cherchons que la quantité d'écoulement, depuis ce même inftant; donc

$$\int v dt = \frac{N}{2} \text{Log.} \frac{(\vartheta + c)^2}{\vartheta (1 + c)^2} = N \text{ Log.} \frac{E^{\frac{2t\sqrt{gN}}{N}} + c}{(1 + c) E^{\frac{t\sqrt{gN}}{N}}}.$$

Il eft clair que tout ceci s'applique également au cas où le fluide s'écouleroit dans une maffe d'eau d'une étendue indéfinie.

7. Maintenant foit (*Fig. III.*) AB le cylindre entretenu conftamment plein; MNOP un vafe dans lequel foit fixé, d'une manière inébranlable, le plan DR. Si on donne au fluide la liberté de s'échapper par l'ouverture inférieure, il parcourra dabord l'efpace BD fous la forme d'une colonne continue BD. Mais à fon arrivée au point D, la rencontre du plan interrompera, à chaque nouvel inftant, cette colonne qui ne confervera que la même hauteur BD; & le fuperflu fe raffemblera dans le vafe MNOP,

par l'efpace vuide qR qui fe trouve entre le plan & les parois de ce vafe, que je fuppofe d'une capacité fuffifante pour que l'eau ne s'y élève pas au-deffus de pq. Après un certain tems, qu'on arrête l'écoulement, au moyen d'une platine de métal recouverte de cuir, qu'on fera gliffer fubitement contre la bafe inférieure du cylindre; & qu'on compte le nombre de fecondes que l'expérience aura duré. On demande de déterminer, conformément à la théorie précédente, la quantité de fluide qui fe fera écoulée.

8. Je confidère dans cet écoulement, deux époques différentes; dans la première, la bafe inférieure du fluide contenu dans AB, defcend de B en D, felon les loix établies dans la première hypothèfe; dans la feconde, cette colonne ne pouvant pas s'étendre au-delà du plan DR, la quantité excédente gliffe le long de ce plan, & fe décharge dans le vafe, la colonne BD confervant toujours fa forme: & tant que l'écoulement dure, il n'y a que cet excédent qui entre dans le vafe. Ce n'eft que lorfqu'on l'interrompt, que la colonne BD fe précipite elle-même; mais le tems de fa chûte ne doit point entrer en compte, parcequ'elle étoit déjà hors du cylindre, au moment où on a bouché l'orifice. Ainfi, le total de l'écoulement fera la colonne BD ayant r^2 pour bafe, & a pour hauteur, plus la quantité de fluide écoulée pendant le tems de l'obfervation, après avoir déduit de ce tems, celui que la colonne a employé à defcendre de B en D.

9. Voici donc le plan du calcul, en confervant les mêmes dénominations que ci-deffus. Le total de l'écoulement eft $r^2 (a + \int v dt)$; & la colonne de fluide a parcouru l'efpace $= a$. Pour déterminer le tems qu'elle y a employé, je mets (§ 3) dans la valeur de t,

a pour x, ou $M + a$ pour ϑ ; & ayant pris un nombre de termes suffisant, j'ai, en multipliant par $\frac{\sqrt{2\vartheta}}{\sqrt{3g}}$, où $g = 30, 2$ pieds, le nombre de secondes que représente t, *par approximation*. J'ôte ce nombre, du tems qu'a duré l'écoulement, & je suppose que le reste $= T$. Je mets, dans la valeur de $\int v dt$ (§ 6), T pour t : je connois g, N, & $c = \frac{N + 2K - 2\sqrt{2NK}}{N - 2K}$ (§ 5) : d'ailleurs $K = \frac{N^3 - M^3}{3N^2}$; ainsi tout est connu, dans la quantité dont il faut prendre le logarithme *hyperbolique*. Il ne s'agit plus que de substituer ce résultat dans $r^2 (a + \int v dt)$, pour avoir la quantité de l'écoulement.

10. On voit que, tout étant égal d'ailleurs, cette quantité sera encore ici proportionnelle à la capacité du cylindre AB ; & qu'elle varie selon la hauteur de ce cylindre, & selon la distance de sa base inférieure au plan DR. Nous avons aussi vu plus haut (§ 5) que la vîtesse du fluide varie selon le tems plus ou moins long qu'a déjà duré l'écoulement. Mais, sans m'arrêter aux remarques que suggèrent d'elles-mêmes les formules algébriques, je passe au troisième cas qui est plus compliqué.

11. C'est celui où la colonne de fluide tomberoit dans un vase fini, que pour plus de simplicité nous supposerons d'une capacité uniforme dans toute sa hauteur, sa base ayant une figure quelconque dont l'aire soit $= \rho^2$. Soit toujours a la distance BO de la base inférieure du cylindre AB au fond du vase. Tout se passera comme dans la première hypothèse, jusqu'au moment où la colonne atteindra ce fond. Alors ne pouvant plus s'étendre, elle se maintiendra à la même hauteur BO. Tout l'excédent du fluide remplira

le

le vuide pDOPEq, dans lequel il s'élèvera de plus en plus. Suppofons le parvenu en pq; la partie DOPE foutenue par le fluide qui l'environne, fera l'effet d'une maffe folide, & la colonne qui entraîne la petite quantité de nouveau fluide, fera diminuée de toute la hauteur OD. Ainfi, nommant z cette hauteur, & $AO = M + a = N$, cette colonne fera $= N - z$; & par les mêmes raifonnemens que dans le problème précédent (§ 5), on aura

$$v + dv = \frac{(N - z - vdt)v}{N - z} + gdt, \ \& \ dv = -\frac{v^2 dt}{N - z} + gdt.$$

Or, la capacité du tuyau étant $= r^2$, on a à chaque inftant $r^2 vdt = (\rho^2 - r^2) dz$, puifque $\rho^2 - r^2$ repréfente l'efpace vuide qui règne autour de la colonne, & dans lequel le fluide excédent s'élève. Fefons $\rho^2 - r^2 = R^2$, on aura, en nommant en outre s la fraction $\frac{R}{r}$, $dt = s^2 \frac{dz}{v}$. Donc, en fubftituant cette valeur de dt,

$$dv = -\frac{s^2 v dz}{N - z} + \frac{gs^2 dz}{v},$$

& fefant $N - z = \vartheta$, $-dz = d\vartheta$, ôtant de plus les dénominateurs,

$$\vartheta v dv - s^2 v^2 d\vartheta + gs^2 \vartheta d\vartheta = 0,$$

dont on trouvera facilement l'intégrale, en fefant $v^2 = \epsilon$, puifque par-là cette équation devient homogène. L'intégrale en eft

$$\frac{(2s^2 - 1)v^2 - 2s^2 g\vartheta}{\vartheta^{2s^2}} = c, \text{ d'où } v = \sqrt{\frac{c\vartheta^{2s^2} + 2gs^2\vartheta}{2s^2 - 1}}.$$

Or, quand $z = 0$, ou que $\vartheta = N$, $v = \sqrt{2gK}$ (§ 5); donc

$$c = \frac{(2s^2 - 1)2gK - 2s^2 gN}{N^{2s^2}}, \ \&$$

Hh

$$v = \frac{1}{N^{s^2}} \sqrt{\left(2g \frac{((2s^2-1)K - s^2N)\vartheta^{2s^2} + s^2N^{2s^2}\vartheta}{2s^2-1}\right)}.$$

Nous avons vu que $v = \frac{s^2 dz}{dt} = \frac{-s^2 d\vartheta}{dt}$: remettant donc ici pour v cette valeur, on auroit l'expreſſion différentielle de t en z ou en ϑ ; d'où prenant la valeur de z ou ϑ en t, on connoîtroit la quantité de l'écoulement $= \int r^2 v dt = R^2 z$; mais on ne peut avoir ces expreſſions en termes finis que dans très-peu de cas.

12. Feſons dabord quelques remarques ſur cette valeur de v. On voit qu'elle dépend de N, s, ϑ, & de K qui contient lui-même M ; c'eſt-à-dire, que la viteſſe varie en même tems que la hauteur entière AO ; la hauteur du cylindre AB ; la diſtance du point B au fond du vaſe ; le rapport de la capacité du cylindre à celle du vaſe ſuppoſé uniforme ; & enfin la diſtance BD qui ſe trouve à chaque inſtant, entre la baſe inférieure du cylindre & le niveau du fluide en cet inſtant dans le vaſe.

13. Si $\vartheta = 0$, $z = N$. Dans ce cas, le niveau, dans le vaſe MQRN (*Fig. IV.*) qu'on ſuppoſe au moins auſſi haut que le point A, s'élève juſqu'en A, & la viteſſe $= 0$; ce qui doit évidemment avoir lieu. En effet, tant que le niveau de l'eau dans le vaſe eſt au-deſſous du point B, comme en DE, la colonne BH contribue à entraîner la nouvelle quantité de fluide qui entre dans la partie ſupérieure du cylindre ; elle agit donc en *plus*. Lorſque ce niveau arrive au point B, cette colonne BH, ainſi que ſon action, eſt nulle. Lorſqu'au contraire le niveau eſt arrivé, par exemple, en de, la colonne hB étant en équilibre avec le fluide qui l'environne, ſon effet eſt anéanti, & doit donc être déduit de l'effet de la colonne entière AB, & être pris par con-

ſéquent en *moins*; juſqu'à ce que, le fluide étant enfin parvenu en MN, tout ſoit en équilibre.

14. On peut tirer de cette formule un théorème aſſez élégant par ſa ſimplicité, pour le cas où la capacité uniforme du vaſe MQRN étant double de celle du cylindre, l'extrémité B de celui-ci touche, dès le premier inſtant, la ſurface du fluide DE contenu dans le vaſe; ſavoir, que ſi on décrit un cercle ſur AB (*Fig. V.*) comme diamètre, la vîteſſe avec laquelle le fluide s'élève dans le vaſe, ſera à chaque point K de ſa hauteur, comme l'ordonnée correſpondante KF du cercle. Elle ſera donc zéro aux deux points B & A; l'un où elle commence; & l'autre où elle finit. En effet, dans cette hypothèſe, $s \mp 1$, $a = 0$; puiſque la ſurface du fluide ſtagnant tient ici lieu du fond du vaſe; & $K = 0$ (§ 5), $M = N$. Ainſi la formule ſe réduit à

$$v = \frac{1}{\sqrt{M}}\sqrt{2g\,(M\vartheta - \vartheta^2)}.$$

Or ϑ eſt la diſtance AK du point A au niveau KF du fluide dans le vaſe; donc &c.

15. En reſtant dans la même hypothèſe, $vdt = dz = -d\vartheta$; $dt = -\frac{\sqrt{M}}{\sqrt{2g}}\,\frac{d\vartheta}{\sqrt{M\vartheta - \vartheta^2}}$; & conſéquemment

$$t = \frac{\sqrt{M}}{\sqrt{2g}}\left(c + \text{arc fin. } \frac{\frac{1}{2}M - \vartheta}{\frac{1}{2}M}\right).$$

Or, quand $t = 0$, $\vartheta = M$; donc $c = -$ arc ſin. -1, &

$$t = \frac{\sqrt{M}}{\sqrt{2g}}\left(\text{arc fin. } \frac{\frac{1}{2}M - \vartheta}{\frac{1}{2}M} - \text{arc fin.} -1\right) = \frac{\sqrt{M}}{\sqrt{2g}}\left(\text{arc fin. } \frac{\sqrt{M\vartheta - \vartheta^2}}{\frac{1}{2}M}\right).$$

On tire de-là $\sqrt{M\vartheta - \vartheta^2} = \frac{1}{2}M$ ſin. $\frac{\sqrt{2g}}{\sqrt{M}}\,t$; donc

$$vdt = \frac{1}{2} M \frac{\sqrt{2g}}{\sqrt{M}} dt \text{ fin. } \frac{\sqrt{2g}}{\sqrt{M}} t, \&$$

$$\int vdt = z = M - \vartheta = B - \frac{1}{2} M \text{ cof. } \frac{\sqrt{2g}}{\sqrt{M}} t.$$

Or, quand $z = o$, $t = o$, $B = \frac{1}{2} M$ cof. $o = \frac{1}{2} M$; d'où

$$z = \frac{1}{2} M \left(1 - \text{cof. } \frac{\sqrt{2g}}{\sqrt{M}} t\right).$$

16. Si fans fuppofer $BO = a = o$, nous laiffons $s = 1$, nous parviendrons encore à des réfultats affez fimples. En effet, nous avons pour ce cas-ci (§ 11) $v = \frac{\sqrt{2g}}{N} \sqrt{(K - N) \vartheta^2 + N^2 \vartheta}$, ou, comme (§ 5) $N > K$,

$$v = \frac{\sqrt{2g}}{N} \sqrt{N^2 \vartheta - (N - K) \vartheta^2} = \frac{\sqrt{2g(N-K)}}{N} \sqrt{\frac{N^2}{N-K} \vartheta - \vartheta^2}.$$

Soit $\frac{N^2}{N-K} = P$, $v = \frac{\sqrt{2g}}{\sqrt{P}} \sqrt{P\vartheta - \vartheta^2}$. Donc, comme ci-deffus, $t = \frac{\sqrt{P}}{\sqrt{2g}} \left(c + \text{arc fin. } \frac{\frac{1}{2} P - \vartheta}{\frac{1}{2} P}\right)$. Or, quand $t = o$, $\vartheta = N$, $c = -$ arc fin. $\frac{\frac{1}{2} P - N}{\frac{1}{2} P}$; donc

$$t = \frac{\sqrt{P}}{\sqrt{2g}} \left(\text{arc fin. } \frac{\frac{1}{2} P - \vartheta}{\frac{1}{2} P} - \text{arc fin. } \frac{\frac{1}{2} P - N}{\frac{1}{2} P}\right),$$

ou réduifant,

$$t = \frac{\sqrt{P}}{\sqrt{2g}} \text{ arc fin. } \frac{(\frac{1}{2} P - \vartheta) \sqrt{PN - N^2} - (\frac{1}{2} P - N) \sqrt{P\vartheta - \vartheta^2}}{\frac{1}{4} P^2}.$$

Pour avoir au contraire ϑ, ou plutôt z en t, fervons-nous de la première valeur de t, en laiffant c indéterminée. On en conclut

$$\frac{1}{2} P \left(1 - \text{fin. } \left[\frac{\sqrt{2g}}{\sqrt{P}} t - c\right]\right) = \vartheta = N - z,$$

$$z = N - \tfrac{1}{2}P\left(1 - \text{fin.}\left[\frac{\sqrt{2g}}{\sqrt{P}}t - c\right]\right),$$

$$= N - \tfrac{1}{2}P + \tfrac{1}{2}P\,\text{fin.}\left(\frac{\sqrt{2g}}{\sqrt{P}}t - c\right)$$

$$= N - \tfrac{1}{2}P + \tfrac{1}{2}P\left(\text{fin.}\frac{\sqrt{2g}}{\sqrt{P}}t\,\text{cof.}\,c - \text{fin.}\,c\,\text{cof.}\frac{\sqrt{2g}}{\sqrt{P}}t\right);$$

or $\text{fin.}\,c = -\frac{\frac{1}{2}P - N}{\frac{1}{2}P} = \frac{N - \frac{1}{2}P}{\frac{1}{2}P}$; $\text{cof.}\,c = \frac{\sqrt{PN - N^2}}{\frac{1}{2}P}$; donc

$$z = N - \tfrac{1}{2}P + \sqrt{PN - N^2}\,\text{fin.}\frac{\sqrt{2g}}{\sqrt{P}}t - (N - \tfrac{1}{2}P)\,\text{cof.}\frac{\sqrt{2g}}{\sqrt{P}}t$$

qui eſt la valeur de $\int v dt = z$.

17. Les formules que fournit l'hypothèſe de $s = 1$ ſont, par leur ſimplicité, très-propres à être appliquées à l'expérience; & on pourroit, par leur moyen, déterminer facilement de combien la nature s'écarte de notre théorie. Suppoſons (*Fig. IV.*) un cylindre AB entretenu conſtamment plein à la même hauteur, & bouché comme dans l'article 7, à ſon extrémité inférieure B. Que la capacité intérieure du vaſe MQRN ſoit double de celle du cylindre, ce qui eſt le cas de $s = 1$. Ayant débouché le cylindre, le fluide parcourra dabord l'eſpace BO, comme dans le problème de l'article 2. Enſuite la colonne conſervant ſa forme, l'excédent du fluide remontera dans le vuide qui règne entre cette colonne & les parois du vaſe. Suppoſons qu'il ſoit parvenu en DE; arrêtant alors l'écoulement (§ 7), & obſervant le nombre de ſecondes qu'il a duré, le reſte HB de la colonne ſe précipitera dans le vaſe. Il s'agit donc de déterminer la quantité de cet écoulement.

On a dabord le cylindre entier BO, dont la baſe r^2 & la hauteur a ſont données. Le fluide, ayant parcouru l'eſpace BO, a em-

ployé un tems qu'on déterminera *par approximation*, au moyen de la formule de l'article 3, en mettant dans la valeur de t, $M + a$ au lieu de ϑ. Otant ce tems de celui qu'a duré l'obfervation, foit T le refte. On fubftituera dans l'expreffion de z (§ *préc.*) cette valeur T à t, ainfi que celles de $P = \frac{N^2}{N-K} = (\S\ 5)$ $\frac{3N^4}{2N^3 + M^3}$, & de $N = M + a$. On connoîtra donc z qui eft la hauteur à laquelle le fluide s'eft élevé; hauteur qui n'eft point celle à laquelle il fe trouvera réellement, cette dernière étant augmentée de la colonne BH qui fe précipite dans le vafe, à la fin de l'expérience. On pourra donc, ou multiplier z par la moitié de la capacité intérieure du vafe, qui dans notre hypothèfe eft la même chofe que la capacité entière du tuyau cylindrique, & ajouter ce produit à la colonne entière BO fur même bafe, pour avoir le produit total de l'écoulement en pieds cubes, qu'on comparera avec l'écoulement effectif; ou, ce qui eft plus fimple, ajouter à la hauteur z qui eft QD, la moitié de celle BH $= a - z$ (puifque la colonne BH s'étendant dans un efpace double, perdra la moitié de fa hauteur) & comparer cette fomme, qui fera $z + \frac{a-z}{2} = \frac{z+a}{2}$, avec la hauteur réelle que l'eau aura atteinte dans le vafe.

18. Reprenons le problème de l'article 2, comme le plus fimple, & comparons fon réfultat avec celui que fournit, pour le même cas, la méthode donnée par M. l'abbé Boffut dans fon traité d'Hydrodynamique (*vol. Ier. pag.* 289, *art.* 233 *édit. de Paris* 1786). On verra facilement, qu'en fuppofant que le vafe foit un cylindre ouvert par fes deux extrémités, l'orifice $K =$ l'aire M; ce qui

réduit la pénultième équation de cet article à

$$-2\text{Rr}\cdot M^2vu + 2ghM^2\cdot \text{Rr} - 2M^3Nudu = 0.$$

On a aussi $v = u$; donc réduisant, $(gh - u^2)\,\text{Rr} - MNudu = 0$. De plus, $N = \int \frac{dx}{y}$, & comme, à cause de la forme cylindrique du vase, $y = K = M$; $N = \int \frac{dx}{M} = \frac{x}{M} + c$ qui doit être zéro quand $x = 0$. Donc $c = 0$, & $MN = x$; & fesant, pour completter cette valeur, $x = h$; $MN = h$, d'où $(gh - u^2)\,\text{Rr} = hudu$. Mais selon mon principe, $\text{Rq} = h$ n'est pas une quantité constante; puisqu'elle est toujours égale à la hauteur primitive de l'eau contenue dans le vase, plus la distance à laquelle est parvenue la base inférieure de cette eau, par son écoulement continuel; & il est évident qu'alors Rr sera $= dh$. On aura donc $(gh - u^2)\,dh = hudu$, qui est la même équation que celle que je trouve (§ 2); savoir, $(g\vartheta - v^2)\,d\vartheta = \vartheta vdv$, où v est la même chose que u, & ϑ la même chose que h, en prenant h comme je viens de le dire.

19. Après avoir établi que la colonne de fluide, qui est déjà hors du cylindre, influe sur le mouvement du nouveau fluide qui y afflue sans cesse; & conséquemment sur celui de la totalité du fluide, on ne peut se refuser à étendre cette proposition à un vase quelconque percé d'un orifice de forme & de position aussi quelconques; soit que ce vase ne contienne que la quantité initiale de fluide; soit qu'il soit entretenu constamment plein. On sent combien une pareille considération doit ajouter de difficulté à cette théorie; & ce n'est cependant pas la seule à laquelle il faudroit avoir égard, si on vouloit résoudre ces questions d'une manière rigoureuse.

Pour donner une idée des difficultés qu'on auroit à ſurmonter, je préſenterai ici l'eſquiſſe d'une ſolution rigoureuſe, en feſant cependant abſtraction de l'air, & de l'adhérence & du frottement contre les parois du vaſe. Soit donc (*Fig. VI.*) ACDB un vaſe, CD l'orifice, AB la ſurface ſupérieure du fluide, tant que l'orifice eſt bouché, & dont la nature eſt déterminée par la condition de l'équilibre du fluide, dans l'hypothèſe de la gravité verticale conſtante, & d'une attraction mutuelle entre toutes les molécules, que la forme des gouttes d'eau ne permet pas de révoquer en doute. Ayant débouché l'orifice, le fluide deſcend en ab, tandis qu'il s'en échappe une quantité égale à ABba ſous la forme CMND. L'inſtant d'après, il parviendra en eg, l'écoulement à cette époque; c'eſt-à-dire, la quantité de fluide hors du vaſe étant repréſentée par CmnD. Voici donc le problème qu'il faudroit réſoudre.

Connoiſſant la forme du vaſe; celle de ſon orifice, ainſi que ſa poſition; & la quantité du fluide contenu au premier inſtant, déterminer pour chaque inſtant ſuivant, la figure CMND qui a l'orifice CD pour baſe, en ayant égard, non-ſeulement à la peſanteur & à l'attraction des parties du fluide; mais encore à ſa viſcoſité; c'eſt-à-dire, à la réſiſtance plus ou moins grande qu'il oppoſera au changement continuel de forme qu'il doit ſubir, en paſſant d'un inſtant à l'autre, de la figure bDNMCa, à celle gDnmCe. Car il eſt certain que tout égal d'ailleurs, il y auroit une grande différence entre les écoulemens ſimultanées, de l'eau par exemple, & de l'huile ou du miel, ou de toute autre matière viſqueuſe.

QUATRIEME

QUATRIÈME MÉMOIRE.

Sur une nouvelle manière de traduire, en langue algébrique, le principe d'égalité de preſſion, & d'en déduire toutes les loix de l'Hydroſtatique, & ſpécialement la figure de la Terre.

LE principe d'égalité de preſſion en tout ſens eſt reconnu depuis long-tems, comme le principe fondamental de l'équilibre des fluides. Je donne ici une nouvelle manière de le traduire en langue algébrique ; c'eſt-à-dire, de l'appliquer au calcul. Cette méthode eſt ſi naturelle & ſi directe, que malgré les chef-d'œuvres qu'on a déjà en ce genre, je me ſuis flatté qu'elle pourroit encore mériter l'attention des Géomètres.

1. Soit QVZK (*Fig. I.*) une maſſe fluide en équilibre, & C une molécule de cette maſſe. Il faut, en vertu du principe énoncé ci-deſſus, que la preſſion qu'éprouve le point C, de la part du canal quelconque CHK, ſoit la même que celle qu'il éprouve d'un autre canal auſſi quelconque CZ ; ce qui renferme deux conditions :

1°. Quelle que ſoit la courbure du canal fictif CHK qui paſſe par les deux points C & K, ſa preſſion ſur le point C doit être la même.

2°. Quelle que ſoit la poſition du point K ſur la ſurface VZK, cette preſſion ſur le point C doit reſter la même.

Pour ſatisfaire à ces deux conditions, je chercherai l'expreſſion de la preſſion qu'un canal CHK exerce ſur le point C, ſans déterminer ſa courbure, & avec la ſeule reſtriction, qu'il paſſe par les points C & K. Enſuite, je ſuppoſerai que ce point K change de ſituation ſur la ſurface VZK, & j'établirai que ce changement n'influe point ſur l'expreſſion de la preſſion.

On voit dabord que cette expreſſion contiendra néceſſairement les deux co-ordonnées de la courbe indéterminée CHK; (je commence par conſidérer ſeulement les figures planes, afin de me rendre plus intelligible) & comme elle eſt donnée par une formule différentielle, & que ſa valeur, pour l'étendue totale du canal compris entre les points C & K, eſt la même, quelle que ſoit la figure de ce canal; ou ce qui eſt la même choſe, comme elle ne dépend pas de la rélation des co-ordonnées entr'elles, il faut que cette formule ſoit une différentielle exacte. Sans cette condition, on ne pourroit avoir la valeur de la preſſion, qu'en déterminant la courbure CHK: & il eſt clair qu'alors l'équilibre ne ſubſiſteroit, qu'autant que ces petits canaux fictifs exiſtaſſent réellement, & que le fluide ne preſſât que dans la direction de leur courbure; ce qui eſt abſurde.

Cette condition de l'intégrabilité de l'expreſſion différentielle de la preſſion, a été reconnue par tous les Auteurs qui ont traité cette

matière. Elle se présente ici d'une manière bien naturelle : & il suit de-là qu'il y a telle loi de pression, en vertu de laquelle jamais une masse fluide ne se mettroit en équilibre, & ne conserveroit, deux instans consécutifs, la même figure.

PROBLÈME I.

Etant donné (Fig. II.) *un vase quelconque* MNR *plein d'eau, on demande quelle sera la courbure* MZR *de sa surface supérieure, dans l'hypothèse de la gravité verticale constante.*

2. Soient $AP = x$, $PK = y$ les co-ordonnées de la courbe MZR ; C un point quelconque déterminé par $AB = a$, $BC = b$. Du point C soit menée à la courbe MZR, la courbe quelconque CHK, CG étant $= z$, & $GH = u$. Représentons par Hn, la vitesse que la gravité communique, à chaque instant, à la molécule H ; & nommons-la gdt, ou simplement g, en considérant dt comme l'unité de tems infiniment petit, puisqu'il n'est ici aucunement question du tems.* Il est clair que la vitesse qui résultera de-là, dans le sens de la courbe KHC, sera Ho. Or $Hn : Ho = ds : du$, en nommant s l'arc CH ; donc $Ho = g\frac{du}{ds}$: & comme la pression est le produit de la vitesse détruite par la masse qui est ici ds, on aura enfin, pour la pression qu'éprouve le point C, de la part du fluide contenu dans le petit canal HC, $\int gdu = gu + c$, qui doit être zéro lorsque $u = 0$; ainsi $c = 0$. De plus, la valeur de cette pression n'est complette, que lorsque la courbe CHK rencontre

* Voyez, au sujet de cette supposition de $dv = gdt$, ce qui est dit à la fin du N.° 11 du cinquième Mémoire.

ZR; c'eſt-à-dire, lorſque $u = DK = y - b$; elle eſt donc $= g(y - b)$. Or, en vertu de l'équilibre, il faut que cette ſoit égale à celle qu'éprouve le point C, de la part de tout autre canal CZ; c'eſt-à-dire, que $g(y - b)$ doit être conſtante, quelle que ſoit l'ordonnée y qu'on conſidère; donc $y - b$ = conſt., ou y = conſt.

Suppoſons que la diſtance du point donné M, à la ligne AP, ſoit $= m$, on aura, pour ce point, conſt. $= m$; ainſi $y = m$, & conſéquemment MZR eſt une ligne droite horizontale paſſant par le point donné M. Il en ſera de même en ſuppoſant au vaſe ſes trois dimenſions. Alors la courbe quelconque CHK eſt une courbe à double courbure, déterminée par les trois co-ordonnées z, x, y; & ds, au lieu d'être $= \sqrt{dx^2 + dy^2}$, devient $\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$; mais l'expreſſion de la preſſion eſt la même, ainſi que les conſéquences qui en réſultent. Et il ſuit de-là, que quelle que ſoit la forme du vaſe, la ſurface ſupérieure du fluide qu'il contient, ſera toujours un plan horizontal.

3. Si on vouloit ſuppoſer la denſité du fluide variable, repréſentons-la par D. Alors la preſſion ſera $\int gDdu$, par où l'on voit que la condition d'intégrabilité de cette formule exige que D ſoit une fonction de u ſeule; c'eſt-à-dire, que la denſité ne varie que dans le ſens vertical, ou que le fluide ſoit diviſé en petites tranches horizontales, dans chacune deſquelles la denſité ſoit conſtante; & comme on ſait d'ailleurs qu'un fluide plus denſe, & conſéquemment ſpécifiquement plus peſant, occupe toujours la partie la plus baſſe du vaſe où il eſt contenu, cette fonction de u devra être telle, que D diminue à meſure que u augmente.

4. Ce ſeul problème renferme tout ce qu'on peut dire ſur un fluide contenu dans un vaſe, & ſoumis ſeulement à la peſanteur ordinaire. Il démontre la propriété qu'a l'eau, de ſe mettre toujours de niveau dans les deux branches d'un ſiphon ; car un ſiphon n'eſt qu'un vaſe. Il ſatisfait auſſi à toutes les queſtions qu'on pourroit faire, au ſujet de la preſſion que le fluide exerce perpendiculairement ſur le fond, ou ſur les parois du vaſe qui le contient. Il prouve, par exemple, que, dans le cas du fluide homogène, cette preſſion eſt proportionnelle à la hauteur verticale du fluide au-deſſus du point preſſé. Il explique auſſi l'eſpèce de paradoxe, que préſente le cas aſſez connu d'un vaſe plus large à ſon fond qu'à ſon orifice ſupérieur, en ce que ce fond éprouve la même preſſion, que ſi le vaſe étoit d'une largeur uniforme dans toute ſa hauteur.

PROBLÈME II.

En ſuppoſant qu'une maſſe fluide, conſidérée ſeulement comme une ſurface, gravite vers un point fixe F (Fig. I.), *déterminer ſa figure.*

5. Soient FR, RK les co-ordonnées de la courbe cherchée; $FN = a$, $NC = b$ qui déterminent la poſition du point quelconque C pris dans cette maſſe. Soient auſſi $CG = z$, $GH = u$, les co-ordonnées de la courbe quelconque CHK, décrite du point C à la circonférence de la courbe cherchée. $FH = \sqrt{(\overline{FL}^2 + \overline{LH}^2)}$ $\sqrt{(a+z)^2 (b+u)^2}$. Nommons Pdt, ou ſimplement P la viteſſe que cette gravitation communique à la molécule H, dans le ſens HF. En décompoſant cette viteſſe, celle qui réſultera dans

le fens HL fera $\frac{HL}{HF} P$, & dans celui LF, $\frac{LF}{HF} P$. Soient ces deux viteffes repréfentées par $Hn = \frac{HL}{HF} P$, & par $Hq = \frac{LF}{HF} P$. Or, $Hn : in = ds : du$, & $Hq : mq = ds : dz$; donc mq + in, qui eft la viteffe dans le fens de la courbe KHC, $= \frac{Hq \cdot dz + Hn \cdot du}{ds}$; & nommant toujours D la denfité, la preffion de l'élément H fera

$$= D\,(Hq \cdot dz + Hn \cdot du) = DP\left(\frac{LF \cdot dz + HL \cdot du}{HF}\right).$$

Ainfi celle que la courbe fluide CH exercera fur le point C, fera, en remettant pour LF & HL leurs valeurs, & intégrant,

$$\int PD \frac{(a+z)\,dz + (b+u)\,du}{\sqrt{(a+z)^2 + (b+u)^2}} = \int PDd\sqrt{(a+z)^2 + (b+u)^2}.$$

D'où réfulte évidemment, par la condition d'intégrabilité, que PD ne peut être qu'une fonction de $\sqrt{(a+z)^2 + (b+u)^2} = HF$. Ainfi, tant que P fera une fonction du même genre; c'eft-à-dire, que l'attraction ne variera qu'en vertu de la diftance plus ou moins grande du centre d'attraction F, il s'enfuit que la denfité ne pourra auffi de fon côté être qu'une pareille fonction.

6. Suppofons dabord $P =$ conft. $= g$; $D =$ conft. $= 1$. On aura, pour valeur de la preffion qu'exerce l'arc fluide CH fur le point C, $g\sqrt{(a+z)^2 + (b+u)^2} + c$, qui devant être zéro au point C; c'eft-à-dire, lorfque z & $u = 0$, donne $c = -g\sqrt{a^2 + b^2}$. De plus, cette quantité n'eft complette, que quand $FL = a + z$ devient $= FR = x$, & que $LH = b + u$ devient $= RK = y$. On a donc enfin, pour la preffion totale fur le point C, $g(\sqrt{x^2 + y^2} - \sqrt{a^2 + b^2})$. Or cette quantité doit être conftante, quel que

PROBLÈME III.

…e le même problème, en ſuppoſant de plus que la maſſe …de ait un mouvement de rotation autour de l'axe FR.

7. On voit tout de ſuite que, pour ce nouveau cas, il ſuffira d'ôter, de l'effet de la force d'attraction Hn, celui de la force centrifuge contraire ; ou, ce qui eſt la même choſe, de faire

$$\text{Hn} = \frac{b+u}{\sqrt{(a+z)^2+(b+u)^2}} P - \frac{f}{k}(b+u),$$

en ſuppoſant que $f\,dt$, ou ſimplement f ſoit la force centrifuge pour un rayon k.

Si P & D ſont conſtantes, on trouvera facilement que l'intégrale de $\text{Hq}\cdot dz + \text{Hn}\cdot du$ eſt

$$g\sqrt{(a+z)^2+(b+u)^2} - \frac{f}{2k}(b+u)^2 + c,$$

[illegible] & $u = 0$. Donc

$$[illegible] = \frac{f}{2k} b^2 - g\sqrt{a^2+b^2}.$$

[illegible] comme ci-deſſus cette intégrale, on a

$$g\sqrt{x^2+y^2} - \frac{f}{2k} y^2 + \frac{f}{2k} b^2 - g\sqrt{a^2+b^2}.$$

Or il faut que cette quantité reſte la même, quelque variation que ſubiſſent x & y, pourvu que a & b ne varient pas ; donc

$$g\sqrt{x^2+y^2} - \frac{f}{2k} y^2 = \text{conſt.}$$

Suppoſons que, quand $x = 0$, $y = m$; conſt. ſera $= gm - \frac{f}{2k} m^2$, & l'équation de la courbe ſera du quatrième degré, ſavoir

$$g\sqrt{x^2+y^2} - \frac{f}{2k} y^2 - gm + \frac{f}{2k} m^2 = 0,$$

qui eſt conforme à celle que trouve, d'une manière bien différente, M.

M. l'abbé Boſſut, dans ſon traité théorique & expérimentale d'Hydrodynamique (*tom. Ier. page* 229, § 182); puiſqu'il ne s'agit que de ſubſtituer r à $\sqrt{x^2+y^2}$, & b à m. Il ſuit de-là que la preſſion qui s'exerce dans tous les ſens ſur un point quelconque C, eſt conſtamment

$$= g\left(m - \sqrt{a^2+b^2}\right) - \frac{f}{2k}\left(m^2 - b^2\right).$$

Mais ſans m'arrêter à parcourir, pour ce cas-ci, d'autres hypothèſes de P & de D, je paſſe à la réſolution du problème ſuivant.

PROBLÈME IV.

Réſoudre le même problème, en conſidérant la maſſe fluide dans ſon état réel; c'eſt-à-dire, avec ſes trois dimenſions.

8. Je ſuppoſe donc ici (*Fig. III.*) qu'une maſſe fluide gravite vers le point fixe F, & qu'elle ait en même tems un mouvement de rotation autour de l'axe FA, que je regarderai comme horizontal, ce qui eſt indifférent; & par ce même axe, je fais paſſer le plan FABE auſſi horizontal. Soit de plus, LFEO un plan vertical, qui coupe conſéquemment le précédent perpendiculairement en FE; & enfin, QPMO un ſecond plan horizontal, dont la ligne de rencontre avec le plan vertical eſt QO. Que FG $= x$, GR $= y$, RK $= z$ repréſentent les trois co-ordonnées de la ſurface cherchée qui paſſe par le point K. Je détermine, au moyen de FI $= a$, IN $= b$, NC $= c$, la poſition d'un point quelconque C de cette maſſe; &, de ce point C, j'imagine le petit canal fictif, ou la courbe quelconque fluide à double courbure CHK, dont CVD ſoit la projection horizontale ſur le plan QPMO; ſes trois co-ordonnées étant CW $= t$, WV $= u$, VH $= w$. Je

considère donc le petit élément placé en H sur cette courbe fluide, & HF sera la direction de l'attraction P qui anime cet élément. Du même point H, je mène, à l'axe de rotation AF, la perpendiculaire HS; & de plus HT horizontale & parallèle au même axe AF, * desorte que FSHT est un parallèlogramme rectangle, dans la position indiquée par la ligne HS. Cela posé, je décompose l'effet de l'attraction P selon HF, en deux autres vitesses; dont la première, selon HT, est $\frac{HT}{HF} P$; & la seconde, selon HS, est $\frac{HS}{HF} P$. D'un autre côté, l'effet de la force centrifuge de l'élément en H est $\frac{f}{k}$ HS; & comme cette force agit dans le sens SH, je la déduis de celle que l'attraction exerce dans le sens opposé HS; & il me reste HS $(\frac{P}{HF} - \frac{f}{k})$. Je décompose présentement de nouveau cette vitesse en deux autres; l'une selon HY, savoir, $\frac{HY}{HS} \cdot HS (\frac{P}{HF} - \frac{f}{k}) = HY (\frac{P}{HF} - \frac{f}{k})$; & l'autre selon $YS = YS (\frac{P}{HF} - \frac{f}{k})$. Il ne faut plus que conclure, de ces trois vitesses, celle qui en résulte dans le sens de l'élément de la courbe KHC.

Soient donc (*Fig. IV.*) Hp, Hq, Hn les trois vitesses données, selon les trois mêmes directions que dans la figure précédente; savoir,

$$Hp = HT \frac{P}{HF}, \ Hq = YS (\frac{P}{HF} - \frac{f}{k}), \ Hn = HY (\frac{P}{HF} - \frac{f}{k});$$

* On voit bien que la manière dont est placé ici HT, par rapport à AF à laquelle elle doit être parallèle, provient de la perspective, qui exige que deux lignes parallèles concourent en un point,

& Hr l'élément en H de la courbe à double courbure KHC. Au point H j'imagine le plan abec, fur lequel la direction Hr foit perpendiculaire. Ainfi toutes les perpendiculaires qu'on pourra élever fur la ligne Hr, à fon extrémité H, fe trouveront dans ce plan abec. De plus, il eft certain qu'on peut toujours faire paffer un plan, par cette ligne Hr & par chacune de celles Hp, Hq, Hn; lefquels plans, prolongés au-de-là de ces trois dernières lignes, iront néceffairement couper perpendiculairement celui abec; d'où il fuit que la viteffe donnée, par exemple, celle Hn; la direction Hr de la viteffe cherchée; & une direction perpendiculaire à cette dernière feront dans un même plan gHr. Ayant donc, du point n, mené la ligne no perpendiculaire à Hr, Ho fera la viteffe réfultante de celle Hn, dans la direction Hr : & on aura Hn : Ho = Hr : Hd. Or, en nommant s l'arc CH de la courbe CHK, on a Hr = ds, & Hd = dw. Donc enfin, la viteffe

$$Ho = \frac{Hd}{Hr} Hn = \frac{dw}{ds} HY \left(\frac{p}{HF} - \frac{f}{k}\right).$$

De même, abaiffant du point q, fur la direction Hr, la perpendiculaire qh, la viteffe Hq fera décompofée en deux autres viteffes; Hh qui eft celle demandée; & hq qui lui eft perpendiculaire. Et on aura, en tirant du point r la perpendiculaire ri fur Hq, Hq : Hh = Hr : Hi; c'eft-à-dire, la viteffe

$$Hh = \frac{Hi}{Hr} Hq = \frac{du}{ds} YS \left(\frac{p}{HF} - \frac{f}{k}\right).$$

Enfin par les mêmes raifonnemens, on conclura pour la troifième viteffe qui réfulte, dans le fens Hr, de celle Hp,

$$\frac{dt}{ds} HT \frac{p}{HF}.$$

Réuniffant donc ces trois viteffes, on aura, pour valeur de celle

dont feroit animé le petit élément en H, dans la direction de la courbe HC, (*Fig. III.*)

$$\left(\frac{dw}{ds}\,\mathrm{HY} + \frac{du}{ds}\,\mathrm{YS} + \frac{dt}{ds}\,\mathrm{HT}\right)\frac{P}{\mathrm{HF}} - \left(\frac{dw}{ds}\,\mathrm{HY} + \frac{du}{ds}\,\mathrm{YS}\right)\frac{f}{k}.$$

Ainfi, nommant D la denfité variable de cette molécule, multipliant la quantité précédente par Dds, & intégrant enfuite, en remarquant que $\mathrm{HY} = c + w$, $\mathrm{YS} = b + u$, $\mathrm{HT} = \mathrm{FS} = a + t$, & $\mathrm{HF} = \sqrt{(c+w)^2 + (b+u)^2 + (a+t)^2}$; on aura, pour valeur de la preffion qu'exerce, fur le point C, le fluide contenu dans le canal fictif CH, ... (A)

$$\int D\left(P\,\frac{(c+w)\,dw + (b+u)\,du + (a+t)\,dt}{\sqrt{(c+w)^2 + (b+u)^2 + (a+t)^2}} - \left([c+w]\,dw + [b+u]\,du\right)\frac{f}{k}\right)$$

$$= \int\left(DP \cdot d\sqrt{(c+w)^2 + (b+u)^2 + (a+t)^2} - D\,\frac{f}{2k}\,d\left[(c+w)^2 + (b+u)^2\right]\right).$$

9. Soit D conftante & $= 1$; P conftante & $= g$: la quantité précédente deviendra, en intégrant & fubftituant enfuite, afin de completter comme ci-deffus, z à $c+w$; y à $b+u$; & x à $a+t$,

$$g\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - \frac{f}{2k}\,(y^2 + z^2) + \text{conft.}$$

& comme toute cette quantité doit être conftante, non-obftant les variations de x, y & z, on aura, pour équation de la furface cherchée,

$$g\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - \frac{f}{2k}\,(y^2 + z^2) = \text{conft.}$$

Suppofant donc que, quand x & $y = 0$, $z = m$, on en conclura $\text{conft.} = gm - \frac{f}{2k}\,m^2$; ainfi

$$g\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - \frac{f}{2k}\,(y^2 + z^2) - gm + \frac{f}{2k}\,m^2 = 0,$$

& cette furface eft précifément la furface de révolution produite

par la courbe du problème III; ce qu'il étoit aifé de prévoir. Mais j'ai cru devoir faifir cette occafion d'appliquer ma méthode dans toute fon étendue, en confidérant la maffe fluide en équilibre, fous fes trois dimenfions.

10. Dans l'équation précédente, g repréfente la force de la gravitation vers le centre F, & k eft une quantité arbitraire que nous pouvons faire $= m$. Par-là f devient la force centrifuge d'une molécule placée à l'extrémité du rayon de l'équateur du fphéroïde. On a traité, dans tous ces calculs, la gravitation & la force centrifuge comme imprimant, au commencement de chaque inftant dt, un nouveau petit degré de viteffe uniforme; c'eft-à-dire, qu'on a calculé l'effet de ces deux forces dans la courbe polygone. * Il faudra donc avoir égard à cette confidération dans la détermination de la force centrifuge qui par-là, nommant t le tems qu'un mobile animé de la gravité g employe à tomber de la hauteur m, T celui que le fphéroïde met à faire une révolution entière, & Π le rapport de la circonférence au diamètre, deviendra $f = \frac{2\Pi^2 t^2}{T^2} g$: (*) ce qui change l'équation de la furface en

$$mT^2 \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - \Pi^2 t^2 (y^2 + z^2) - m^2 T^2 + m^2 \Pi^2 t^2 = 0.$$

11. Confidérons maintenant l'expreffion générale (A) art. 8. On voit qu'elle peut fe mettre fous la forme

$$\int D \left(Pd \cdot \mathrm{HF} - d \cdot \frac{f}{2k} \overline{\mathrm{HS}}^2 \right);$$

& fuppofant que P foit une fonction de HF feule, qui eft la diftance de la molécule au centre de gravitation (ce que j'ex-

---

* Voyez ci-deffus la note art. 2. (*) Voyez Hydrodyn. de M. l'abbé Boffut page 230 § 182.

prime par $P = g$ (HF) ; c'eſt-à-dire, $P = g$ multipliée par une certaine fonction déterminée de HF, où g eſt le module, ou ce qui meſure la force abſolue d'accélération) on aura

$$Pd \cdot \mathrm{HF} = g\,(\mathrm{HF})\,d \cdot \mathrm{HF} = gd \cdot [\mathrm{HF}].$$

Ainſi l'expreſſion précédente ſe change en

$$\int Dd\,(g[\mathrm{HF}] - \frac{f}{2k}\overline{\mathrm{HS}}^2).$$

De plus $\frac{f}{k}$HS eſt la force centrifuge du point H ; ainſi, nommant ϕ cette force, on aura $\int Dd\,(g\,[\mathrm{HF}] - \frac{\phi \cdot \mathrm{HS}}{2})$. Mais, en nommant ϑ le tems néceſſaire pour qu'un mobile animé de la gravité g deſcende de la hauteur HS, & laiſſant les autres dénominations comme ci-deſſus, on a $\frac{\phi}{2} = \frac{\Pi^2 \vartheta^2}{T^2} g$; ce qui transforme la dernière expreſſion en $\int Dgd\,([\mathrm{HF}] - \frac{\Pi^2 \vartheta^2}{T^2}\mathrm{HS})$ qui ſera toujours intégrable, pourvu que D ſoit fonction ſeulement de la quantité ſous le ſigne différentiel d. Et on aura alors, pour propriété du ſphéroïde cherché, qu'une certaine fonction donnée de cette quantité ſera conſtante ; ce qui ſe réduit toujours à

$$([\mathrm{HF}] - \frac{\Pi^2 \vartheta^2}{T^2}\mathrm{HS}) = \text{conſt.}$$

12. Il ſuit de-là que, lorſque la grandeur du ſphéroïde vient à varier par une augmentation de fluide, ſans que l'équilibre en ſoit troublé, cette variation ſe manifeſtera par celle de la conſtante, qu'il faut alors regarder comme variable, & conſéquemment, par celle de la quantité $([\mathrm{HF}] - \frac{\Pi^2 \vartheta^2}{T^2}\mathrm{HS})$ qui eſt égale à cette conſtante : & réciproquement, une variation dans cette quantité déſignera une variation dans la grandeur du ſphéroïde. Donc la denſité

D, qui eſt une fonction de cette même quantité ſeule, ne peut varier, ſans que la grandeur du ſphéroïde ne varie en même tems. Ce qui ſignifie que, lorſqu'un pareil ſphéroïde n'eſt point homogène, la variation de ſa denſité ne peut avoir lieu, que d'une couche de niveau à l'autre; chacune de ces couches étant, dans toute ſon étendue, parfaitement homogène.

Je ne m'arrêterai pas davantage à ces queſtions, qui ne ſont que de pure curioſité; l'hypothèſe qui leur ſert de baſe, n'étant nullement celle de la nature. La matière ne gravite point ainſi vers un point déterminé; mais chacun de ſes élémens eſt attiré par la totalité des molécules qui compoſent la maſſe dont il fait partie. La détermination de la figure de la terre, dans cette nouvelle hypothèſe, préſente des difficultés bien ſupérieures à celles que nous avons rencontrées juſqu'ici: mais je termine ici ce Mémoire, ne m'étant propoſé que d'appliquer au calcul, d'une manière plus directe & plus claire, le principe d'égalité de preſſion en tout ſens.

CINQUIÈME MÉMOIRE.

Sur différens sujets.

I.

Sur un des principes fondamentaux du calcul des variations.

On suppose dans le calcul des variations que, si une courbe est donnée par l'équation $y = \phi : x$, $\phi : x$ désignant une fonction quelconque déterminée de x, toute autre courbe infiniment peu différente de celle-ci, sera représentée par $y' = \phi : x'$, ou $y + \delta y = \phi : (x + \delta x)$. Ce principe peut se démontrer ainsi.

Soit $y = \phi : x$ l'équation d'une courbe entre les co-ordonnées x, y : il est clair que toute autre courbe pourra de même être représentée par l'équation $y' = F : x$, entre les mêmes co-ordonnées, où je marque d'un accent les nouvelles y ; $F : x$ désignant une autre fonction quelconque déterminée de x. Or, quelle que soit $F : x$, il existe toujours une quantité $x + \zeta$, telle que $F : x = \phi : (x + \zeta)$. En effet, en supposant cette égalité vraie, on en conclura

de ſa courſe. Si pluſieurs corps partant d'un même but, ſe trouvent, au même inſtant, à des diſtances différentes de ce but, nous eſtimons le mouvement de chacun de ces corps, par ſa diſtance. Ainſi, le rapport de deux mouvemens eſt le même que celui de ces diſtances, ou des eſpaces qui ont été parcourus par chacun des deux corps, depuis l'inſtant du départ, juſqu'à celui de l'obſervation.

Un mobile peut auſſi ſe mouvoir uniformément dans toute autre courbe, par exemple, dans le cercle. Nous avons un exemple de ce mouvement, dans la révolution de la terre ſur ſon axe. Et comme ce mouvement eſt déterminé, c'eſt par comparaiſon avec lui, qu'on évalue tous les autres mouvemens uniformes. Ainſi, pour définir le mouvement d'un corps, on dira : pendant que la terre a fait une telle partie de ſa révolution diurne ; ce corps a décrit tant de pieds : ou, le mouvement de ce corps eſt à celui de la terre, comme tant de pieds parcourus, ſont à telle partie de révolution diurne.

Nous pouvons ſubſtituer à ces révolutions & parties de révolution, ce qu'on appelle le tems, auquel elles ſervent de meſure. Ainſi, nous nommons *un jour, une heure*, *le tems* &c., une révolution, la 24^me^. partie d'une révolution, un nombre quelconque de révolutions & de parties de révolution &c. Nous pourrons donc dire que le mouvement d'un mobile eſt au mouvement de la terre, comme l'eſpace e décrit par le premier, eſt au tems employé à le décrire. Or le rapport du mouvement du mobile à celui de la terre, eſt ce que l'on doit nommer *viteſſe* de ce mobile ; ainſi $v = \frac{e}{t}$,

où v exprime la vîteffe ; e un certain nombre d'unités de mefure, par exemple de pieds ; & t un certain nombre d'unités de tems, par exemple, de fecondes.

Si nous fuppofons que $t = 1$, e fera l'efpace décrit par le mobile pendant une feconde ; & comme alors $v = e$, on peut dire que la vîteffe d'un mobile eft l'efpace qu'il décrit pendant une feconde ; & c'eft de cette manière affez naturelle, que plufieurs Géomètres l'ont définie : on dit même ordinairement, la vîteffe de ce corps eft de tant de pieds par feconde. Ainfi, fi un corps décrit l'efpace e pendant le tems t, fa vîteffe eft $v = \frac{e}{t}$; & s'il eft animé d'une vîteffe $\frac{e}{t}$, il décrira l'efpace e pendant le tems t. Il en eft de même, fi l'on ne confidère qu'un inftant infiniment petit dt ; on aura alors $v = \frac{de}{dt}$.

On conclut évidemment, de la formule $v = \frac{e}{t}$, que la vîteffe étant la même, les efpaces font toujours proportionnels aux tems employés à les parcourir.

Si un corps fe mouvant uniformément le long d'une ligne droite, cette ligne a elle-même un mouvement ; foit dans le même fens ; foit dans un fens oppofé à celui du corps, il eft clair que le mouvement du corps fera compofé de ces deux mouvemens, & que fa vîteffe totale fera la fomme ou la différence de fa vîteffe propre, & de celle de la ligne fur laquelle il fe meut. Ainfi, en regardant comme négatives les vîteffes en fens contraire, on peut dire qu'un corps animé d'une vîteffe $= (a + b + c +$ &c.$)$, eft la même chofe que le même corps animé de la vîteffe a, de la vîteffe b,

de la vîteſſe c, &c.; & qu'un corps qui, ſe mouvant avec une vîteſſe a, reçoit une nouvelle vîteſſe b, continnera dès cet inſtant de ſe mouvoir, comme s'il eût reçu tout de ſuite la vîteſſe $a + b$.

De ces augmentations & diminutions de vîteſſe naiſſent les mouvemens variés, dont la nature nous met continuellement des exemples ſous les yeux. Commençons par ceux dont la variation eſt uniforme; & ſuppoſons, pour abréger, que le mouvement eſt toujours accéléré; les mêmes raiſonnemens ayant lieu pour le mouvement retardé. Puiſque dans le mouvement uniformément accéléré, la vîteſſe croît à chaque inſtant, d'une quantité conſtante égale à la vîteſſe que reçoit le mobile au premier inſtant; ou, ce qui eſt la même choſe, puiſque la vîteſſe croît comme le tems, on aura à chaque inſtant, $v = mt$; m étant le module d'accélération, ou ce qui déſigne que la vîteſſe imprimée à chaque inſtant eſt plus ou moins grande. Or nous avons vu que v eſt auſſi $= \frac{de}{dt}$, donc $de = mtdt$, & $e = \frac{1}{2} mt^2$, en ſuppoſant que e & t deviennent en même tems $= 0$. Donc en général, 1°. dans le mouvement uniformément accéléré, les eſpaces parcourus ſont comme les quarrés des tems employés à les parcourir; & 2°. on conclura facilement que l'eſpace décrit d'un pareil mouvement, pendant un tems t, n'eſt que la moitié de celui qui eût été décrit uniformément, pendant le même tems, avec la vîteſſe acquiſe à la fin de t.

Ces deux principes établis, paſſons aux mouvemens variés d'une manière quelconque. Soit (*Fig. I.*) PQ $= e$ l'eſpace décrit d'un mouvement quelconque pendant le tems t. Pendant l'inſtant ſuivant dt, le mobile parcourra QR $= de$. Or QR eſt évidemment

composé d'une partie Qq décrite uniformément en vertu de la vîteſſe avec laquelle ce mobile arrive au point Q, & d'une autre partie q R décrite d'un mouvement accéléré, en vertu de l'augmentation de vîteſſe qu'il continue de recevoir ſans interruption : accélération qu'on peut regarder comme uniforme pendant un inſtant. Ainſi, déſignant par ϕ le module variable d'accélération qui n'eſt conſtant que pendant l'inſtant dt, * on aura, par le premier principe, $qR = \frac{1}{2} \phi dt^2$. De plus, l'inſtant égal ſuivant le mobile décrira $RS = de + d^2e$ qui eſt compoſé, d'une partie décrite uniformément $Rr = Qq$; d'une autre partie décrite de la même manière $r\rho = 2\,qR$ (par le ſecond principe) ; & enfin d'une troiſième partie ρS décrite d'un mouvement uniformément accéléré & $= qR$, puiſque le module d'accélération peut être cenſé le même pour deux inſtans conſécutifs. Ainſi $RS = Qq + 2\,qR + qR = de + 2\,qR$, ou $de + d^2e = de + \phi\, dt^2$; d'où $d^2e = \phi\, dt^2$.

Cette manière de conſidérer le mouvement varié, eſt celle qu'on appelle *dans la courbe rigoureuſe* ; & en voici la raiſon. Soit (*Fig. II.*) Q'R'S une courbe quelconque, dont les abſciſſes AP repréſentent le tems ; & les ordonnées PQ', l'eſpace e décrit pendant ce tems t. On ſait qu'on peut *rigoureuſement* concevoir toute courbe, comme un ſuite de petits arcs de cercle, dont chacun a, pour rayon, le rayon de développée qui lui eſt perpendiculaire. Ainſi Q'R' eſt un petit arc de cercle : & menant au point Q' la tangente Q'q, elle diviſera l'incrément de l'eſpace, pendant

* Ou ſelon Bézout, la vîteſſe que la cauſe accélératrice feroit naître dans le mobile pendant l'unité de tems, ſi pendant cette unité elle agiſſoit comme cauſe accélératrice conſtante.

l'inftant fuivant, en deux parties Qq, qR' analogues à celles ci-deffus défignées par les mêmes lettres ; c'est-à-dire, que Qq exprimera la partie décrite d'un mouvement uniforme avec la vîteffe en Q' ; & qR', celle décrite d'un mouvement accéléré. Menant pareillement une tangente R'ρ à l'autre extrémité R' du même petit arc ; & du même point, la parallèle R'r à Q'u, on diftinguera, dans l'incrément RS du fecond inftant égal au premier, comme nous avons fait ci-deffus, les trois parties Rr, rρ & ρS. La première eft évidemment égale à Qq ; la feconde rρ = 2 qR', puifque le prolongement de la tangente R'ρ rencontre celle Q'u en un point o, & qu'il eft aifé de démontrer qu'à caufe de l'arc infiniment petit Q'R', R'ρ = 2R'o ; & enfin, la troifième ρS = qR', parceque l'arc fuivant R'S diffère infiniment peu du précédent.

Mais on peut également calculer ce mouvement *dans la courbe polygone*. Pour cela, ayant par les points Q', R', S tiré les droites Q'R, R'S, comme on le voit (*Fig. III.*), on fait que dans cette dernière qR' eft double de ce qu'elle étoit dans la *Fig. II.* (*Voyez Dynam. de d'Alemb. chap. Ier.*), & conféquemment on a ici qR' = $\phi\, dt^2$. D'ailleurs comme, à caufe de Q'R' qui eft une petite ligne droite, le mouvement pendant chaque inftant Q'Q (= dt) eft uniforme, on aura, pour la vîteffe avec laquelle cet efpace qR' est décrit, $\frac{\phi\, dt^2}{dt}$ ou $\phi\, dt$ qui eft précifément celle que la caufe accélératrice feroit naître par degréz dans le mobile pendant le cours de l'inftant dt. Ainfi du, qui eft l'augmentation fubite de vîteffe à la fin du tems t ou au commencement de l'inftant dt, fera $du = \phi\, dt$, quoique cette vîteffe ne foit *rigoureufement* acquife qu'après l'expiration de ce même inftant. On dira

donc ici : le petit efpace QR (*Fig. I.*) $= de$ eft compofé de deux parties Qq, qR décrites toutes deux uniformément, dont la dernière, qui eft l'effet de l'accélération, eft $= \phi\, dt^2$. De plus, RS $= de + d^2e$ l'eft de même de trois parties Rr, rρ & ρS auffi décrites uniformément, les deux premières étant la continuation uniforme de QR ; c'eft-à-dire, que Rρ = QR, & ρS = qR. Ainfi $de + d^2e = de + \phi\, dt^2$ & $d^2e = \phi\, dt^2$ comme dans le premier cas.

L'incrément du de la vîteffe, dans la courbe rigoureufe, n'étant relatif qu'à la fin de l'inftant dt, ce n'eft que dans la courbe polygone que l'équation $du = \phi\, dt$ pourra fe rapporter au commencement de cet inftant. Le plus fouvent le module d'accélération ϕ & par conféquent la vîteffe du font donnés immédiatement par une fonction des co-ordonnées. Quelquefois auffi il faut déterminer ϕ d'après la connoiffance de l'efpace qu'il feroit parcourir au mobile pendant l'inftant dt : tel eft le cas de la force centrifuge produite par le mouvement même d'un corps qui décrit une courbe. On éliminera alors ϕ au moyen de l'équation $\phi\, dt^2 = d^2e$, & on aura $du = \frac{d^2e}{dt}$, formule indépendante de toute diftinction entre les courbes rigoureufe & polygone ; puifque d^2e eft la différence feconde de e par les règles ordinaires de la différentiation. En effet, dans la courbe rigoureufe le petit efpace qR $= \frac{1}{2} d^2e$ étant décrit d'un mouvement uniformément accéléré, la vîteffe à la fin du tems dt feroit $= \frac{2qR}{dt} = \frac{d^2e}{dt}$; dans la courbe polygone au contraire, qR $= d^2e$; mais ce petit efpace étant décrit d'un mouvement uniforme, la vîteffe dès le commencement de l'inftant [illegible]

III.

Sur le facteur propre à faire disparoître les radicaux d'une fonction irrationnelle donnée.

Il est quelquefois avantageux de savoir rendre rationnelle un polynome compliqué de radicaux, en le multipliant par un facteur. Voici un méthode très-simple pour y parvenir.

Soit en général $\sqrt[m]{p} + \sqrt[n]{q} + \sqrt[g]{r} +$ &c. Je commence par supposer cette quantité $=0$; & je fais disparoître, de cette équation, les radicaux, ce qui est toujours possible. L'équation rationnelle résultante ne contiendra que p, q, r &c., & leurs puissances. Je ferai $\sqrt[m]{p} = P$, $\sqrt[n]{q} = Q$, $\sqrt[g]{r} = R$ &c., & je mettrai, dans cette équation rationnelle, P^m pour p, Q^n pour q, &c. Cette nouvelle équation, que je nomme A, sera encore rationnelle ; mais le polynome proposé le sera aussi, étant devenu $P + Q + R +$ &c. qui soit $=$ B. Il ne faudra donc, pour avoir son facteur, que diviser A par B ; sans ces transformations, la division seroit impraticable.

Soit, par exemple, $\sqrt{y} + \sqrt{(x+y)} + \sqrt{x}$. Pour avoir un facteur qui rende cette quantité rationnelle, je suppose $\sqrt{y} = \sqrt{p}$; $\sqrt{(x+y)} = \sqrt{q}$; $\sqrt{x} = \sqrt{r}$; j'ai donc $\sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r} = 0$, ou ôtant les radicaux, $4pq = (r - p - q)^2$. Soit $\sqrt{p} = P$, $\sqrt{q} = Q$, $\sqrt{r} = R$; d'où $p = P^2$, $q = Q^2$, $r = R^2$. J'aurai

$$4P^2Q^2 = (R^2 - P^2 - Q^2)^2, \text{ ou}$$

$R^4 - 2$

$$R^4 - 2(P^2 + Q^2)R^2 + (P^2 - Q^2)^2 = 0,$$

qui, divisée par $R + P + Q$, donne

$$R^3 - (P + Q)R^2 - (P - Q)^2 R + (P - Q)^2 (P + Q), \text{ ou}$$

$$([P - Q]^2 - R^2)(P + Q - R).$$

Mettant donc, au lieu de P, Q, R, leurs valeurs $\sqrt{y}$, $\sqrt{(x+y)}$, $\sqrt{x}$, on aura, pour le facteur cherché,

$$2\sqrt{(xy)}\sqrt{(x+y)} - 2x\sqrt{y} - 2y\sqrt{x},$$

qui, multiplié par $\sqrt{y} + \sqrt{(x+y)} + \sqrt{x}$, donne un produit $= -4xy$.

On voit aussi que l'opération est toujours la même, quelles que soient les quantités rationnelles sous les radicaux. Elle ne varie que par rapport au nombre & aux exposans de ces signes.

On réussiroit de même, si p, q, &c. étoient elles-mêmes irrationnelles; comme si on avoit la quantité $\sqrt{(a + \sqrt{bx})} - \sqrt{a - y}$, qu'on voulut rendre rationnelle. On feroit encore $\sqrt{(a + \sqrt{bx})} = P$, $-\sqrt{a - y} = Q$; & ôtant les radicaux, & substituant ces valeurs, on auroit $P^4 - 2aP^2 + 2aQ^2 - Q^4$ qui, divisée par $P + Q$, donne pour quotient,

$$P^3 - P^2Q + (Q^2 - 2a)P + 2aQ - Q^3;$$

c'est-à-dire, en remettant pour P & Q leurs valeurs, que le facteur propre à rendre $\sqrt{(a + \sqrt{bx})} - \sqrt{a - y}$ rationnelle, est

$$(\sqrt{bx} - y)(\sqrt{(a + \sqrt{bx})} + \sqrt{a - y});$$

le produit de ces deux quantités étant $bx - y^2$.

IV.

Sur une nouvelle manière de se servir du levier, pour élever un poids.

ETant donné un levier AD (*Fig. IV.*), dont le point d'appui est en C, si on prend une partie CG = CA, & qu'aux deux points A, G, on fixe les extrémités d'une corde AQG, le long de laquelle puisse couler librement une poulie Q chargée du poids P, on demande les loix de l'équilibre, quelle que soit la position du levier.

J'observe dabord que la condition de l'équilibre exige que l'angle AQG soit partagé, en deux également, par la verticale QB. Maintenant, il est facile de démontrer que tout se passera alors, comme si le poids P étoit suspendu fixément au point B. Il suffit pour cela, que B soit le centre de gravité des efforts verticaux qui se font en G & A. Or, en vertu de ce que je viens de dire, les deux efforts selon AQ & GQ sont égaux entr'eux; représentons-les par Gg & Aa. On a Gg : Gh = GQ : BQ; & Aa : Ab = AQ : BQ; donc, à cause de Aa = Gg, Ab : Gh = GQ : AQ. De plus, à cause de l'angle GQA partagé en deux également par QB, GQ : AQ = GB : BA; donc, Ab : Gh = BG : BA; donc &c.

Cela posé, soit $AG = 2a$, $AQG = 2b$, $GD = p$, $AQ = u$, $GQ = 2b - u$, & ϵ l'angle DAF qui détermine l'inclinaison du levier, par rapport à l'horizontale AF. On trouvera facilement l'équation

$$u = b \pm \frac{ab \text{ fin. } \beta}{\sqrt{(b^2 - a^2 \text{ cof. } \beta^2)}};$$

c'eſt-à-dire,

$$AQ = b - \frac{ab \text{ fin. } \beta}{\sqrt{(b^2 - a^2 \text{ cof. } \beta^2)}}, \text{ \& } GQ = b + \frac{ab \text{ fin. } b}{\sqrt{(b^2 - a^2 \text{ cof. } \beta^2)}}.$$

Or, $GQ + QA : GA = GQ : GB$, donc

$$GB = a + \frac{a^2 \text{ fin. } \beta}{\sqrt{(b^2 - a^2 \text{ cof. } \beta^2)}} \text{ \& } CB = \frac{a^2 \text{ fin. } \beta}{\sqrt{(b^2 - a^2 \text{ cof. } \beta^2)}}.$$

De plus, $CB : CM = 1 \text{ cof. } \beta$, donc

$$CM = \frac{a^2 \text{ fin. } \beta \text{ cof. } \beta}{\sqrt{(b^2 - a^2 \text{ cof. } \beta^2)}}.$$

Ainſi la force néceſſaire, pour ſoutenir le poids P en équilibre, eſt

$$\frac{a^2 P \text{ fin. } \beta \text{ cof. } \beta}{(a+p)\sqrt{(b^2 - a^2 \text{ cof. } \beta^2)}}.$$

CM devient $= 0$, lorſque ſin. β, ou cof. $\beta = 0$; c'eſt-à-dire, lorſque le levier eſt dans une ſituation horizontale, ou verticale. Il y a donc une certaine inclinaiſon qui rend CM un *maximum*, & il eſt facile de trouver que c'eſt lorſque $a^2 \text{ cof. } \beta^2 = b^2 - b\sqrt{(b^2 - a^2)}$. Alors CM devient

$$= \frac{\sqrt{a^2 - b^2 + b\sqrt{(b^2 - a^2)}}\ \sqrt{b^2 - b\sqrt{(b^2 - a^2)}}}{\sqrt{(b\sqrt{b^2 - a^2})}} = b - \sqrt{(b^2 - a^2)},$$

& c'eſt là l'expreſſion de CM, ſous l'inclinaiſon du levier où la force doit être la plus grande. Cette force ſera donc alors

$$\frac{P \cdot CM}{a+p} = \frac{P}{a+p}\left(b - \sqrt{(b^2 - a^2)}\right);$$

& on voit que, P, a, p étant conſtans, cette plus grande force eſt d'autant moindre, que la corde eſt plus longue.

Si le levier eſt dans une ſituation verticale; le point G s'étant élevé, juſqu'à ce que ſin. $\beta = 1$ & cof. $\beta = 0$, on aura $GQ = b + \frac{ab}{b} = b + a$; & GQ ſera confondue avec GA, dans la verticale

même QM. Donc la diſtance verticale, du point d'appui C au point le plus bas Q, ſera alors $= b$. Maintenant, ſi on ſuppoſe que le levier paſſe à une ſituation horizontale, AQ = QG ſera $= b$, & la verticale QM tombera en C perpendiculairement ſur AG. On aura donc cette verticale $QC = \sqrt{(b^2 - a^2)}$. Ainſi, la hauteur dont le poids s'élèvera, pendant que le levier paſſera de la ſituation verticale, à celle horizontale, ſera $= b - \sqrt{(b^2 - a^2)}$, qui eſt préciſément la plus grande valeur de CM.

V.

Solution algébrique d'un problème de Géométrie élémentaire.

ON demande la courbe AMN (*Fig. V.*) telle que, menant une ligne ME qui la coupe aux deux points M, E, & de ces deux points, menant à un troiſième quelconque, les deux lignes MN, EN, la ſomme des angles en M & E, ou ce qui revient au même, l'angle MNE ſoit conſtamment le même, tant que M & E reſtent fixes; cette propriété ayant également lieu, pour toutes les lignes tirées parallèlement à ME?

Soit l'axe DK perpendiculaire ſur la ligne ME prolongée en F; $DF = x$, $DH = X$, $FM = y$, $FE = y'$, $HN = Y$, $EM = y - y'$. On trouvera facilement que

$$cof.\ MNE = \frac{\overline{MN}^2 + \overline{NE}^2 - \overline{ME}^2}{2MN \cdot NE} = \frac{2(X-x)^2 + (Y-y)^2 + (Y-y')^2 - (y-y')^2}{2\sqrt{(X-x)^2+(Y-y)^2}\sqrt{(X-x)^2-(Y-y')^2}}.$$

Or, par hypothèſe, cette quantité ne varie pas, quoique X & Y varient; elle doit donc ſe réduire à une fonction de x, y, y',

qui seules doivent y influer par leurs variations. Supposons que le point N, qui est un des points de cette courbe, soit tel, que DH $= X = a$, HN $= Y = b$. On aura, pour ce point, la valeur du cosinus

$$= \frac{2(a-x)^2+(b-y)^2+(b-y')^2-(y-y')^2}{2\sqrt{(a-x)^2+(b-y)^2}\sqrt{(a-x)^2+(b-y')^2}},$$

qui est la fonction à laquelle la formule ci-dessus doit toujours être égale, quels que soient X & Y dans cette courbe. Je conclus de-là

$$\frac{(X-x)^2+(Y-y)(Y-y')}{\sqrt{(X-x)^2+(Y-y)^2}\sqrt{(X-x)^2+(Y-y')^2}} = \frac{(a-x)^2+(b-y)(b-y')}{\sqrt{(a-x)^2+(b-y)^2}\sqrt{(a-x)^2+(b-y')^2}}$$

Soit $X - x = A$, $Y - y = B$, $Y - y' = B'$, $a - x = C$, $b - y = E$, $b - y' = E'$, on aura

$$\frac{A^2+BB'}{\sqrt{(A^2+B^2)}\sqrt{(A^2+B'^2)}} = \frac{C^2+EE'}{\sqrt{(C^2+E^2)}\sqrt{(C^2+E'^2)}}.$$

Otant les radicaux, & réduisant ensuite, on peut mettre cette équation sous la forme suivante

$$(y-y')^2\left(A^2C^4 - C^2\left(\overline{A^2+BB'}^2 - 2A^2EE'\right) + A^2E^2E'^2\right) = 0,$$

d'où $y - y' = 0$ qui est évident; &

$$C^2(A^2+BB')^2 - A^2(C^2+EE')^2 = 0, \text{ ou}$$

$$C(A^2+BB') = \pm A(C^2+EE').$$

Cette équation doit avoir constamment lieu, quels que soient x, y, y'; pourvu que les valeurs qu'on leur supposera, appartiennent réellement à la courbe cherchée. Or, les points E, M sont donnés : Supposons-les tels que FE $= y' = h$; FM $= y = l$; DF $= x = g$. Il faudra que l'équation reste vraie, en substituant

eurs; & comme elle doit être une, pour toute la courbe, la vraie équation entre X & Y, ou entre x & y, & [évid]emment celle de la courbe cherchée. La racine positive donne

$(a-g)X^2 + (a-g)Y^2 + (g^2 - a^2 - b^2 + bl + bh - hl)X - (a-g)(l+h)Y + ahl - ag^2 + a^2g + b^2g - blg - bhg = 0$;

& la racine négative,

$(a-g)X^2 + (a-g)Y^2 + (3g^2 - 4ag + a^2 + b^2 - bl - bh + hl)X - (a-g)(l+h)Y + 3ag^2 - 2g^3 + ahl - 2ghl - a^2g - b^2g + blg + bhg = 0$.

En transportant l'axe des x, au milieu des deux points donnés E, M; ce qui exige seulement que $h = -l$, ou $h + l = 0$; la racine positive devient, en fesant de plus $a - g = p = \text{FH}$,

$pX^2 + pY^2 + (h^2 - b^2 - p^2 - 2pg)X + p^2g + pg^2 + b^2g - ph^2 - gh^2 = 0$.

Portons l'origine des X au centre de la courbe, en fesant disparoître le coëfficient de X; on aura $g = \frac{h^2 - b^2 - p^2}{2p}$, d'où

$$pX^2 + pY^2 - \frac{4p^2h^2 + (h^2 - b^2 - p^2)^2}{4p} = 0,$$

ou enfin

$$X^2 + Y^2 = \frac{4p^2h^2 + (h^2 - b^2 - p^2)^2}{4p^2},$$

qui est à un cercle, dont l'origine des co-ordonnées est au centre, & dont le rayon $= \frac{\sqrt{4p^2h^2 + (h^2 - b^2 - p^2)^2}}{2p}$.

Il ne s'agit donc, pour résoudre ce problème, que de faire passer un cercle par les trois points donnés E, M, N; & en effet,

si, étant donnés ler trois points E, M, N, on partage ME en deux également au point r, & qu'ayant mené la ligne uo, on divise MN en deux parties égales, pour élever sur son milieu une perpendiculaire qui rencontre uo en C, on trouvera la même expression pour la distance de ce point de rencontre C, à un quelconque des trois points donnés; & par conséquent, pour le rayon du cercle qui passe par ces trois points.

En fesant les mêmes opérations sur la racine négative, on aura

$$X^2 + Y^2 = \frac{4p^2h^2 + (b^2 + p^2 - h^2)^2}{4p^2}$$

qui est la même chose; ces deux équations étant comprises dans la double formule

$$X^2 + Y^2 = h^2 + \frac{[\pm(h^2 - (b^2 + p^2))]^2}{4p^2}.$$

VI.

Sur la résistance que nous éprouvons de la part des corps pesants.

L'Objet de cet article est entièrement élémentaire; & comme tel, il m'a paru mériter d'autant plus de considération, qu'il n'en est fait mention dans aucun livre d'élémens. Lorsqu'un corps pesant repose sur un plan inébranlable, tous deux étant parfaitement durs, à chaque instant la pesanteur lui imprime une vitesse infiniment petite: & la force qui en résulte, est aussi-tôt détruite par la réaction du plan. Il suit de-là que la pression du corps sur

le plan est à chaque instant la même & infiniment petite. Cependant, l'expérience journalière nous apprend, que lorsque nous voulons soulever un fardeau, ou seulement le soutenir en l'air, nous éprouvons une résistance très-considérable, & même le plus souvent au-dessus de nos forces. Il s'agit donc de concilier cette expérience, qui nous atteste une pression finie, avec les principes reçus qui démontrent que cette pression est infiniment petite.

Pour cela, remarquons que, conformément aux loix de la communication du mouvement, quelque petits que soient & le corps choquant (ou entrainant) & la vitesse dont il est animé; & en même tems, quelque grand que soit le corps choqué (ou entraîné), il en résulte toujours une certaine vitesse commune à ces deux corps, tant que ce dernier n'est point un obstacle *inébranlable*. Or, de quelque manière que nous supportions un fardeau, jamais nous n'opposons un pareil obstacle à l'effet de la pesanteur. Le fardeau ne fait donc que partager au premier instant, avec le membre qui le soutient, le petit degré de vitesse que lui imprime la pesanteur; desorte qu'il en conserve une partie. Il en est de même du second, du troisième & en général de tous les instans suivans; &, au moindre tems fini, le fardeau a acquis & communiqué au membre qui le soutient, une vitesse finie. Il faudroit donc, pour le soutenir en repos, rétablir l'équilibre, en imprimant à ce fardeau, & au membre qui le soutient, une vitesse égale & dans le sens opposé, ce qui exige un effort fini.

La rapidité de cette accélération n'a rien de surprenant; puisqu'on sait qu'au bout d'une seconde de tems, un corps abandonné à la seule pesanteur, a acquis une vitesse capable de lui faire parcourir

corps quelconque, par exemple un prisme, fixé par une de ses extrémités à un obstacle inébranlable, & parfaitement dur. Ce prisme, opposant à sa rupture une résistance finie, ne pourra jamais, selon ce que nous venons de dire, être rompu par l'action de la pesanteur, qui est à chaque instant infiniment petite, & aussi-tôt détruite qu'imprimée : cependant, nous voyons tous les jours arriver le contraire. On en appercevra facilement la raison, si on fait attention que nous supposons ici les corps parfaitement durs, & qu'il n'existe pas de pareils corps dans la nature. Lorsqu'on suppose les corps compressibles & extensibles, l'effet de la pesanteur n'est pas détruit à chaque instant. Il se modifie seulement, par la compression & l'extension qu'il fait subir au prisme; mais cela n'empêche pas que la vîtesse imprimée ne s'accélère; & tout se passe, à l'égard du corps élastique, comme à l'égard de nos membres. Ainsi, toutes les fois qu'un prisme, d'une épaisseur & d'une longueur quelconques, étant fixé par une de ses extrémités, viendra à se rompre par l'effet seul de la pesanteur, on peut en conclure que ce prisme est d'une matière élastique.

FIN.

Planche 1.

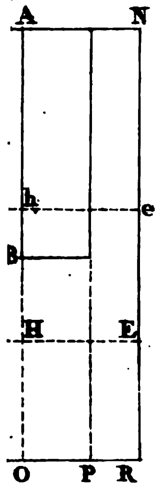


Fig:4

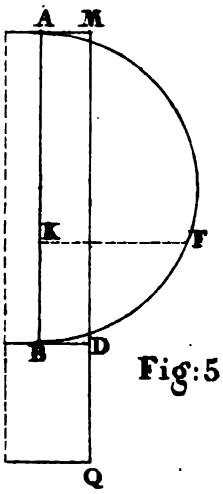


Fig:5

Fig:6

MÉMOIRE 3eme.

MOIRE 4eme.

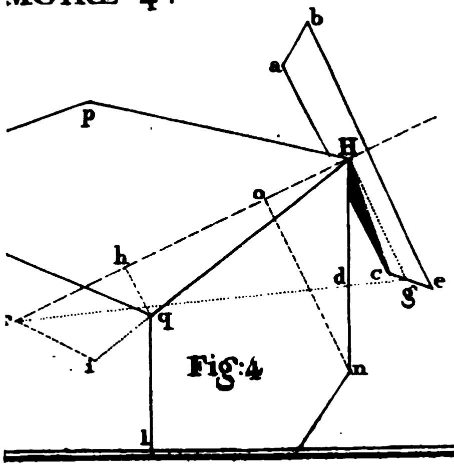
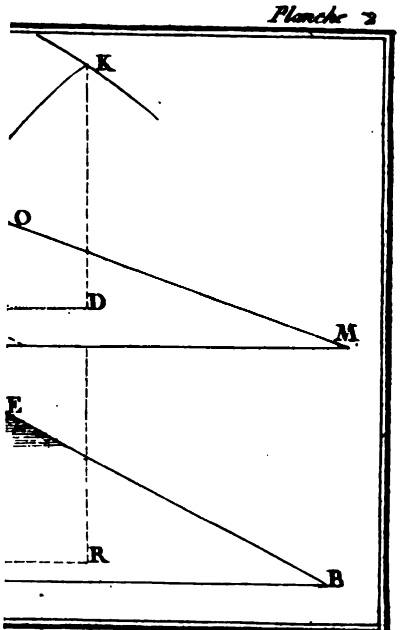


Fig:4



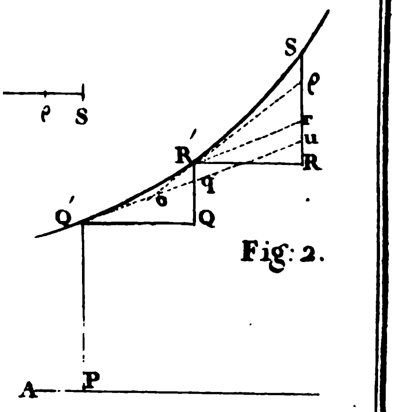


Fig: 2.

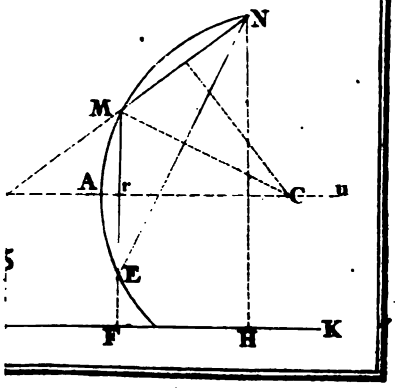


TABLE.

AVant-Propos.

MÉMOIRE PREMIER.

Recherches sur l'intégration des équations aux différences partielles, qui admettent une intégration de l'ordre immédiatement inférieur.

CHAPITRE PREMIER.

Des équations du premier ordre & du premier degré, entre trois variables z, x, y. 1

CHAPITRE SECOND.

Des équations du premier ordre & d'un degré quelconque, entre trois variables z, x, y. 18

CHAPITRE TROISIEME.

Des équations du premier ordre & du premier degré, entre quatre variables z, u, x, y. 35

CHAPITRE QUATRIEME.

Des équations du second ordre & du premier degré, entre trois variables. 60

TABLE.

CHAPITRE CINQUIEME.

Des équations du troisieme ordre & des ordres supérieurs, entre trois variables. 87

CHAPITRE SIXIEME.

Des équations plus compliquées du second-ordre, qui admettent une intégration de l'ordre immédiatement inférieur. 99

CHAPITRE SEPTIEME.

Des mêmes équations du troisième ordre. 129

CHAPITRE HUITIEME.

Recherches ultérieures sur l'équation générale du second ordre (§ 56). 149

CHAPITRE NEUVIEME.

Des équations à trois variables z, x, y, *d'un ordre & d'un degré quelconques.* 196

Tableau récapitulatif. 204

MEMOIRE SECOND.

1°. *Sur le lieu & l'intégration des équations différentielles à trois variables, qui ne sont point intégrables dans le sens ordinaire;*

2°. *Sur une méthode d'intégration, appliquée au cas de deux pareilles équations d'un ordre quelconque, avec des réflexions sur le cas général de* n *équations entre* n + 1 *variables.* 211

TABLE.

MEMOIRE TROISIEME.

Sur le mouvement du fluide qui s'échappe d'un tuyau cylindrique entretenu constamment plein. 231

MEMOIRE QUATRIEME.

Sur une nouvelle manière de traduire en langue algébrique le principe d'égalité de pression, & d'en déduire toutes les loix de l'hydrostatique, & spécialement la figure de la terre. 249

MEMOIRE CINQUIEME.

Sur différens sujets.

I. Sur un des principes fondamentaux du calcul des variations. 264

II. Sur le mouvement simple. 265

III. Sur le facteur propre à faire disparoître les radicaux d'une fonction irrationnelle donnée. 272

IV. Sur une nouvelle manière de se servir du levier, pour élever un poids. 274

V. Solution algébrique d'un problème de géométrie élémentaire. 276

VI. Sur la résistance que nous éprouvons de la part des corps pesans. 279

Fin de la Table.

APPROBATION.

L'ACADÉMIE Impériale et Royale des Sciences et Belles-Lettres de Bruxelles, ayant nommé MM. les Abbés CHEVALIER et MANN, et le Conseiller BURTIN pour examiner un ouvrage intitulé : *Mélanges Mathématiques*, ou *Mémoires sur différens objets de Mathématiques, tant pures qu'appliquées, par* CH. FR. LE PREUD'HOMME-D'HAILLY, *des Vicomtes de* NIEUPORT, *Belge*, *Commandeur de l'Ordre de Malthe*, *et Membre de cette Académie : Premier Recueil contenant deux planches*, a trouvé, d'après le rapport de ces Commissaires, que cet ouvrage ne contient rien qui doive en empêcher l'impression sous l'approbation et privilège de l'Académie, qu'elle accorde à l'Auteur pour cet effet.

Fait à Bruxelles, sous le cachet de ladite Académie, le 17 Mars 1794.

Signé L'ABBÉ MANN Secrétaire perpétuel.

ERRATA.

Page.	Ligne.	
2	antepénult.	*Q lisez* Q.
5	12	ou *lisez* où.
8	pénult.	*c lisez C.*
11	19	a *lisez* à.
13	12	qui devroient &c. *lisez* qui doivent former les deux équations de tâtonnement, s'entredétruisent dans la proposée.
17	1 et 3	$F:[\Pi, \Psi]$ *lisez* $F:(\Pi, \Psi)$. *Je fais cette remarque parce que je me sers ordinairement de cette différence de notation pour désigner des fonctions différentes ; ce qui n'a pas lieu ici, où la fonction reste la même.*
18	antepénult.	d'équation *lisez* d'équations.
24	11	$ydx - xdy$ *lisez* $ydx + xdy$.
	13	$x + 2y$ *lisez* $x - 2y$.
30	7	$A \frac{dz}{dx} + C$ *lisez* $A \frac{dz}{dy} + C$
	19	$2 ° zxy$ *lisez* $2 ϐ zxy^2$.
34	pénult.	$- 3p4$ *lisez* $- 3p^4$.
53	pénult.	feroit *lisez* feroit.
73	dern.	*apres* fondamentale *mettez une virgule.*
74	1	*après l'équation mettez une virgule.*
76	8	déterminée de $\frac{x}{y} z$ *lisez* indéterminée de $\frac{x}{y}$ & z.
78	1	variables xy *lisez* variables x, y.
80	14	*tous les* ψ *doivent être* Ψ *aussi-bien que dans les pages* 81 *et* 82;
	17	$= f:⁊$ *lisez* $+ f:⁊$.
	18	$f:⁊$ *lisez* $f':⁊$.
81	16	entre $\Psi' = \lambda'\phi:\omega + \mu f:\omega$ *et la ligne suivante ajoutez* qui, en divisant par μ, appartient à la forme $\Pi = \ni\phi:\omega + f:\omega$.
85	16	*après* résultera *ajoutez* . . . . . (Æ)
114	2	variable *lisez* variables.
115	7	Eu *lisez* En.
119	1	à un une *effacez* un.
223	13	ou dz & dy *lisez* ou dy & dx.
272	3	rationnelle *lisez* rationnel.
274	14	AQ & GQ *lisez* GQ & AQ.

AVIS AU RELIEUR.

Les deux planches doivent être placées entre la page 282 et la Table des matières, de manière qu'étant étendues, toutes les figures en débordent le livre, et se montrent au lecteur.

MÉLANGES
MATHÉMATIQUES.

MÉLANGES

MATHÉMATIQUES,

OU

MÉMOIRES sur différens sujets de MATHÉMATIQUES tant pures qu'appliquées.

SECOND RECUEIL

CONTENANT UNE PLANCHE.

Non æs aut marmor neque Martis dira trophæa,
Non ferro populatæ urbes gentesve subactæ
Sint mihi damnosæ monumentum flebile vitæ.
Tu quondam innocui potius nec desidis otî,
Tu mihi testis eris liber, à te sera nepotum
Progenies musis olim me discat amicum
Vixisse, et placidæ vitam impendisse Mathesi.

A BRUXELLES,

De l'Imprimerie de M. LEMAIRE.

AN VII. = 1799.

AVANT-PROPOS.

LA plus grande partie de ce fecond recueil eft encore confacrée à l'intégration des équations aux différences partielles. L'importance & la difficulté du fujet juftifieront affez la confiance avec laquelle je me fuis livré à ces recherches, arides en apparence, mais en effet bien attrayantes pour l'analyfte qui, ne fe bornant point à employer l'algèbre comme un moyen prompt de folution, fe plait encore à éclairer fa marche ténébreufe, & à obferver la foupleffe admirable avec laquelle elle fait fe frayer une route à travers les obftacles les plus multipliés.

Le premier mémoire n'eft que la continuation de celui du recueil précédent. Il contient trois chapitres, dont le premier, qui eft le dixième du mémoire entier, préfente des recherches fur l'équation du troifième ordre entre trois variables, prife dans toute fa généralité. J'y fuis la même marche que dans le huitième chapitre. Ayant d'abord examiné en peu de mots le cas où cette équation fe réduit aux termes dans lefquels les différences partielles du troifième ordre font multipliées entr'elles deux à deux, je paffe à celui où le terme fans ces mêmes différences eft feul zéro; & je donne une méthode générale d'intégration pour toutes les

équations qui s'y rapportent. Je confidère enfuite cette même équation dans toute fa généralité, de la même manière que j'ai confidéré celle du fecond ordre. La complication des calculs croît avec une rapidité étonnante; mais on retrouve toujours dans les réfultats l'analogie la plus fatisfaifante.

Dans le fecond chapitre, qui eft le onzième du mémoire entier, j'expofe fous un nouveau jour & d'une manière uniforme, l'intégration générale des équations à trois variables du premier degré & d'un ordre quelconque fupérieur au premier. Cette méthode beaucoup plus fimple que les précédentes, mais fondée fur les mêmes principes, embraffe toutes les équations comprifes dans cette définition. Je la difcute jufqu'au quatrième ordre, parce que ce n'eft qu'à ce terme qu'on apperçoit bien diftinctement le développement de tous fes moyens dans les ordres fupérieurs. J'y enfeigne auffi une nouvelle méthode pour approprier à un fyftème entier l'intégrale partielle que fournit une quelconque des équations qui compofent ce fyftème : méthode qui s'étend généralement à tous les cas fans exception.

Enfin dans le dernier ou douzième de ces chapitres, je m'occupe des équations fimples du fecond ordre entre quatre variables. On y trouvera tous les détails analogues à ceux que j'ai donnés dans le quatrième chapitre, fur ces

mêmes équations à trois variables. Ce mémoire eſt terminé par la continuation du tableau récapitulatif.

Les deux mémoires ſuivans ont pour objet l'intégration des équations aux différences partielles que je nomme *irrégulières*, parce qu'elles n'admettent point d'intégration ſucceſſive. J'avois d'abord dirigé immédiatement mon attaque contre ce nouveau genre d'équations; mais je n'ai point tardé à rencontrer des obſtacles qui m'ont forcé à ſuſpendre mon travail, pour m'occuper préalablement des moyens propres à les lever. Il s'agiſſoit pour cela de déterminer la loi qui doit règner entre un nombre quelconque de fonctions *implicites*, ou ce qui eſt la même choſe, de variables principales, d'après l'équation donnée entre leurs différences partielles. J'avois déjà réſolu ce problème pour le cas où cette équation eſt du premier ordre ſeulement : il falloit maintenant étendre cette ſolution aux ordres ſupérieurs; & c'eſt le ſujet du ſecond mémoire.

Je commence donc par montrer comment il faut intégrer ces équations que, par analogie aux équations finies entre pluſieurs inconnues, je nomme *équations indéterminées aux différences partielles du ſecond ordre*, lorſque ces différences ſont ſeulement linéaires. J'enviſage enſuite la queſtion dans toute ſon étendue, en ſupprimant cette reſtriction. Ce mémoire eſt terminé par une nouvelle méthode d'intégra-

tion pour ces mêmes équations du premier ordre, qui ne porte ſur aucune hypothèſe préalable de la forme que doit prendre l'intégrale cherchée.

Je reviens enſuite à mon objet principal dans le troiſième mémoire qui eſt partagé en pluſieurs chapitres. Dans le premier, je conſidère les équations aux différences partielles du ſecond ordre, comme dérivées immédiatement de l'équation finie

$$\Psi = \alpha\phi:\Pi + \beta\phi':\Pi + \gamma\phi'':\Pi \ldots\ldots + \zeta\phi^{\nu}:\Pi$$
$$+ F:\Omega + \vartheta F':\Omega + \varkappa F'':\Omega \ldots\ldots + \xi F^{\nu}:\Omega.$$

Je commence par la formule de ce genre la plus ſimple, celle qui ſe termine aux deux fonctions ϕ & F. Je détermine le rapport qui doit règner entre la *fonction coëfficiente* α & les *quantités arbitrairement fonctionnées* Π, Ω. Il réſulte de cette détermination que cette première formule ne peut produire aucune équation qui ne ſoit compriſe dans la claſſe des équations *régulières*. Je généraliſe enſuite mes recherches, en donnant à la même formule toute l'étendue dont elle eſt ſuſceptible, & j'en fais l'application au cas où elle ſe termine aux deux fonctions *primes* ϕ' & F'. Les réſultats de cette application ſont trois équations *indéterminées* très-compliquées. Ayant eſſayé d'intégrer ſéparément l'une d'elles, je remarque que l'on ne peut y réuſſir que dans une certaine hypothèſe limitée. Je fais enſuite le même

eſſai

eſſai ſur le ſyſtème entier, en le reſtreignant à la même hypothèſe; mais je parviens à des réſultats intraitables. Cette reſtriction ſe trouve ramener préciſément la formule générale à celle des équations *régulières* qui n'ont qu'une ſeule intégrale du premier ordre; & je montre que le point de vue ſous lequel j'ai conſidéré ces équations dans le premier recueil de ces mélanges, n'étoit point aſſez étendu. Les obſervations précédentes & quelques réflexions ultérieures prouvant ſuffiſamment l'inutilité des recherches qu'on pourroit faire ſur le ſyſtème de nos trois équations primitives dans toute leur généralité, j'abandonne ce projet trop vaſte, pour me borner à l'examen des deux hypothèſes particulières principales : c'eſt le ſujet du ſecond chapitre.

Ces deux hypothèſes ſont celles de $\Pi = \Omega$; & de $\alpha = 1$, $\beta = \vartheta \ldots \zeta = \xi$. Après avoir montré que la première ne peut fournir aucune équation qui ne rentre dans la claſſe des équations *régulières*, je paſſe à l'examen de la ſeconde, & j'y détermine ſucceſſivement la loi qui doit règner entre les *quantités fonctionnées* & les *fonctions coèfficientes*, en augmentant ſucceſſivement le nombre de ces dernières. Le cas de deux pareilles fonctions me conduit au ſyſtème de deux équations différentielles du ſecond ordre entre trois variables, que j'intègre par une méthode fort ſimple, & je parviens à un nouveau ſyſtème de deux équations du premier

ordre entre les trois mêmes variables, dont je réduis l'intégration à celle d'une seule équation entre deux variables seulement. Ne pouvant déterminer cette intégrale générale, je me borne à la recherche d'une intégrale particulière, qui est elle-même très-compliquée; mais qui en fournit une autre assez simple, que je nomme *relativement particulière*. Je termine ce chapitre par un tableau, où j'ai rassemblé toutes les valeurs tant complètes que particulières & relativement particulières, que j'ai déterminées précédemment, des fonctions coëfficientes ϵ, γ, δ, dans les trois cas, d'une, de deux, ou de trois de ces fonctions.

Après avoir établi dans les deux premiers chapitres, la théorie de la formation des équations aux différences partielles du second ordre, en les dérivant immédiatement de leur intégrale finie, je passe enfin dans le troisième, à l'usage de ces principes pour l'intégration de ces mêmes équations. Je me borne dans ce chapitre au cas le plus simple; celui où la fonction Ψ contient seule la variable principale z. J'applique ma méthode à quelques exemples qui diffèrent tous entr'eux; soit par le nombre des fonctions coëfficientes; soit par la distinction de leurs valeurs en *complètes* & *particulières*. Un de ces exemples présente une singularité frappante; celle de deux intégrales différentes appartenant à une même équation. Je m'attache à découvrir la raison d'un pareil ré-

fultat; & je conclus que cette propriété eſt, non ſeulement commune à toutes ces équations, mais que le nombre de ces intégrales n'eſt pas même limité. Il ne s'agit plus que de découvrir ſi elles diffèrent réellement entr'elles par le fond, ou uniquement par la forme. Cette queſtion me mène à l'examen d'un genre de problèmes aſſez curieux, ſur la détermination des fonctions, & je finis par montrer que la différence ci-deſſus n'eſt que dans la forme. J'applique enſuite ma méthode à l'équation générale des *cordes vibrantes*, & dans le cours de ces applications, je fais remarquer qu'on pourroit facilement ſe tromper, en jugeant, ſur les premières apparences, qu'une équation propoſée n'eſt point ſuſceptible d'une pareille application.

Enfin dans le quatrième & dernier chapitre, je donne une méthode d'intégration pour les équations *irrégulières* plus compliquées, dans l'intégrale deſquelles, non-ſeulement la fonction principale Ψ, mais encore les quantités *fonctionnées* Π, Ω, & toutes les fonctions *coëfficientes* ϐ, γ, δ, &c. peuvent contenir la variable principale.

Le quatrième mémoire préſente en raccourci une théorie complète du calcul intégral ordinaire. Dans le premier chapitre je donne une méthode générale d'intégration pour les équations différentielles du premier ordre entre un nombre quelconque de variables. J'en fais entr'autres l'application à

la recherche du facteur aſſez compliqué d'une fonction différentielle de quatre variables, que je n'avois pu déterminer dans le recueil précédent. Ce chapitre eſt terminé par quelques réflexions ſur la condition d'intégrabilité, & par une démonſtration de la poſſibilité d'appliquer la méthode d'intégration expoſée dans ce chapitre, à un nombre quelconque de variables.

Le ſecond chapitre concerne l'intégration d'un ſyſtème quelconque de *n* équations du premier ordre entre *n* + *r* variables. C'eſt le développement complet du ſujet que je n'avois fait qu'effleurer dans le ſecond mémoire du premier recueil.

Dans le chapitre troiſième j'applique les mêmes principes aux ordres ſupérieurs. Je commence par l'intégration des équations iſolées, & je paſſe enſuite au ſyſtème de *n* équations entre *n* + 1 variables. Si cette théorie n'eſt pas toujours auſſi réellement utile dans la pratique qu'elle eſt ſatisfaiſante dans la ſpéculation, elle fait du moins appercevoir à chaque pas la liaiſon intime qui exiſte entre le calcul intégral ordinaire & celui aux différences partielles, ou entre le calcul intégral *unimodulaire* & le calcul intégral *plurimodulaire*. *

* Ces deux nouvelles dénominations, que je propoſe ici aux géomètres, me ſemblent caractériſer parfaitement la différence qui règne entre ces deux

Enfin dans le dernier chapitre j'expofe brièvement & je démontre la manière, déjà connue, d'intégrer au contraire les équations aux différences partielles à plus de deux variables, par l'inverfe de la méthode précédente.

---

branches du calcul intégral. En effet dans le calcul intégral ordinaire une feule des variables eft cenfée varier d'une manière indépendante; & c'eft à fa variation qu'on rapporte les variations co-inftantanées de toutes les autres; c'eft-à-dire que cette variation feule leur fert à toutes de *module*; & conféquemment que ce calcul eft fondé fur l'hypothèfe d'un feul *module* ou qu'il eft *unimodulaire*. Dans le calcul intégral aux différences partielles au contraire, il y a autant de variations indépendantes moins une qu'il y a de variables; & elles fervent toutes conjointement de *modules* à la totalité de la variation de la variable dépendante ou principale; ou ce qui eft la même chofe, de la variable qui eft regardée comme fonction de toutes les autres. Ainfi ce fecond calcul eft fondé fur l'hypothèfe de plufieurs *modules*; c'eft-à-dire qu'il eft *plurimodulaire*.

Il femble d'abord qu'on pourroit appliquer les mêmes dénominations aux équations elles-mêmes, & les diftinguer en *unimodulaires* & *plurimodulaires*. Quant aux équations aux différences partielles, ou felon l'expreffion de M. Lacroix, aux équations *différentielles partielles*, il n'y auroit aucun inconvénient à les défigner de cette dernière manière : en effet toute équation de cette efpèce réfulte néceffairement d'une différentiation dans l'hypothèfe de plufieurs *modules*. Mais il n'en eft pas de même des équations différentielles ordinaires, ou felon l'expreffion du même auteur, *totales*; puifque de pareilles équations peuvent réfulter de deux équations aux différences partielles, & dépendre conféquemment de l'hypothèfe *plurimodulaire*. (*Voyez Traité de calc. diff. & de calc. intég. par S. F. Lacroix, tome 2 art.* 807).

Le cinquième mémoire eſt une collection de huit petits mémoires ſur différens ſujets.

Dans le premier, je détermine la ſurface de *fracture* d'un corps dur, par le principe que la réſiſtance qu'elle oppoſe autour de ſon axe de *fracture*, doit être un *minimum*.

Dans le ſecond, je réſous d'une manière générale le problème de l'intérêt ſur intérêt continu.

Le troiſième préſente une démonſtration du principe que l'enjeu de chaque joueur doit être en raiſon du nombre des chances qui lui ſont favorables.

Le quatrième contient la conſtruction de la conſtante arbitraire que l'intégration introduit dans le calcul intégral aux différences finies, dans l'hypothèſe générale de $\Delta x = nx$.

Dans le cinquième, je donne une méthode pour trouver la projection de la courbe, à ſimple ou à double courbure, qui ſert de limite à l'étendue d'une ſeule & même valeur de l'ordonnée d'une ſurface courbe.

Le ſixième a rapport à la perſpective. J'y détermine, d'après un principe très ſimple & d'une manière très-générale, la courbure qu'il faut donner à deux rangées d'arbres, pour qu'étant apperçues d'une élévation quelconque, elles préſentent réellement deux lignes parallèles.

Le ſeptième concerne un ſujet élémentaire; ſavoir la me-

ſure des parallélogrammes rectangles. J'y examine la manière dont on a coutume d'expoſer cette partie des élémens de géométrie.

Enfin dans le dernier de ces mémoires, après avoir prouvé, que la théorie de la communication du mouvement, dans le choc des corps durs, n'eſt point démontrée d'une manière qui la mette à l'abri de toute objection, j'en donne une démonſtration plus rigoureuſe.

J'ai mis à la tête de ce ſecond volume un ſupplément au premier recueil, que je prie le lecteur de conſulter. J'y retouche, ou même j'y redreſſe pluſieurs endroits que j'avois traités trop ſuperficiellement, ou trop légèrement.

SUPPLÉMENT

SUPPLÉMENT AU PREMIER RECUEIL.

Corrections & additions.

PAGE 6 *lig.* 18. variable *lisez* variable principale.

Page 11 *lig.* 14. *Avant le paragraphe* 9 *ajoutez l'article suivant.*

J'ajouterai ici une observation très-propre à faire distinguer plus facilement les deux équations de *tâtonnement*; savoir, qu'elles sont le plus souvent divisibles chacune par un facteur : comme dans ce dernier exemple la première l'a été par $x+y$, & la seconde par z. Il est aisé d'en découvrir la raison : en effet selon cette méthode on doit aboutir à deux équations $A\frac{dz}{dy}+B=0$, $A\frac{dz}{dx}+C=0$, afin d'en conclure ultérieurement $Adz+Bdy+Cdx=0$. La forme la plus générale des deux équations de *tâtonnement* sera donc

$$a\frac{dz}{dy}+b\frac{dz}{dx}+c=0 \;\&\; m\frac{dz}{dy}+n\frac{dz}{dx}+r=0,$$

d'où on peut toujours déduire les deux précédentes. Il faut donc en général considérer la proposée comme étant la somme de ces deux dernières, mais multipliées chacune par un facteur λ, μ; & conséquemment, lorsqu'on partagera une proposée en ses deux équations de *tâtonnement*, celles-ci auront chacune un pareil facteur, mais qui se réduira quelquefois à l'unité.

Page 28 *lig.* 6. l'analyse *lisez* l'analogie.

Page 69 *lig.* 1. est échappée *lisez* a échappé.

Page 71 *lig.* 22. quelque *lisez* quelle que.

Page 74 lig. 17. ajoutez l'alinea suivant avant l'article 47.

Mais cette méthode elle-même sera insuffisante, toutes les fois que $\varpi = 0$; puisqu'alors M disparoît de l'équation A qui doit la déterminer. En voici une autre, qui n'est applicable qu'à ce cas particulier. Remarquons d'abord qu'en vertu de la dernière équation fondamentale, on a $\frac{dQ}{dx}\frac{dP}{dy} - \frac{dQ}{dy}\frac{dP}{dx} = 0$ dont l'intégrale, en ayant égard à ce que P peut aussi contenir z, est $P = F(Q, z)$; c'est-à-dire, que les variables x & y n'entreront dans P, que sous la forme Q. Et comme $\frac{dP}{dz} = (g\frac{dQ}{dz} + h) F'(Q, z)$, Q ne contenant pas z, cette expression se réduira à $\frac{dP}{dz} = h F'(Q, z) = \phi(Q, z)$. Maintenant nous combinerons ensemble la 4^{me} & 5^{me} des mêmes équations, en multipliant celle-là par ε, & celle-ci par δ, & prenant leur différence; d'où... (B)

$$\varepsilon\left(\frac{dQ}{dx}\frac{dM}{dy} - \frac{dQ}{dy}\frac{dM}{dx} + \frac{dQ}{dx}\frac{dP}{dz}\right) = \delta\left(\frac{dQ}{dx}\frac{dN}{dy} - \frac{dQ}{dy}\frac{dN}{dx} - \frac{dQ}{dy}\frac{dP}{dz}\right).$$

Or nous connoissons $\sigma = \frac{\epsilon}{2\alpha}$, & nous aurons facilement Q & le rapport de $\frac{dQ}{dx}$ à $\frac{dQ}{dy}$ au moyen de la première & de la troisième, en mettant σM pour N & éliminant M; savoir, $\alpha\sigma\frac{dQ}{dy} + \gamma\frac{dQ}{dx} = 0$, ou à cause de $2\alpha\sigma = \epsilon$, $\epsilon\frac{dQ}{dy} + 2\gamma\frac{dQ}{dx} = 0$. Ayant donc substitué ces valeurs, on conclura de l'équation B celle de $\frac{dP}{dz}$, comme on verra dans l'exemple suivant. Si δ étoit $= \varepsilon$, la multiplication deviendroit inutile, & il suffiroit de prendre la différence des deux équations; ce qui s'applique également au cas de $\delta = \varepsilon = 0$.

Qu'on se propose d'intégrer l'équation.

$$y^4 \frac{d^2 z}{dy^2} - 2xy^3 \frac{d^2 z}{dxdy} + x^2y^2 \frac{d^2 z}{dx^2} + (3y^3 - 3z^2y - xy^2) \frac{dz}{dy} + (3z^2x + x^2y - xy^2) \frac{dz}{dx} = 0.$$

On trouvera $\sigma = -\frac{x}{y}$, $Q = xy$, & après toutes les ſubſtitutions & réductions, on parviendra enfin au réſultat... (C)

$$y^3 \frac{dM}{dy} + xy^2 \frac{dM}{dx} - (3y^2 - 3z^2 - xy) M + y^3 \frac{dP}{dz} = 0.$$

Or nous avons dit que $\frac{dP}{dz} = \phi(Q, z)$ eſt la ſeule loi à laquelle P ſoit aſſujetti : nous avons donc ici $\frac{dP}{dz} = \phi(xy, z)$; c'eſt-à-dire que $\frac{dP}{dz}$ ſera ſimplement une fonction arbitraire $\phi(xy)$, en ſuppoſant z conſtante. Il ſuffira donc d'intégrer, après cette dernière ſubſtitution, le réſultat C dans la même hypothèſe. Et on aura, par la méthode ordinaire, *

$$M = y^3 e^{\frac{3z^2+xy}{2y^2}} \left(F(xy) - \frac{1}{(3z^2+xy)\, e^{\frac{3z^2+xy}{2y^2}}} f(xy) \right).$$

De plus M ne doit pas renfermer z ; il faudra donc chaſſer de là la quantité exponentielle ; ce qui ſe borne à faire 1°. $F(xy) = 0$; & 2°. $f(xy) = -(3z^2 + xy)$, puiſque dans toute cette opération z n'eſt qu'une conſtante. Nous aurons par là $M = y^3$ & $\frac{dP}{dz} = f(xy) = -(3z^2 + xy)$; d'où $P = -(z^3 + zxy)$, à quoi on pourroit ajouter une fonction quelconque de xy, mais qui eſt inutile,

* Voyez auſſi leçons de calc. diff. & intég. de M. Couſin édit. de 1777 page 202 lig. 15, & édit. de 1796, art. 274.

puisqu'elle eſt comprise dans $F:Q$. Ainſi $M = y^3$, $N = -xy^2$, $P = -(z^3 + zxy)$ & $Q = xy$.

Lorſque deux valeurs différentes de $f(xy)$ donneront une expreſſion convenable pour M, on aura deux valeurs de P & conſéquemment deux premières intégrales complètes, d'où réſulteroit l'intégrale finie; ce qui n'a pas lieu dans notre exemple. En effet ſi on intègre ultérieurement la première intégrale trouvée, on parvient à l'équation $\int \frac{dz}{z^3 + sz + F:s} + \frac{1}{2y^2} = \phi(xy)$, s étant $= xy$, qu'on ne peut intégrer généralement à cauſe de l'arbitraire $F:s$.

J'ai dit que cette méthode n'eſt applicable qu'au cas de $\varpi = 0$: pour s'en convaincre, il ſuffira de conſidérer que la première connoiſſance à acquérir, eſt celle de la loi qui règne entre P & Q, laquelle eſt donnée par l'équation (X) ... $\frac{dQ}{dx}\frac{dP}{dy} - \frac{dQ}{dy}\frac{dP}{dx} = \varpi$. Or cette équation n'eſt intégrable que lorſque $\varpi = 0$. En effet elle eſt un cas particulier de la formule générale C (§ 58), qui coïncidera avec elle, ſi on y fait $z = Q$, $s = P$, $\varepsilon = \rho = \xi = \chi = 0$, & enfin $\alpha = 1$, $\omega = -\varpi$ ou plus généralement $\frac{\omega}{\alpha} = -\varpi$. Mais ſi on ſubſtitue ces valeurs de ε, ρ, ξ, χ dans l'équation de condition W, elle ſe réduit à $\omega\alpha = 0$; c'eſt-à-dire qu'il faut ou que α & ω ſoient en même tems $= 0$; ou que ce ſoit ſeulement $\alpha = 0$; ou enfin $\omega = 0$. La première de ces ſuppoſitions donneroit $\varpi = \frac{0}{0}$, qui rend l'équation X identique & inſignifiante. La ſeconde donneroit $\varpi = \infty$, valeur également inutile. Il ne reſte donc que la troiſième qui eſt préciſément le cas en queſtion de $\varpi = 0$.

Page 80. *lig.* 11. z, xy *liſez* z, x, y.

Page 82 *lig.* 1. *Substituez à cet alinéa ce qui suit.*

D'autres équations n'ont qu'une première intégrale complète. On en a vu un exemple ci-dessus (§ 43), dont nous avons laissé l'intégrale finie sous la forme $\Psi = \int (A dy\, F : B) + \phi : s$, où A & B ne contiennent que y, & s fonction connue de x & y. En voici un autre que je tire de l'ouvrage de M. Cousin; savoir,

$$\frac{d^2 z}{dy^2} - h^2 \frac{d^2 z}{dx^2} + \frac{h}{x}\frac{dz}{dy} + \frac{h}{x^2}\frac{dz}{dx} = 0,$$

dont l'unique intégrale première complète est

$$\frac{dz}{dy} + h\frac{dz}{dx} + hxF(x+hy) = 0,$$

laquelle intégrée de nouveau à l'ordinaire, donne

$$z = \tfrac{1}{2}\,\phi(x+hy) - \tfrac{1}{2}\,x\phi'(x+hy) + f(x-hy).$$

On peut rapporter cette intégrale finie à la formule générale... (U)

$$\Psi = \lambda\phi:\omega + \mu\phi':\omega + \nu\phi'':\omega + \&c. \ldots\ldots + \epsilon f:\tau,$$

qui paroît bien différente de la première. Il est cependant certain que toutes les équations aux différences partielles du second ordre, dont l'intégrale finie peut prendre l'une ou l'autre de ces deux formes, ne constituent qu'une seule & même classe, comme un exemple très-simple va le prouver. Supposons qu'on soit parvenu à l'intégrale première complète

$$\frac{dz}{dx} + \frac{dz}{dy} - (x^2 - 2xy + 5y^2)\,\phi\,(x + y) = 0.$$

En y mettant ϕ''' au lieu de ϕ, on aura, pour son intégrale finie,

$$z - \int (s^2 + 4y^2)\, dy\, \phi'''(s + 2y) = F : s,$$

s étant $= x - y$, qui est évidemment un cas particulier de la première des deux formules ci-dessus. Or on peut donner successivement à cette intégrale les formes

$$z = \tfrac{1}{2}(s^2+4y^2)\,\phi''(s+2y) - \int 2y.\,2dy\,\phi''(s+2y) \left.\begin{matrix} \\ \text{ou} -2y\phi'(s+2y)+\int 2dy\,\phi'(s+2y) \\ \text{ou} +\phi(s+2y) \end{matrix}\right\} + F:s;$$

c'eſt-à-dire en remettant pour s ſa valeur,

$$z = \phi(x+y) - 2y\phi'(x+y) + \tfrac{1}{2}[(x-y)^2+4y^2]\,\phi''(x+y) + F(x-y);$$

qui dépend auſſi évidemment de la ſeconde des deux mêmes formules générales. Ainſi la ſeule différence réelle, qui exiſte entre les équations qui fourniſſent ces deux différens réſultats, eſt que dans les dernières l'intégration ſucceſſive par parties épuiſe enfin toute la fonction différentielle compriſe ſous le ſigne ; ce qui n'a pas lieu dans les autres, comme il eſt aiſé de le vérifier ſur l'équation citée de l'art. 43. Eſſayons maintenant de déterminer la loi qui doit regner entre les différentes fonctions λ, μ, ν, &c. ϵ, ω & γ de la formule U, pour qu'elle ſoit réellement l'intégrale finie de pareilles équations.*

J'obſerve d'abord &c.

Page 84 *lig.* 1, μ *liſez* ν.

Pages 85, 86. *Lorſqu'on élimine, des trois équations que fournit la comparaiſon terme à terme, les lettres a, b, g, il faut multiplier la troiſième par* $-A$ au lieu de A; *ce qui, dans l'équation réſultante* Æ, *rend négatif le terme* AV (*il en eſt de même du facteur a & du terme aV qui deviennent* $-a$ & $-aV$) & *conſéquemment l'équation au haut de la page* 86 *a, pour premier terme,* $-V\frac{dM}{dx}$. *Cette erreur eſt provenue de ce que le troiſième terme de la formule fondamentale eſt renverſé; l'ordre naturel, conformément aux termes*

* Le lecteur voudra bien conſulter à ce ſujet les nouveaux détails inférés dans le troiſième mémoire du préſent recueil (§ 12 & 13).

précédens, étant $\frac{d\zeta}{dy}\frac{d\gamma}{dx}-\frac{d\zeta}{dx}\frac{d\gamma}{dy}$. *On auroit alors* $bG - Bg = mV$, *& le terme* AV *auroit été positif.*

Page 101 *lig.* 1, M, P, Q *lisez* M, N, P.

Page 107 *lig.* 13, *avant l'art.* 61 *ajoutez ce qui suit.*

Il y a encore une troisième manière dont la quatrième variable t peut disparoître de l'équation D; savoir, lorsqu'elle se trouve seule dans un exposant de Γ ou de Ω; comme si Γ étoit $= \gamma^T$, & $\Omega = \omega^\Theta$: car $d\Gamma$ étant alors $= T\gamma^{T-1}d\gamma$, & $d\Omega = \Theta\omega^{\Theta-1}d\omega$, toute la formule D sera divisible par $T\gamma^{T-1}\Theta\omega^{\Theta-1}$, & la variable t s'évanouïra entièrement. Par exemple, dans $z = F(\overline{x+y}^t, \frac{tu}{x})$, en traitant t comme constante, on trouvera

$$x\frac{dz}{dy} - x\frac{dz}{dx} - u\frac{dz}{du} = 0.$$

Mais alors toutes les équations du même systême, dans lesquelles z aura varié par t, seront affectées de termes logarithmiques $l.\gamma$, $l.\omega$. Ainsi dans notre exemple, en faisant varier t, u & x, on aura

$$([x+y]l.[x+y]+x)\frac{dz}{dy} - x\frac{dz}{dx} - t\frac{dz}{dt} = 0.$$

Il suit de là que l'expression générale de Ψ, pour avoir toute l'étendue dont elle est susceptible, doit être de la forme

$$\Psi = F(P\Gamma^M + Q,\ G\Omega^N + H);$$

mais que dans tous les cas, où aucune des équations qui composent le systême ne sera affectée d'un terme logarithmique, on pourra s'en tenir à ma première formule. *

* Voyez aussi dans le premier mémoire du présent recueil art, 139 une méthode plus générale pour compléter ces intégrales partielles,

Page 124 *lig.* 6. *maximum* lisez *minimum.*

Page 130 *lig.* 2. fous une forme *lifez* fous une même forme.

lig. 20 & 21. $(PG - EN)s$ & $(BQ - CR)s$ *lifez* $(PG - CR)s$ & $(BQ - EN)s$.

Page 133 *lig.* 12. R *lifez* $\grave{R}$.

Page 139 *lig.* 5. $\vartheta\iota + \varkappa\eta$ *lifez* $\vartheta\iota - \varkappa\eta$.

Page 140 *lig. pénult.* $\acute{E} \frac{dp}{dy}$ *lifez* $E \frac{dp}{dy}$.

Page 156 *lig.* 10. d'une variable principale *lifez* d'une fonction principale.

Page 158 *lig.* 23. z, xy *lifez* z, x, y.

Page 171 *lig.* 8. *avant l'art.* 95 *ajoutez ce qui fuit.*

On peut encore préfenter d'une autre manière la folution de cette difficulté. Puifque toutes les fois que $\lambda - \frac{G}{E} = 0$ coïncide avec $\lambda q + p = 0$, le dénominateur de la fraction K eft néceffairement divifible par $\lambda q + p$, on pourra toujours faire difparoître ce facteur, en multipliant la fraction entière par $\lambda q + p$ (§ 91); ce qui dans le même exemple la réduira à $\frac{2pqx}{pq^2x - \lambda q^3 x + pq + 2x}$; c'eft-à-dire, à caufe de $\lambda q + p = 0$, à $\frac{2pqx}{2pq^2x + pq + 2x}$. Maintenant, en vertu de l'équation $\lambda q + p = 0$, il faut annuller une certaine portion N du dénominateur, qui fe détermine par la condition que la fraction K après cette nouvelle réduction, étant multipliée par $dp + \lambda dq$; c'eft-à-dire par $dp - \frac{p}{q} dq$, formera, avec le premier terme dz, un tout intégrable; favoir,

$$d\Psi = A\left(dz + \frac{2px(q\,dp - p\,dq)}{2pq^2x + pq + 2x - N}\right).$$

Or

Or nous avons vu que le terme pq faisoit partie de N; nous repréſenterons donc cette dernière quantité par $pq + \omega$; ce qui changera le dénominateur en $2pq^2x + 2x - \omega$; & nous aurons

$$(2pq^2x + 2x - \omega)\,dz + 2pqxdp - 2p^2xdq,$$

qui doit ſatisfaire à la condition connue d'intégrabilité pour les équations à trois variables z, p & q, & en outre ne pas contenir x. La première condition donnera, pour réſultat, $\omega = 2x$, & diviſant enſuite la fonction par $2pq^2x$, on aura enfin

$$dz + \frac{qdp - pdq}{q^2} = d\left(z + \frac{p}{q}\right).$$

Page 174 *lig.* 16. *Le lecteur voudra bien conſulter, au ſujet de cet art.* 98, *ce qui eſt dit plus bas* (§ 130), *dans la continuation du même mémoire, qui fait le premier mémoire du préſent recueil.*

Page 179 *lig. antép. avant l'art.* 100 *ajoutez ce qui ſuit.*

Nous venons de voir que la ſuppoſition de $\gamma = 0$ dans la troiſième formule rend quelquefois $\lambda = \infty$. On verra de même que cette ſuppoſition peut également rendre, dans la première, $\lambda' = \infty$; & dans la ſeconde λ & $\lambda' = \infty$; ſavoir, lorſque dans la première formule, Π ne contenant pas la lettre p, $Q = 0$; que dans la ſeconde, Ψ & Π ne la contenant, ni l'une, ni l'autre, E & $Q = 0$; & enfin que dans la troiſième c'eſt Ψ qui ne contient point p, & $E = 0$. La règle uniforme pour ces différens cas eſt, dès qu'on trouve $\gamma = 0$, de faire dans le terme de l'expreſſion générale de $d\Psi$ (§ 91) ſur lequel on opère, $\lambda = \frac{1}{\mu}$; & de ſe conduire, pour le reſte, comme nous avons dit au commencement de cet article, en diſcutant la troiſième formule. Cette obſervation eſt d'autant plus importante, qu'en ſuivant, pour ces cas particuliers, la méthode

$$d\Pi = B\left(dx + \frac{\mu' z x dq}{\mu' z q}\right) = B\left(dx + \frac{x dq}{q}\right);$$

& l'intégrale cherchée eſt $pz = F(qx)$.

Page 182 *lig.* 4 *avant l'art.* 101 *ajoutez ce qui ſuit.*

L'exemple auquel je viens d'appliquer cette règle eſt extrêmement ſimple, contenant y, non ſeulement ſous une forme unique, mais encore ſous une forme linéaire. On pourroit en conſéquence ſe trouver embarraſſé dans des cas plus compliqués, faute d'avoir bien ſaiſi l'eſprit de ce procédé. Je vais donc en faire ici une ſeconde application à un des cas les plus difficiles qui puiſſent ſe préſenter. Je ſuppoſe que la fraction K ſoit =

$$\frac{-(py^3 + 2qxy^2 + 2q^2y^2 + 4p^4)}{(3pqy^2 + 3pxy^2 - 2q^2xy - 2q^3y)\lambda^2 - (3p^2y^2 - 2pq^2y + py^3 + 4p^4)\lambda - 2pqy^2},$$

où on voit y^3, y^2, y diſſéminés indiſtinctement dans le numérateur & le dénominateur. Je fais ſelon la règle, le premier $= D$; mais ſans chercher préciſément la valeur de y linéaire par la réſolution des équations du troiſième ordre, ce qui feroit impraticable, je me contente de prendre celle d'une quelconque de ſes puiſſances, qui ſoit également contenue dans le dénominateur, en laiſſant ſubſiſter les autres. Je choiſirai, par exemple, y^3 parce que cette puiſſance ne s'y préſente qu'une fois, non plus que dans le numérateur. Je conclus de là $py^3 = D - 2qxy^2 - 2q^2y^2 - 4p^4$. Subſtituant enſuite cette valeur dans le dénominateur, & égalant à zéro la totalité des termes qui ne ſont pas multipliés par D, j'aurai ſimplement à réſoudre une équation du ſecond degré, dont l'inconnue eſt λ, & d'où il réſultera, pour une des racines, $\lambda = \frac{p}{q+x}$ qui eſt la valeur cherchée.

En général le procédé de cette méthode se borne à inférer, par quelque substitution que ce soit, le symbole D dans le dénominateur; & son esprit consiste en ce que, cette insertion étant une fois effectuée, & la totalité des termes qui ne sont point affectés de cette lettre étant supposée nulle, l'analyse forcée par cette dernière supposition à donner toutes les valeurs de λ, en vertu desquelles la fraction K se réduit à $\frac{D}{mD}$, ne manquera pas de moyens propres à faire disparoître les quantités qui compliquent inutilement la formule.

Page 187 *lig* 10. *Avant l'art.* 103 *ajoûtez ce qui suit.*

La forme peu ordinaire de cette intégrale pourroit causer quelque embarras, surtout à cause de l'élément ou quantité arbitrairement fonctionnée w qui est indéterminée. Voici donc comme il faut traiter ce système: On considérera d'abord w comme une inconnue ordinaire, qu'il s'agit moins de connoître que d'éliminer, au moyen des deux équations qui la contiennent. On voit que cette opération exige préalablement la détermination des deux fonctions F & ϕ. Pour y parvenir, on employera les données particulières du problème, qui sont ici deux certaines courbes à double courbure, par où la surface en question doit passer. Supposons donc 1°. que, quand $y = X$, $z = \xi$. Les deux équations ci-dessus se changeront en

$$(\xi - \phi : w)^2 + (X - w)^2 + (x - F : w)^2 = a^2 \quad \&$$

$$(\xi - \phi : w)\phi' w + (X - w) + (x - F : w) F' : w = 0,$$

d'où, à cause de X & ξ fonctions de x seule, on éliminera cette variable; & on aura un premier résultat entre ϕ, F & w. Suppo-

fons 2°. que quand $x = X'$, $z = \xi'$, on parviendra, de la même manière, à un fecond réfultat femblable. Faifant enfuite $\phi : w = t$, $\phi' : w = \frac{dt}{dw}$; $F : w = u$, $F' : w = \frac{du}{dw}$, on tranformera ces deux réfultats en deux équations différentielles ordinaires du premier ordre à trois variables, dont l'intégrale fournira deux équations finies entre ces trois mêmes variables, d'où il fera aifé de conclure les valeurs de t & u en w; c'eft-à-dire les expreffions de $\phi : w$ & $F : w$. Cela fait, il n'y aura plus qu'à éliminer, comme j'ai dit plus haut, w des deux intégrales en queftion, & l'équation réfultante entre les trois coordonnées z, x & y, fera à la furface qui paffe par les deux courbes défignées.

Page 201 *lig.* 8. $K = -\frac{b}{ap}$ *lifez* $K = -\frac{b'}{ap}$.

Page 218 *lig.* 11. B' *lifez* B, *lig.* 17. *P lifez R.*

Page 228 *lig.* 16. *Voyez au fujet de ce qui fuit, ce qui eft dit dans le quatrième mémoire du préfent recueil* (§ 8).

Page 230 lig. 25. & du foleil *lifez* & de la lune,.

Page 261 *lig.* 8. *Effacez ce qui eft après les mots* du fphéroïde *jufques & y compris ceux* centrifuge qui par là, *& fubftituez à ce qui fuit*, nommant donc t le tems qu'un mobile.... on aura $f =$ &c.

Page 269 lig. 1. *Il s'étoit gliffé une erreur à la page* 270 : *je l'ai corrigée dans un carton poftérieur à la publication de l'ouvrage. Mais comme malgré mes foins quelques exemplaires ont peut-être échappé à cette correction; & que d'ailleurs le défaut d'efpace m'a empêché de lui donner toute l'étendue néceffaire, je me fuis déterminé à l'inférer dans cette note d'une manière plus complète. Elle commence avec la page* 269, *comme il fuit.*

[...]é d'une partie Qq décrite uniformément en vertu de la [...] avec laquelle ce mobile arrive au point Q ; & d'une autre [...] qR décrite d'un mouvement accéléré en vertu de l'aug[...]ion de viteſſe qu'il continue de recevoir ſans interruption : acc[...]ération qu'on peut regarder comme uniforme pendant un inſtant. Ainſi déſignant par ϕ le module d'accélération qui n'eſt conſtant que pendant l'inſtant dt ; ou ſelon l'expreſſion de Bézout,* qui revient au même, & qui préſente peut-être un ſens encore plus déterminé, *la viteſſe que la cauſe accélératrice feroit naître dans le mobile pendant l'unité de tems, ſi pendant cette unité elle agiſſoit comme force accélératrice conſtante*, on aura, par le premier principe, $qR = \frac{1}{2}\phi dt^2$. De plus l'inſtant égal ſuivant, le mobile decrira $RS = de + d^2e$ qui eſt compoſé d'une partie décrite uniformément $Rr = Qq$; d'une autre partie décrite de la même manière $r\rho = 2qR$, par le ſecond principe ; & enfin d'une troiſième partie ρS décrite d'un mouvement uniformément accéléré & $= qR$; puiſque le module d'accélération peut être cenſé le même pour deux inſtans conſécutifs. Ainſi $RS = Qq + 2qR + qR = de + 2qR$, ou $de + d^2e = de + \phi dt^2$, d'où $d^2e = \phi dt^2$.

Cette manière de conſidérer le mouvement varié eſt celle qu'on appèle *dans la courbe rigoureuſe* ; & en voici la raiſon. Soit (*fig. II*) Q'R'S une courbe quelconque, dont les abſciſſes AP repréſentent le tems t, & les ordonnées PQ l'eſpace e décrit pendant ce tems. On ſait qu'on peut concevoir toute courbe comme une ſuite de petits arcs de cercle dont chacun a, pour rayon, le rayon de développée qui lui eſt perpendiculaire. Ainſi dans cette hypo-

* Cours de mathém. à l'uſage de la marine partie 4, page 261 § 215 édit. de 1784.

thèse, chacun des élémens Q'R', étant un arc de cercle, est considéré comme un élément *rigoureusement* courbe; & menant au point Q' la tangente Q'q, elle divisera l'incrément de l'espace pendant l'instant suivant, en deux parties Qq, qR' analogues à celles ci-dessus désignées par les mêmes lettres; c'est-à-dire que Qq exprimera la partie décrite d'un mouvement uniforme avec la vitesse au point Q'; & qR' celle décrite d'un mouvement accéléré. Menant pareillement une tangente R'ρ à l'autre extrémité R' du même petit arc; & du même point la parallèle R'r à Q'u on distinguera, dans l'incrément RS du second instant égal au premier, comme nous avons fait ci-dessus, les trois parties Rr, rρ, & ρS. La prémière est évidemment égale à Qq; la seconde rρ = 2qR', puisque le prolongement de la tangente R'ρ rencontre celle Q'u en un point o, & qu'il est aisé de démontrer qu'à cause de l'arc infiniment petit Q'R', R'ρ = 2R'o; & enfin la troisième ρS = qR', parce que l'arc suivant R'S diffère infiniment peu du précédent.

Mais on peut également calculer ce mouvement dans la courbe *polygone*. Pour cela, ayant par les points Q', R', S tiré les droites Q'R', R'S, comme on le voit (*fig. III*), on sait que, dans cette dernière, qR' est double de ce qu'elle étoit dans la *fig. II* (*voyez Dynam. de d'Alembert chap.* 1); & conséquemment on a ici qR' = ϕdt^2. D'ailleurs, comme à cause de Q'R' qui est une petite ligne droite, le mouvement pendant chaque instant Q'Q (= dt) est uniforme, on aura, pour la vitesse avec laquelle cet espace qR' est décrit, $\frac{\phi dt^2}{dt}$ ou ϕdt, qui est précisément celle que la cause accélératrice feroit naître par degrez dans le mobile pendant le

cours de l'instant dt. Ainsi du, qui est l'augmentation subite de vitesse à la fin du tems t ou au commencement de l'instant dt, sera $du = \phi dt$, quoique cette vitesse ne soit *rigoureusement* acquise qu'après l'expiration de ce même instant. On dira donc ici : le petit espace QR (*fig. I*) $= de$ est composé de deux parties Qq, qR décrites toutes deux uniformément, dont la dernière, qui est l'effet de l'accélération, est $= \phi dt^2$. De plus RS $= de + d^2e$ l'est de même de trois parties Rr, rρ & ρS aussi décrites uniformément, les deux premières étant la continuation uniforme de QR ; c'est-à-dire que Rρ = QR, & ρS = qR. Ainsi $de + d^2e = de + \phi dt^2$ & $d^2e = \phi dt^2$, comme dans le premier cas.

Résumons : on demande une équation entre l'espace e, le module d'accélération ϕ & le tems t. Or tant dans l'hypothèse de la courbe *rigoureuse*, que dans celle de la courbe *polygone*, cette équation est $d^2e = \phi dt^2$. En effet, dans la première d^2e ou l'excès de RS sur QR (*fig. I*) est rρ qui, étant lui même l'espace parcouru uniformément pendant le second instant dt en vertu de la vitesse ϕdt acquise successivement pendant le premier, est évidemment $= \phi dt^2$. Dans la seconde, cet excès est encore rρ, mais ici rρ = ρS ; c'est-à-dire, l'espace parcouru uniformément par le mobile pendant le second instant dt, en vertu d'une vitesse ϕdt qu'on ne considère plus comme devant lui être imprimée seulement par degrez pendant le cours de cet instant, mais comme lui étant communiquée tout d'un coup dès le commencement de ce même instant.

On donne, ordinairement * pour le cas de la courbe *rigoureuse*

* Voyez entr'autres leçons de calc. diff. & intég. par M. Cousin édit. in-8°. page 70, & édit. in-4°. art. 196.

la

la formule $d^2e = 2\phi dt^2$. J'obſerverai que cette différence de réſultat, en me bornant à l'ouvrage que je viens de citer, provient uniquement de ce que l'auteur fait la limite de $\frac{tM'}{\Delta t^2}$; c'eſt-à-dire, $\frac{tM'}{dt^2} = \phi$; ſuppoſition qui, tant que ϕ déſigne le module d'accélération., exigeroit que tM' fût décrit d'un mouvement uniforme, comme dans la courbe *polygone*, & qui ne peut conſéquemment s'approprier à l'hypothèſe de la courbe *rigoureuſe*, où pendant le tems dt la nouvelle viteſſe du mobile, en partant de l'état zéro, eſt continuellement & uniformément accélérée. En effet, l'eſpace tM' étant par cette raiſon $= \frac{1}{2}\phi dt^2$, on a évidemment $\frac{tM'}{dt^2} = \frac{1}{2}\phi$ d'où à cauſe de $tM' = \frac{1}{2} d^2e$, $d^2e = \phi dt^2$. Je dirai la même choſe de la force centrifuge *. A E eſt bien le petit eſpace que décriroit le mobile en vertu de cette force, pendant le tems dt; mais comme il le décriroit d'un mouvement uniformément accéléré, cet eſpace n'eſt que $\frac{1}{2} F dt^2 = AE$, d'où $F = \frac{2AE}{dt^2}$.

Au moyen de la formule $d^2e = \phi dt^2$, lorſqu'on connoîtra ϕ qui eſt toujours une fonction de l'eſpace parcouru e, s'il n'y a qu'une pareille équation, c'eſt-àdire ſi le mouvement eſt rectiligne; ou une fonction du nombre de variables convenable à l'eſpace ou aux eſpaces, ſoit curvilignes ſimples, ſoit à double courbure, &c., que décrit ou que décrivent ſimultanément différens mobiles liés entr'eux par des rapports quelconques, mouvement qui, dans ce dernier cas, eſt déterminé par un pareil nombre de ces équations; au moyen, dis-je, de cette ou de ces différentes équations, on

* *Ibidem.* Édit. in-8°. page 376 lig. 25, & édit. in-4°. art. 213.

d'où j'élimine toutes les lettres qui repréſentent les coëfficiens différentiels du premier ordre d'une des deux fonctions principales Ψ ou Π (§ 75), par exemple celles M, N... W qui appartiennent à la dernière. J'obtiens par là trois nouvelles équations; l'une réſultant de 1, 2, 3; la ſeconde, de 1, 2, 4, 5, 7; & la troiſième, de 1, 2, 4, 6, 7; ſavoir.... (D)

1°. $\rho H-\chi I+\theta K=0$,

2°. $K(\beta I-\gamma H-\theta Gt-\theta Es-\theta Aq-\theta C)=H(\chi Gs+\chi Er+\chi Ap+\chi B-\zeta H)$,

3°. $K(\beta K-\delta H-\chi Gt+\theta Gs-\chi Es+\theta Er-\chi Aq+\theta Ap-\chi C+\theta B)=I(\chi Gs+\chi Er+\chi Ap+\chi B-\zeta H)$,

qui ſe réduiſent évidemment à celles B (§ 75) en faiſant $\rho=\chi=\theta=0$.

114. Pour ſuivre le même ordre que dans le huitième chapitre, je commencerai par examiner le cas où la formule générale B (§ 113) ſe réduit aux trois premiers termes; tous les coëfficiens étant zéro, excepté ρ, χ & θ. Cette ſuppoſition annulleroit chacun des binomes $HR-GT$, $HQ-ET$, &c. contenus dans les termes anéantis. Mais comme il réſulteroit néceſſairement de là que $HV-IT$, $HW-KT$, & $IW-KV$; c'eſt-à-dire θ, χ & ρ ſeroient eux-mêmes zéro, cette première ſuppoſition ne peut avoir lieu. Ainſi de pareilles équations ne ſont point du nombre de celles qui s'intègrent par la méthode préſente. Et en effet elles appartiennent uniquement à la claſſe d'équations *indéterminées* du premier ordre, dont j'ai parlé à la fin de l'art. 49, & ſur leſquelles je reviens plus au long dans le mémoire ſuivant. Mais il faut pour cela que les coëfficiens θ, χ & ρ ne ſoient fonctions que de r, s, & t.

Je ſuppoſerai en ſecond lieu que le dernier terme ſeul η ſoit zéro. On aura donc tous les binomes $AN-BM$, $AP-CM$,

$AQ - EM$, $AR - GM$, &c. contenus dans ce terme, égaux à zéro ; ou feulement ces quatre premiers, ce qui fuffit pour déterminer les autres à l'être également. On verra aifément que cette condition exige que, σ étant une fonction de z, x, y, p & q, ces cinq variables ne compliquent les expreffions de Ψ & de Π que fous cette forme unique, de manière que Ψ & Π ne foient fonctions que de r, s, t & σ ; ce qui eft analogue à ce qui a lieu dans le fecond ordre (§ 86). Subftituant donc dans les 4, 5, 6 & 7.^{me} équations C, pour N, P, Q & R, les valeurs que cette fuppofition leur affigne, on les transformera, dans le même ordre, en ... (E)

$$(HM - AT)(Gt + Es + Aq + C) = A\epsilon;$$
$$(IM - AV)(Gt + Es + Aq + C) - (HM - AT)(Gs + Er + Ap + B) = A\gamma;$$
$$(KM - AW)(Gt + Es + Aq + C) - (IM - AV)(Gs + Er + Ap + B) = A\delta;$$
$$(KM - AW)(Gs + Er + Ap + B) = -A\zeta,$$

qui après l'élimination de M, T, V & W, donneront, pour réfultat, ... (F)

$$\epsilon(Gs + Er + Ap + B)^3 + \gamma(Gs + Er + Ap + B)^2(Gt + Es + Aq + C) + \delta(Gs + Er + Ap + B)(Gt + Es + Aq + C)^2 + \zeta(Gt + Es + Aq + C)^3 = 0.$$

115. Pour mieux faire appercevoir l'analogie de ce réfultat avec celui que nous avons trouvé dans le fecond ordre, (§ 86), foit $Gt + Es + Aq + C = m$, $Gs + Er + Ap + B = n$. Il deviendra, par ces fubftitutions, (G) ... $\epsilon n^3 + \gamma n^2 m + \delta n m^2 + \zeta m^3 = 0$. Obfervons maintenant que $Gs + Er + Ap + B$ eft $= \frac{d\Psi}{dx}$ & $Gt + Es + Aq + C = \frac{d\Psi}{dy}$ en ne faifant pas varier les coëfficiens différentiels r, s, t du fecond ordre ; tout comme, dans le fecond ordre, $Ap + B$ & $Aq + C$ font, l'un $\frac{d\Psi}{dx}$, & l'autre $\frac{d\Psi}{dy}$ en traitant de même

comme conſtans les coëfficiens différentiels p & q du premier ordre. Ainſi nommant également $Aq+C=m$ & $Ap+B=n$, nous aurons (§ 86) $\gamma n^2+\zeta nm+\eta m^2=0$, qui eſt la formule du ſecond ordre analogue à celle G ci-deſſus du troiſième.

116. La deſtination de l'équation F eſt donc ici de déterminer la fonction σ de z, x, y, p & q, comme celle de V (§ 86) étoit de déterminer la fonction s de z, x & y. La forme de l'équation G ſuffit pour prouver qu'on pourra toujours repréſenter chacune de ſes racines par $n-\lambda m=0$; c'eſt-à-dire, $Gs+Er+Ap+B-\lambda(Gt+Es+Aq+C)=0$, ou... (H)

$$(p-\lambda q)\frac{d\Psi}{dz}+\frac{d\Psi}{dx}-\lambda\frac{d\Psi}{dy}+(r-\lambda s)\frac{d\Psi}{dp}+(s-\lambda t)\frac{d\Psi}{dq}=0.$$

Et c'eſt au moyen de cette équation à ſix variables qu'il s'agira de parvenir à la connoiſſance de Ψ, relativement à z, x, y, p & q ſeulement; c'eſt-à-dire, en regardant r, s & t comme des conſtantes. Cette fonction Ψ ſera donc donnée (§ 35) par une formule $\Psi=F$ (A, B, C, D), dont chaque quantité *arbitrairement fonctionnée* A, B, &c. pourra être priſe pour une valeur de σ.

Quant à la première des équations D, qui eſt le réſultat des trois premières de celles C, la ſuppoſition de $\eta=0$ n'y apporte aucun changement. Ainſi elle reſte invariablement la même; mais on verra aiſément, par l'eſprit de cette méthode, qu'il ſeroit inutile d'y avoir égard.

La difficulté de déterminer la fonction σ augmentera donc par deux raiſons différentes, à meſure qu'on avancera dans les ordres ſupérieurs; la première, à cauſe du degré de l'équation F ou G, qui ſera le même que l'ordre de la propoſée; & la ſeconde, à

caufe du nombre de variables de l'équation H, qui en nommant g l'expofant de cet ordre, fera $= 3 + \frac{g(g-1)}{2}$, y compris la variable principale Ψ.

117. Nous fuppoferons maintenant, comme (§ 86), qu'on ait fubftitué σ à la fonction qu'elle repréfente; on aura

$$d\Psi = \mathrm{a}\,dr + \mathrm{b}\,ds + \mathrm{e}\,dt + \mathrm{g}\,d\sigma$$
$$d\Pi = \mathrm{m}\,dr + \mathrm{n}\,ds + \mathrm{p}\,dt + \mathrm{q}\,d\sigma\,;$$

& $\frac{d\Psi}{dx}\frac{d\Pi}{dy} - \frac{d\Psi}{dy}\frac{d\Pi}{dx} = 0$ deviendra . . . (I)

$$(\mathrm{an}-\mathrm{bm})\left(\frac{dr}{dx}\frac{ds}{dy}-\frac{dr}{dy}\frac{ds}{dx}\right)+(\mathrm{ap}-\mathrm{em})\left(\frac{dr}{dx}\frac{dt}{dy}-\frac{dr}{dy}\frac{dt}{dx}\right)+(\mathrm{aq}-\mathrm{gm})\left(\frac{dr}{dx}\frac{d\sigma}{dy}-\frac{dr}{dy}\frac{d\sigma}{dx}\right)+$$
$$(\mathrm{bp}-\mathrm{en})\left(\frac{ds}{dx}\frac{dt}{dy}-\frac{ds}{dy}\frac{dt}{dx}\right)+(\mathrm{bq}-\mathrm{gn})\left(\frac{ds}{dx}\frac{d\sigma}{dy}-\frac{ds}{dy}\frac{d\sigma}{dx}\right)+(\mathrm{eq}-\mathrm{gp})\left(\frac{dt}{dx}\frac{d\sigma}{dy}-\frac{dt}{dy}\frac{d\sigma}{dx}\right):$$

qui feroit la nouvelle forme de la propofée, & telle qu'en y remettant pour $\frac{d\sigma}{dx}, \frac{d\sigma}{dy}$ leurs valeurs, on verroit reparoître cette même propofée fous fa première forme.

Soit donc la valeur de σ, qui en général eft ici fonction de $r, s, t, p\ q, \zeta, x, y$, telle que . . . (J)

$$d\sigma = \Gamma\,dr + \Omega\,ds + \mathrm{T}\,dt + \Sigma\,dp + \Delta\,dq + \Theta\,d\zeta + \Lambda\,dx + \Xi\,dy.$$

Cette fubftitution dans l'équation I, en l'ordonnant de la même manière que la propofée, la changera en . . . . (K)

$$(\mathrm{an}-\mathrm{bm}+\overline{\mathrm{aq}-\mathrm{gm}}\,\Omega-\overline{\mathrm{bq}-\mathrm{gn}}\,\Gamma)\left(\frac{dr}{dx}\frac{ds}{dy}-\frac{dr}{dy}\frac{ds}{dx}\right)+(\mathrm{ap}-\mathrm{em}+\overline{\mathrm{aq}-\mathrm{gm}}\,\mathrm{T}$$
$$-\overline{\mathrm{eq}-\mathrm{gp}}\,\Gamma)\left(\frac{dr}{dx}\frac{dt}{dy}-\frac{dr}{dy}\frac{dt}{dx}\right)+(\mathrm{bp}-\mathrm{en}+\overline{\mathrm{bq}-\mathrm{gn}}\,\mathrm{T}-\overline{\mathrm{eq}-\mathrm{gp}}\,\Omega)\left(\frac{ds}{dx}\frac{dt}{dy}-\frac{ds}{dy}\frac{dt}{dx}\right)$$
$$+\overline{\mathrm{aq}-\mathrm{gm}}\,[\Delta t+\Sigma s+\Theta q+\Xi]\frac{dr}{dx}-\left(\overline{\mathrm{aq}-\mathrm{gm}}\,[\Delta s+\Sigma r+\Theta p+\Lambda]-\overline{\mathrm{bq}-\mathrm{gn}}\,[\Delta t+\right.$$
$$\left.\Sigma s+\Theta q+\Xi]\right)\frac{dr}{dy}+\left(\overline{\mathrm{eq}-\mathrm{gp}}\,[\Delta t+\Sigma s+\Theta q+\Xi]-\overline{\mathrm{bq}-\mathrm{gn}}\,[\Delta s+\Sigma r+\Theta p+\Lambda]\right)$$
$$\frac{dt}{dx}-\overline{\mathrm{eq}-\mathrm{gp}}\,[\Delta s+\Sigma r+\Theta p+\Lambda]\frac{dt}{dy}=0.$$

Comparant terme à terme cette équation avec la proposée générale B (§ 113), on aura les sept suivantes ... (L)

1°. $an - bm + \overline{aq-gm}\,\Omega - \overline{bq-gn}\,\Gamma = \theta$,

2°. $ap - em + \overline{aq-gm}\,T - \overline{eq-gp}\,\Gamma = \chi$;

3°. $bp - en + \overline{bq-gn}\,T - \overline{eq-gp}\,\Omega = \rho$;

4°. $\overline{aq-gm}\,[\Delta t + \Sigma s + \Theta q + \Xi] = \epsilon$,

5°. $\overline{aq-gm}\,[\Delta s + \Sigma r + \Theta p + \Lambda] - \overline{bq-gn}\,[\Delta t + \Sigma s + \Theta q + \Xi] = -\gamma$;

6°. $\overline{eq-gp}\,[\Delta t + \Sigma s + \Theta q + \Xi] - \overline{bq-gn}\,[\Delta s + \Sigma r + \Theta p + \Lambda] = \delta$;

7°. $\overline{eq-gp}\,[\Delta s + \Sigma r + \Theta p + \Lambda] = -\zeta$;

dont les quatre dernières donnent d'abord une équation M qui coïncide avec celle F, puisqu'elle n'en diffère qu'en ce que Θ, Λ, Ξ, &c. remplacent ici *A*, *B*, *C*, &c; par la même raison que dans le second ordre l'équation O (§ 86) coïncidoit avec celle V. Éliminant ensuite, par 1, 4, 5, les coëfficiens m, n & q de la première; par 2, 4, 7, ceux m, p & q de la seconde; & enfin par 3, 6, 7, ceux m, n & p de la troisième, on parviendra au systême ... (N)

$$(\gamma+\epsilon\lambda)\frac{d\Psi}{dr} - \epsilon\frac{d\Psi}{ds} + \Big((\gamma+\epsilon\lambda)\Gamma - \epsilon\Omega + \theta(\Delta t+\Sigma s+\Theta q+\Xi)\Big)\frac{d\Psi}{d\sigma} = 0;$$

$$\zeta\frac{d\Psi}{dr} + \epsilon\lambda\frac{d\Psi}{dt} + \Big(\zeta\Gamma + \epsilon\lambda T - \chi(\Delta s+\Sigma r+\Theta p+\Lambda)\Big)\frac{d\Psi}{d\sigma} = 0,$$

$$\zeta\lambda\frac{d\Psi}{ds} - (\zeta+\delta\lambda)\frac{d\Psi}{dt} + \Big(\zeta\lambda\Omega - (\zeta+\delta\lambda)T - \rho\lambda(\Delta s+\Sigma r+\Theta p+\Lambda)\Big)\frac{d\Psi}{d\sigma} = 0;$$

où on observera qu'en conséquence de la supposition de $n = \lambda m$ (§ 116), on a égal[illegible] $+\Sigma r + \Theta p + \Lambda = \lambda(\Delta t + \Sigma s + \Theta q + \Xi)$: ca[illegible] es équations, en les di-

Mais je m'apperçois bientôt, à la forme des deux résultats, que ce cas est un de ces cas singuliers, où par le mélange bizarre des cofonctions entr'elles (§ 63), ma méthode pourroit être insuffisante. Ainsi au lieu d'éliminer successivement de ces deux équations chacune des différences partielles par q, p, z, afin d'avoir trois nouvelles intégrales, dont la comparaison avec les deux précédentes me fasse connoître la véritable forme des trois cofonctions qui doivent servir de base à l'expression complète de Ψ, j'employe une autre méthode qu'n'est sujette à aucune pareille exception, & que je développe dans le chapitre suivant (§ 135 - 139). Celle-ci me donne, au moyen de l'intégrale de la première des deux équations ci-dessus ; savoir, $\Psi = F(rx-p, rq-sp, 2rz-p^2)$ où y a été traitée comme constante, pour celle du système entier, l'expression... (O)

$$\Psi = F\left(rx+sy-p,\ rq-sp+(s^2-tr)y,\ 2rz-p^2-2y(rq-sp)+y^2(rt-s^2)\right).$$

Ainsi ces trois fonctions feront nécessairement du nombre de celles A, B, C, D (§ 116) qui constituent l'expression totale de Ψ, ou ce qui est la même chose, les quatre valeurs de σ pour chacune de celles de λ. Quant à la quatrième, elle dépend réellement des coëfficiens β, γ, &c. : & elle est la seule qui conduise à l'intégration ultérieure.

119. Une autre observation non moins importante, & conforme à ce que nous avons déjà remarqué dans le second ordre (§ 88), c'est que dans chacune des expressions de Ψ, les trois fausses valeurs de σ se combinent le plus souvent avec la quatrième de manière qu'on ne puisse les distinguer. Il résulte de là (§ 89) qu'aucune des quatre cofonctions, dans leur état actuel, ne réussit à faire dis-

paroître, comme il feroit néceſſaire, les cinq variables z, x, y, p & q des trois équations N, lors même qu'il y en a réellement une propre à remplir cette condition. J'en ai expoſé la raiſon à l'article que je viens de citer, & je montrerai ſeulement ici par quel mécaniſme ce mélange s'opère.

On ſe convaincra d'abord aiſément qu'en quelque nombre que ſoient les cofonctions, on peut, ſans altérer l'intégrale qu'elles conſtituent, les combiner entr'elles d'une manière quelconque (§ 88). Or lorſque les trois fonctions $rx+sy-p$, $rq-sp+(s^2-tr)y$ & $2rz-p^2-2y(rq-sp)+y^2(rt-s^2)$, qui contiennent chacune plus de deux variables, ſe rencontreront avec une autre fonction de trois ou de quatre variables, & telle que par une certaine combinaiſon avec les trois premières, elle puiſſe ſe réduire à n'en contenir plus que deux, cette combinaiſon s'opèrera immanquablement. En effet on a vu (§ 35) dans le cas des équations à cinq variables (& cela s'applique évidemment à un nombre quelconque) que la première règle eſt de chercher un binome différentiel à deux variables ſeulement, dont l'intégrale ſoit conſéquemment une fonction de même nature. Ainſi lorſque cette condition ne pourra être remplie que par le mélange des fauſſes valeurs de σ avec les autres, ce mélange aura néceſſairement lieu. Telle eſt la fonction à trois variables $tx+sy+q$ (car r, s, t ſont conſidérées comme conſtantes). Si on multiplie la première des deux fonctions O (§ 118) $rx+sy-p$ par s, & qu'on retranche ce produit de la ſeconde $rq-sp+(s^2-rt)y$, il reſtera, en diviſant par r, $sx+ty-q$ qui ajoutée à celle ci-deſſus, & diviſant enſuite la ſomme par $s+t$, donnera $x+y$; fonction à deux variables ſeulement,

mais qui eſt le réſultat de la combinaiſon de $tx+sy+q$ avec deux des fauſſes valeurs O.

Je m'arrêterai un inſtant ici pour faire remarquer combien ces réflexions jettent de jour ſur l'opération par laquelle l'analyſe prépare les différentes fonctions qui compoſent l'intégrale d'une équation aux différences partielles, à paroître dans cette équation ſous une forme qui la rende ſuſceptible d'intégration. On apperçoit, par exemple, clairement que quelque fonction de trois variables u, x, y qu'on prenne pour Π & Ω dans la formule $\Psi = F(\Pi, \Omega)$, l'équation aux différences partielles qui en réſultera, ne ſera intégrable par la méthode directe (§ 24), qu'autant qu'il ſera poſſible de combiner entr'elles ces deux fonctions Π, Ω de manière à en former une qui ne contienne que deux des trois variables ci-deſſus. Ainſi si, Ψ étant $= z$, on fait $\Pi = \frac{y^2+u^2}{x}$, $\Omega = \frac{uy}{x}$. On trouvera, au moyen du tableau général (§ 27), l'équation $y\frac{dz}{dy} + 2x\frac{dz}{dx} + u\frac{dz}{du} = 0$, d'où en vertu de la première formule (§ 24), $z = F(\frac{y^2}{x}, \frac{y}{u})$. Or on voit ici que l'analyſe, afin de réduire les cofonctions à cette forme ſimple, a effectué les deux combinaiſons

$$\frac{\Pi}{\Omega} = \frac{y^2+u^2}{uy} = f{:}\frac{y}{u} \ \& \ \frac{\sqrt{(\Pi^2 - 4\Omega^2)} + \Pi}{2} = \frac{y^2}{x}.$$

Il ſera aiſé d'étendre ces obſervations à un plus grand nombre de variables conformément à ce qui eſt dit (§ 35); je reviens à mon ſujet. Soit par exemple, . . . (P)

$$sy\left(\frac{dr}{dx}\frac{ds}{dy} - \frac{dr}{dy}\frac{ds}{dx}\right) + sx\left(\frac{dr}{dx}\frac{dt}{dy} - \frac{dr}{dy}\frac{dt}{dx}\right) + rx\left(\frac{ds}{dx}\frac{dt}{dy} - \frac{ds}{dy}\frac{dt}{dx}\right) + (s + t)\left(s\frac{dr}{dx} + [r-s]\frac{dr}{dy} - r\frac{dt}{dx}\right) = 0.$$

On a ici $\theta = sy$, $\chi = sx$, $\rho = rx$, $\epsilon = (s+t)s$, $\gamma = (s+t)(r-s)$, $\delta = -(s+t)r$, $\zeta = 0$; & l'équation F (§ 114) donne $\lambda = 0$, $\lambda = 1$, $\lambda = -\frac{r}{s}$. En employant la racine $\lambda = 1$, l'équation H (§ 116) devient $(p-q)\frac{d\Psi}{dz} + \frac{d\Psi}{dx} - \frac{d\Psi}{dy} + (r-s)\frac{d\Psi}{dp} + (s-t)\frac{d\Psi}{dq} = 0$, dont on trouvera, par une méthode analogue à celle de l'art. 35, que l'intégrale eſt... (Q)

$$\Psi = F\left(x+y, p+(r-s)y, q+(s-t)y, z+py-qy+\frac{r-2s+t}{2}y^2\right);$$

où l'on ne reconnoît aucune des trois fauſſes valeurs qui y ſont cependant *eſſentiellement* contenues. Il nous reſte donc à réſoudre une queſtion ſemblable à celle que nous avons réſolue dans le ſecond ordre (§ 90); ſavoir, de débarraſſer celle des quatre cofonctions qui eſt la véritable ſolution cherchée, des trois fonctions O qui la dénaturent (§ 89).

120. Nous employerons pour cela la même méthode qu'à l'article cité. Soient donc ϑ, $\varkappa$, μ, ν les quatre cofonctions qui conſtituent l'expreſſion de Ψ ſur laquelle on opère. On verra par les mêmes raiſonnemens, qu'il faut d'abord diviſer chacune des équations N (§ 117) par tout facteur en z, x, y, p & q, qui ſeroit commun aux deux premiers termes. Nommant enſuite dans le même ordre, H, I, K, les coëfficiens de $\frac{d\Psi}{d\sigma}$, on aura à réaliſer les trois conditions $H = F(r, s, t, \sigma)$; $I = \phi(r, s, t, \sigma)$; $K = F(r, s, t, \sigma)$. Or, par hypothèſe, la véritable valeur de σ doit réſulter du mélange à faire des quatre cofonctions ϑ, $\varkappa$, μ, ν & des quantités r, s, t qui, dans l'expreſſion actuelle de Ψ, ſont traitées comme conſtantes. Il s'agit donc de déterminer ce mélange; c'eſt-à-dire,

de combiner en effet ces divers élémens entr'eux, de manière à en extraire la véritable valeur de σ. Ainsi σ étant le résultat de cette combinaison inconnue, nous la supposerons telle que...(R)

$$d\sigma = A\,d\vartheta + B\,dx + C\,d\mu + D\,d\nu + E\,dr + G\,ds + L\,dt,$$

& tout se réduit à assigner ces sept coèfficiens, qui ne contiennent que les mêmes lettres ϑ, x, ... t.

Il faut d'abord substituer cette valeur de σ dans H, I, K. Pour cela, commençons par effectuer cette substitution dans les quantités Γ, Ω, &c. Or en vertu de la formule J (§ 117),

$$\Gamma = \frac{d\sigma}{dr},\ \Omega = \frac{d\sigma}{ds},\ \&c;$$

on pourra donc égaler chacune d'elles à ces mêmes valeurs déduites de la formule précédente R; savoir

$$\frac{d\sigma}{dr} = A\frac{d\vartheta}{dr} + B\frac{dx}{dr} + C\frac{d\mu}{dr} + D\frac{d\nu}{dr} + E = \Gamma,$$

$$\frac{d\sigma}{ds} = A\frac{d\vartheta}{ds} + B\frac{dx}{ds} + C\frac{d\mu}{ds} + D\frac{d\nu}{ds} + G = \Omega,$$

&c.

$$\frac{d\sigma}{dy} = A\frac{d\vartheta}{dy} + B\frac{dx}{dy} + C\frac{d\mu}{dy} + D\frac{d\nu}{dy} = \Xi.$$

Il résultera de-là qu'après avoir mis, pour λ & pour les coèfficiens θ, χ, ρ, ϵ, γ, δ, ζ, leurs valeurs, ceux H, I, K de $\frac{d\Psi}{d\sigma}$ dans les trois équations N ne contiendront plus z, x, y, p et q que d'une manière explicite. Il sera facile dès-lors d'éliminer quatre de ces variables au moyen des valeurs de ϑ, x, μ & ν; & ce sera par la condition de l'anéantissement du coèfficient de la cinquième variable restante, qu'on déterminera la loi qui doit règner entre ceux A, B, &c. de la formule R. Appliquons ceci à l'exemple P ci-dessus que nous achèverons d'intégrer.

121. Ayant effectué dans le fyftême N toutes les fubftitutions néceffaires, toujours dans l'hypothèse de $\lambda = 1$, je vois d'abord qu'il n'y a aucune divifion préalable à faire. Je trouve enfuite, pour les coèfficiens de $\frac{d\Psi}{d\sigma}$,

$$H = syA + ([s+t][r+s]+rs)yB - styC + \left(\frac{3rs+2st+rt}{2}y^2+psy\right)D + (s+t)rE - (s+t)sG;$$

$$I = -sxA - rsxB - ([s+t]sy+s^2x)C + \left([s+t]\frac{sy^2}{2}+s^2xy-rsxy-psx\right)D + (s+t)sL; \quad K = \frac{r}{s}I;$$

qui ne renferment que trois des cinq variables z, x, y, p, q; favoir, y, p & x. Soient donc (*Formule* Q) (S). . . . . . $x+y=\vartheta$, $p+(r-s)y=\varkappa$, $q+(s-t)y=\mu$, $z+py-qy+\frac{r-2s+t}{2}y^2=\nu$. La valeur de $\varkappa$ me donnant $p=\varkappa-by$, où $b=r-s$, je conclus de cette nouvelle fubftitution, ... (T)

$$H = [As + B(\overline{s+t}\cdot\overline{r+s}+rs) - Cst + D\varkappa s]y + D\frac{(s+t)(r+2s)}{2}y^2 + E(s+t)r - G(s+t)s.$$

D'ailleurs en prenant la valeur de y au moyen des trois expreffions de $\varkappa$, μ & ν, il me vient $(a-b)y^2+2(\varkappa-\mu)y+2(z-\nu)=0$ où j'ai fait de plus, pour abréger, $a=s-t$; & comme cette équation prouve que y & y^2 font des fonctions de z telles qu'on ne peut faire difparoître cette dernière variable fans la première, il fuit que pour éliminer z, il faudra, dans la formule T, égaler féparément à zéro les coèfficiens de y & de y^2, d'où

$As + B(\overline{s+t}\cdot\overline{r+s}+rs) - Cst + D\varkappa s = 0$; $D=0$; E & G *indéterminées*. On tirera de même, des deux expreffions de I & K qui n'en font qu'une, en employant l'équation $y+x=\vartheta$, &

ayant égard à ce que D est déjà $=0$, $A + rB - tC = 0$; L *indéterminée.* Multipliant ensuite ce dernier résultat par s, & le comparant au premier, on verra que B doit être $= 0$, & conséquemment $A = tC$. Ainsi la formule R est réduite à

$$d\sigma = C t d\vartheta + C d\mu + E dr + G ds + L dt$$

qui est nécessairement une différentielle exacte; & cette dernière considération suffit, en vertu des règles connues, pour conclure $C = 1$, $L = \vartheta$, & $E = G = 0$; puisque dans l'expression de σ, les lettres r, s, t étant regardées comme constantes, on ne doit les conserver que lorsqu'elles sont liées inséparablement avec quelqu'une des autres variables z, x, y, p ou q.

On a donc $d\sigma = t d\vartheta + d\mu + \vartheta dt$ dont l'intégrale est $\sigma = t\vartheta + \mu = t(x+y) + q + (s-t)y = tx + sy + q$: & il résultera ultérieurement delà $\Gamma = 0$, $\Omega = y$, $T = x$, $\Sigma = 0$, $\Delta = 1$, $\Theta = 0$, $\Lambda = t$, $\Xi = s$, ce qui réduit le système N aux deux équations,

$$r\frac{d\Psi}{dr} - s\frac{d\Psi}{ds} = 0, \ \& \ \frac{d\Psi}{dt} = 0$$

dont l'intégrale est $\Psi = F(rs, \sigma)$: Ainsi en remettant pour σ sa valeur, l'intégrale cherchée de l'équation P (§ 119) est enfin

$$rs = \phi(tx + sy + q).$$

122. J'examinerai maintenant le cas général du système D(§ 113), qui est analogue à celui de l'équation Æ (§ 91) prise dans toute sa généralité. Je considère d'abord les deux dernières équations de ce système, qui désignent une double élimination. Appliquant donc ici les mêmes raisonnemens qu'à l'endroit cité, & supposant $G = \lambda E$, $I = \mu H$, $K = \omega H$, je change l'expression de $d\Psi$ (§ 75), en (U)

$$d\Psi = A dz + B dx + C dy + E(dp + \lambda dq) + H(dr + \mu ds + \omega dt),$$

dans laquelle je mettrai les valeurs de E & de H tirées des deux équations en queſtion, après y avoir fait les mêmes ſubſtitutions.

Pour parvenir à la connoiſſance de ces valeurs, je donne à ces deux mêmes équations la forme $\mathrm{a}H - \mathrm{b}E - \mathrm{d} = 0$, $\mathrm{m}H - \mathrm{n}E - \mathrm{p} = 0$, où $\mathrm{a} = \beta\omega\mu - \gamma\omega + \zeta$; $\mathrm{b} = \theta\omega\lambda t + \theta\omega s + \chi\lambda s + \chi r$; $\mathrm{d} = \theta\omega Aq + \theta\omega C + \chi Ap + \chi B$; $\mathrm{m} = \beta\omega^2 - \delta\omega + \zeta\mu$; $\mathrm{n} = \chi\omega\lambda t - \theta\omega\lambda s + \chi\omega s - \theta\omega r + \chi\mu\lambda s + \chi\mu r$; $\mathrm{p} = \chi\omega Aq - \theta\omega Ap + \chi\omega C - \theta\omega B + \chi\mu Ap + \chi\mu B$; & j'en conclus, pour E & H, les expreſſions

$$E = \frac{\mathrm{dm} - \mathrm{ap}}{\mathrm{an} - \mathrm{bm}},\ H = \frac{\mathrm{dn} - \mathrm{bp}}{\mathrm{an} - \mathrm{bm}},$$

d'où en effectuant les opérations indiquées, réduiſant, & nommant $\theta^2\omega - \theta\chi\mu + \chi^2 = \mathrm{u}$, $\beta\omega\mu\chi - \beta\omega^2\theta - \gamma\omega\chi + \delta\omega\theta + \chi\zeta - \theta\mu\zeta = \mathrm{v}$, $\beta\omega\mu\theta + \beta\omega\chi - \beta\mu^2\chi + \gamma\mu\chi - \gamma\omega\theta - \delta\chi + \theta\zeta = \mathrm{w}$, il réſultera

$$E = \frac{\mathrm{w}(Ap + B) - \mathrm{v}(Aq + C)}{\mathrm{v}(\lambda t + s) - \mathrm{w}(\lambda s + r)},$$

$$H = \mathrm{u}\frac{(\lambda t + s)(Ap + B) - (\lambda s + r)(Aq + C)}{\mathrm{v}(\lambda t + s) - \mathrm{w}(\lambda s + r)};$$

& enfin la formule U ci-deſſus deviendra, en adoptant la même forme que pour le ſecond ordre (§ 91), . . . (V)

$$d\Psi = A\left(dz + [dp + \lambda dq]\frac{\mathrm{w}p - \mathrm{v}q}{\mathrm{v}(\lambda t + s) - \mathrm{w}(\lambda s + r)} + [dr + \mu ds + \omega dt]\frac{(p[\lambda t + s] - q[\lambda s + r])\mathrm{u}}{\mathrm{v}(\lambda t + s) - \mathrm{w}(\lambda s + r)}\right)$$

$$+ B\left(dx + [dp + \lambda dq]\frac{\mathrm{w}}{\mathrm{v}(\lambda t + s) - \mathrm{w}(\lambda s + r)} + [dr + \mu ds + \omega dt]\frac{(\lambda t + s)\mathrm{u}}{\mathrm{v}(\lambda t + s) - \mathrm{w}(\lambda s + r)}\right)$$

$$+ C\left(dy - [dp + \lambda dq]\frac{\mathrm{v}}{\mathrm{v}(\lambda t + s) - \mathrm{w}(\lambda s + r)} - [dr + \mu ds + \omega dt]\frac{(\lambda s + r)\mathrm{u}}{\mathrm{v}(\lambda t + s) - \mathrm{w}(\lambda s + r)}\right).$$

Quant à la première des équations D, en y faiſant les mêmes ſubſtitutions, elle ſe réduira à $\rho - \chi\mu + \theta\omega = 0$; & ce ſera une équation de condition à vérifier, lorſqu'on aura déterminé μ & ω. Il en eſt de même de la huitième de celles C (§ 113); ce qui a également lieu dans le ſecond ordre (§ 91).

Si

Si on vouloit confidérer en effet cette formule dans toute fa généralité, on feroit $B = \xi A$, $C = \upsilon A$; & alors le feul coèfficient arbitraire A feroit commun à tous fes termes. Cette formule contenant les huit variables z, x, y, p, q, r, s, t, il s'agiroit de déterminer les cinq indéterminées λ, μ, ω, ξ & υ de manière à la rendre fufceptible de devenir une différentielle exacte au moyen d'un facteur; ce qui eft un problème très-compliqué.

123. Bornons-nous, comme dans le fecond ordre, à confidérer chacun des membres de cette formule en particulier (§ 91); par exemple le premier terme A. Nous y voyons les différentielles des fix variables z, p, q, r, s, t. Il faut donc 1°. que ce terme ne contienne aucune des deux autres x, y; & 2°. qu'il foit fufceptible d'intégration au moyen d'un facteur. Examinons maintenant comment on pourra, en vertu de la détermination des trois indéterminées λ, μ, ω, établir ces deux conditions, lorfqu'elles n'auront point lieu. Commençons par la feconde fraction $\frac{u}{v(\lambda t + s) - w(\lambda s + r)}$. Il eft évident que fi u contient une feconde variable, par exemple x, on ne pourra la chaffer de cette fraction, qu'en anéantiffant les termes du dénominateur qui ne la contiennent point, & en la faifant disparoître par la divifion; & que fi au contraire u ne la contient point, il faudra anéantir les termes du dénominateur où elle eft contenue.

Suppofons que ce fecond cas ait lieu (il fera aifé d'appliquer les mêmes raifonnemens au premier) & donnons au dénominateur la forme $vs - wr + \lambda (vt - ws)$. L'indéterminée λ ne contenant pas x, il eft certain qu'il faudra faire difparoître cette variable féparément de $vs - wr$ & de $vt - ws$. Voilà donc, par l'élimination

d'une feule variable, les deux indéterminées μ & ω qui fe trouvent déterminées ; puifque les valeurs de v & w ne font pas compliquées de λ. On ne pourra donc faire difparoître qu'une feule variable fuperflue comme dans le fecond ordre ; car on verra clairement tout-à-l'heure que l'indéterminée λ a une deftination tout-à-fait différente, & qu'elle ne peut être employée à l'élimination d'une feconde variable. Cela pofé, il faudra de plus que cette même détermination de μ & ω expulfe la variable fuperflue du numérateur $\text{w}p - \text{v}q$ de la première fraction, fans quoi la propofée ne fera pas intégrable par la méthode préfente. Et enfin tout cela étant admis, la troifième indéterminée λ fe déterminera par la condition que le terme entier A foit intégrable au moyen d'un facteur. Eclairciffons ceci par un exemple.

124. Soit propofée l'équation du troifième ordre, ... (W)

$$qst\left(\frac{dr}{dx}\frac{ds}{dy}-\frac{dr}{dy}\frac{ds}{dx}\right)-qrs\left(\frac{ds}{dx}\frac{dt}{dy}-\frac{ds}{dy}\frac{dt}{dx}\right)+s^2t^2\frac{dr}{dx}+(rst^2-pqzt-s^3t-q^2zs-pq^3-2stx)\frac{dr}{dy}$$
$$+(pqsz+q^2rz+p^2q^2-2rtx)\frac{dt}{dx}-(rs^3+2rsx)\frac{dt}{dy}+qrstz+p^2qst-qs^3z-pq^2s^2-2ptzx-$$
$$2qszx-2pq^2x=0,$$

on trouvera d'abord $\text{u} = q^2s^2t^2\omega$ qui ne contient point x ; & faifant les mêmes fubftitutions dans v & w ; concluant enfuite delà les valeurs de $\text{v}s - \text{w}r$ & de $\text{v}t - \text{w}s$; & égalant enfin les coëfficiens de x à zéro dans chacune de ces deux valeurs, on parviendra aux deux équations $2st\omega = s^2\mu + rs$ & $(rt^2 + s^2t)\,\omega = rst\mu + rs^2$, d'où éliminant ω, on aura, pour déterminer μ, $(rst - s^3)\,\mu = r^2t - rs^2$ ou $s\mu = r$, & enfuite $t\omega = r$. La fubftitution de ces valeurs dans u, v & w donnera $\text{u} = q^2rs^2t$; $\text{v} = q^2rs\,(psz + qrz + p^2q)$; $\text{w} = q^2rs(ptz + qsz + pq^2)$. On aura donc

$$\mathrm{v}s - \mathrm{w}r = pq^2rs(s^2z - rtz + pqs - q^2r),$$
$$\mathrm{v}t - \mathrm{w}s = q^3rs(rtz - s^2z + p^2t - pqs), \text{ \& enfin}$$
$$\mathrm{w}p - \mathrm{v}q = q^2rsz(p^2t - q^2r),$$

d'où l'on voit que la variable x eſt également diſparue, comme il eſt néceſſaire. Il résultera delà, pour le terme A; c'eſt-à-dire, pour l'expreſſion cherchée de $d\Psi$,

$$d\Psi = A\left(dz + \frac{(dp + \lambda dq)(p^2t - q^2r)z + (stdr + rtds + rsdt)(ps - qr + [pt - qs]\lambda)}{(ps^2 - q\lambda s^2 - prt + q\lambda rt)z + p^2qs - pq^2r + \lambda p^2qt - \lambda pq^2s}\right).$$

Il reſte encore à déterminer λ par la condition que cette fonction différentielle ſoit intégrable au moyen d'un facteur. Nous regarderons ce problème comme réſolu, afin de ne pas interrompre notre opération. Or on trouveroit $\lambda = \frac{p}{q}$; faiſant donc cette dernière ſubſtitution, on parviendra à l'expreſſion intégrable

$$d\Psi = A\left(dz + \frac{z(qdp + pdq) + stdr + rtds + rsdt}{pq}\right);$$

& intégrant en effet, après avoir multiplié par le facteur pq, on aura $\Psi = pqz + rst$.

Le but de cet exemple eſt uniquement de développer tous les détails d'une pareille opération. Ainſi nous nous abſtiendrons de chercher la ſeconde fonction Π; l'application des mêmes principes aux deux autres termes B & C étant trop évidente pour avoir beſoin d'explication.

125. On voit combien, en avançant dans les ordres plus élevés, les ſolutions ſe compliquent. Non-ſeulement on rencontre déjà ici deux indéterminées au-lieu d'une, pour l'élimination de la variable ſuperflue unique; mais après cette première préparation, l'expreſſion n'eſt pas même encore parvenue, comme dans le ſecond ordre, à ſon état de perfection. Il faut, par la détermination d'une troi-

fiſtème indéterminée, lui faire ſubir une nouvelle transformation qui la rende ſuſceptible d'intégration au moyen d'un facteur.

Cette dernière opération ne préſentera d'autre difficulté que ſa longueur. Elle ſe réduit à réaliſer dix des vingt équations de condition que fourniſſent toutes les combinaiſons poſſibles trois à trois de ces ſix variables. * La variable principale de ces équations ſera donc λ, qui eſt conſéquemment donnée par un ſyſtème ſemblable à celui M (§ 58), dont il ne différera que par le nombre des équations, & par celui des variables ſecondaires, qui ſera ici ſix au-lieu de quatre. Il ſuit delà que, dans chacune de ces équations à quatre variables, trois autres variables ſont traitées comme conſtantes ; & que les quantités P, Q, G, H (§ 60), qui doivent compléter l'expreſſion de Ψ, ſeront par conſéquent fonctions de ces trois variables. Du reſte on n'aura qu'à ſe conformer à ce que j'ai enſeigné dans pluſieurs des chapitres précédens, & notamment dans le huitième (§ 104), en obſervant de prendre autant d'équations de comparaiſon qu'il ſera néceſſaire, pour que la variable principale λ ſoit déterminée par rapport aux ſix variables qu'elle peut renfermer ; c'eſt-à-dire quatre. Les autres ſeront des équations de condition qu'il ſuffira de vérifier après qu'on aura déterminé λ, ſi l'intégrabilité de la fonction, au moyen de ce facteur, n'eſt point aſſez apparente pour diſpenſer même de cette vérification.

126. On peut réduire ici, comme dans le ſecond ordre, toutes les intégrales qui dépendent de cette méthode à trois formules analogues à celles de l'article 92. La différence eſt qu'au lieu des

* Voyez Leçons de calcul diff. & intég. de M. Couſin, édit. de 1777, page 293 ; ou édit. in-4.° de 1796, art. 306.

deux lettres p & q qui font communes à chacune des expreffions de Ψ & de Π, il y en aura ici cinq r, s, t, p & q. Mais de cette augmentation de variables il réfulte une complication étonnante dans les calculs. Je me bornerai donc à difcuter la première de ces formules; c'eft-à-dire, que je démontrerai la généralité de la méthode que j'ai employée, pour déterminer la première fonction Ψ dans l'intégrale de l'équation W (§ 124). Il fera facile après cela d'appliquer les mêmes raifonnemens à la détermination de Π, & aux deux autres formules.

Confidérons donc la formule générale V (§ 122). Nous y voyons la fraction $\frac{u}{v(\lambda t+s)-w(\lambda s+r)}$ qui eft commune aux trois termes A, B & C. Dans chacun de ces termes elle eft à la vérité multipliée par un facteur différent; mais λ ne devant pas contenir la variable à éliminer, aucun de ces facteurs n'en fera compliqué. Il fuffira donc de confidérer cette fraction abftractivement de fon facteur. Et pour cela nous la mettrons fous la forme ... (X) $\frac{u}{vs-wr+\lambda(vt-ws)}$. Maintenant (§ 92, 75) dans la première formule où Ψ contient z & Π contient x, $B=C=M=P$ eft $=0$. Subftituant donc ces valeurs dans les équations C (§ 113), nous aurons les coëfficiens β, γ, δ & ζ tels qu'ils doivent être dans les expreffions de v & w (§ 122), pour correfpondre à cette même formule. Quant à ceux θ & χ, ils n'éprouveront point de variation, puifqu'ils ne renferment aucune de ces lettres. Le développement de ces deux expreffions nous donnera deux réfultats très-compliqués, au moyen defquels il fera facile de conclure la valeur des deux binomes $vs-wr$ & $vt-ws$. Bornons-nous au premier au-

donnerai la forme la plus commode pour la discussion ac-
savoir ... (Y) $vs - wr =$

$$-\mu HKr + \omega I^2 s - \omega HKs + \omega IHr + K^2 s) NT + (\mu HKs - \omega IHs - \omega H^2 r$$
$$+ KHr) NV + (\mu H^2 r + \omega H^2 s - KHs - HIr) NW + (-\mu^2 KHrs - \mu\omega KHs^2$$
$$+ \mu\omega IHrs + \omega^2 IHs^2 - \mu KHr^2 + \omega IHr^2) QT + (-\mu\omega H^2 rs - \omega^2 H^2 s^2 + \mu KHst$$
$$+ \omega HKs^2 - \omega H^2 r^2 + HKr^2) QV + (\mu^2 H^2 rs + \mu\omega H^2 s^2 - \mu HIrs + \mu H^2 r^2$$
$$- \omega HIs^2 - HIr^2) QW + (-\mu^2 HKrt - \mu\omega HKst + \mu\omega IHrt + \omega^2 IHst - \mu IKs^2$$
$$+ \mu IKrt - \mu HKrs + \omega I^2 s^2 - \omega HKs^2 + \omega HKrt - \omega I^2 rt + \omega HIrs + K^2 s^2 - K^2 rt)$$
$$RT + (-\mu\omega H^2 rt - \omega^2 H^2 st + \mu KHs^2 + \omega KHst - \omega IHs^2 + \omega HIrt - \omega H^2 rs$$
$$+ HKrs) RV + (\mu^2 H^2 rt + \mu\omega H^2 st - \mu HIrt + \mu H^2 rs - \omega HIst + \omega H^2 s^2 - \omega H^2 rt$$
$$- HKs^2 + HKrt - HIrs) RW + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(\mu^2 GKrt - \mu\omega IGrt - \omega KGrt + \mu^2 EKrs - \mu\omega EIrs + \mu KGrs - \omega IGrs +$$
$$\mu^2 AKqr - \mu\omega AIqr - \omega AKqr + \mu\omega GKst - \omega^2 GIst + \mu\omega EKs^2 - \omega^2 EIs^2 +$$
$$\omega GKs^2 + \mu\omega AKqs - \omega^2 AIqs + \mu EKr^2 - \omega EIr^2 + \mu AKpr - \omega AIpr + \omega AKps)$$
$$T^2 + (\mu\omega GHrt - \mu GKrt + \omega GIrt + \mu\omega EHrs - \mu EKrs + \omega GHrs - GKrs +$$
$$\mu\omega AHqr - \mu AKqr + \omega AIqr + \omega^2 GHst - \omega GKst + \omega^2 EHs^2 - \omega EKs^2 - \omega GIs^2$$
$$+ \omega^2 AHqs - \omega AKqs - \omega AIps + \omega EHr^2 - KEr^2 + \omega AHpr - AKpr) TV +$$
$$(-\mu^2 GHrt + \omega GHrt + GKrt - \mu^2 EHrs + \mu EIrs - \mu GHrs + GIrs - \mu^2 AHqr$$
$$+ \omega AHqr + AKqr - \mu\omega GHst + \omega GIst - \mu\omega EHs^2 + \mu GIs^2 + \omega EIs^2 - \omega GHs^2$$
$$- GKs^2 - \mu\omega AHqs + \omega AIqs + \mu AIps - \omega AHps - AKps - \mu EHr^2 + EIr^2$$
$$- \mu AHpr + AIpr) TW + (Gs^2 + Aps - Grt - Aqr)\,\omega HV^2 + (-Gs^2 - Aps +$$
$$Grt + Aqr)\,\mu HVW + (Gs^2 + Aps - Grt - Aqr)\,HW^2.$$

De plus le numérateur u prendra la forme ... (Z)

$$(\omega I^2 - \mu IK + K^2)T^2 + (\mu HK - 2\omega HI)TV + (\mu HI - 2HK)TW + \omega H^2 V^2 - \mu H^2 VW + H^2 W^2;$$

127. Remarquons maintenant 1°. que la variable x, n'étant contenue que dans Π, ne peut aussi se rencontrer que dans les coëfficiens différentiels de cette fonction ; savoir ici N, Q, R, T, V & W; & partant qu'aucun des coëfficiens, tant des produits NT, NV, NW, &c. qui composent la première partie de la formule Y, que de ceux T^2, TV, &c. qui composent la seconde, n'en sera compliqué ; 2°. Qu'aucun de ces premiers produits NT, NV, &c. ne se trouve

dans l'expreſſion Z de u ; & conſéquemment, que cette première partie eſt une fonction de x (outre les autres variables), qui eſt abſolument étrangère au numérateur de la fraction X : nous nommerons cette fonction Ω ;

3°. Que la ſeconde partie ne préſente au contraire que des termes T^2, TV, &c. qu'on rencontre également dans le développement Z de u, quoiqu'affectés de coëfficiens différens ;

4°. Et enfin, que ſi au moyen des équations $\mu H - I = 0$, $\omega H - K = 0$ (§ 122), on élimine μ & ω de cette ſeconde partie, & en même tems de Z, qui par-là ſe réduira à . . . . (A a)

$$K^2 T^2 - IKTV + (I^2 - 2KH) TW + KHV^2 - IHVW + H^2 W^2,$$

cette même ſeconde partie deviendra égale à cette dernière expreſſion multipliée par le facteur $\frac{G}{H}(s^2 - rt) + \frac{A}{H}(ps - qr)$ qui ſoit $= \Gamma$.

Ainſi la ſeconde partie de la formule Y eſt *eſſentiellement* équivalente au produit Γu ; & il ſuit delà que x ne peut exiſter dans la fraction X, que ſous deux formes différentes ; ſavoir, celle u & celle Ω. Donc

1°. Si u ne contient point x, Ω contenant ſeule cette variable, puiſque par hypothèſe l'une ou l'autre doit la contenir, il faudra, pour la faire diſparoître, anéantir cette dernière fonction ;

2°. Si au contraire u la contient ; ſoit que Ω la contienne auſſi, ou qu'elle ne la contienne point, comme elle ne peut la contenir que d'une manière différente, il faudra encore l'anéantir, afin de rendre la fraction entière X diviſible par u.

Avant d'aller plus loin, je ferai obſerver que je n'ai fait juſqu'ici mention que de la partie vs — wr du dénominateur ; mais que la

même chofe doit s'entendre de $vt - ws$: ce qui fuppofe, comme il eft en effet, que celle-ci prendra une forme $\Omega' + \Gamma' u$, Ω' & Γ' étant des quantités analogues à celles Ω & Γ. On auroit donc, pour expreffion du dénominateur entier, $\Omega + \Gamma u + \lambda (\Omega' + \Gamma' u)$; & conféquemment en anéantiffant Ω & Ω' chacune en particulier, il refteroit $(\Gamma + \lambda\Gamma')u$.

Cela pofé je continue ma démonftration. Il faut donc anéantir les deux parties Ω & Ω' du dénominateur. Mais on verra aifément qu'en réalifant, dans les coëfficiens des produits NT, NV, &c. dont la totalité conftitue Ω, les deux équations $\mu H - I = 0$, $\omega H - K = 0$, chacun d'eux devient zéro : & la même chofe doit être admife pour Ω' ; donc l'opération d'anéantir Ω & Ω' qui, comme on vient de voir, n'eft que celle de faire difparoître x de la fraction X, ne produit d'autre effet, que de réalifer les deux équations $\mu H - I = 0$, $\omega H - K = 0$. Concluons delà que, toutes les fois qu'une propofée fera fufceptible d'être intégrée par cette méthode, on pourra faire difparoître x de la fraction X, au moyen des deux indéterminées μ & ω ; foit que le numérateur u contienne cette variable, ou non ; ce qui eft parfaitement analogue à ce que j'ai démontré pour le fecond ordre (§ 93).

128. Examinons maintenant ce que deviendra la fraction....(Ab)

$$\frac{wp - vq}{v(\lambda t + s) - w(\lambda s + r)}.$$

On voit d'abord que le dénominateur étant le même que celui de X, il fe réduira également, par les opérations précédentes, à $(\Gamma + \lambda\Gamma')u$. Quant au numérateur, au moyen des expreffions de v & w qui ont fervi à ces mêmes opérations, on trouvera qu'il eft de la forme

$\Omega'' + \Gamma'' u$,

$\Omega'' + \Gamma''u$, Ω'' étant une fuite de termes femblables à ceux de la première partie Ω de Y, & dont les coëfficiens, quoique différens de ceux-ci, s'anéantiffent cependant de même, lorfqu'on y met, pour μ & ω, leurs valeurs $\frac{I}{H}$ & $\frac{K}{H}$. Ainfi en conféquence des valeurs de μ & ω déterminées par les deux équations $\Omega = 0$, $\Omega' = 0$, la fonction Ω'' s'évanouïra d'elle-même ; & la fraction Ab fe réduira à $\frac{\Gamma''}{\Gamma + \lambda\Gamma'}$; Γ' étant $= \frac{E}{H}(rt - s^2) + \frac{A}{H}(pt - qs)$; & $\Gamma'' = \frac{G}{H}(pt - qs) + \frac{E}{H}(ps - qr)$.

Il réfulte de tout ceci que la détermination des deux fonctions μ & ω fuffit pour faire difparoître la variable x de tout le premier terme A de la formule V. Il ne contiendra plus alors que z, p, q, r, s, t & la troifième indéterminée λ qui, comme je l'ai dit ci-deffus (§ 124), devra fe déterminer par la condition d'intégrabilité de cette valeur de $d\Psi$.

Il nous refte encore à démontrer cette dernière propofition ; c'eft-à-dire, qu'il faut faire voir que, l'expreffion de $d\Psi$ étant fuppofée, en vertu des opérations précédentes, ne plus contenir x, fi on y fait $\lambda = \frac{G}{E}$, elle fera en effet fufceptible d'intégration au moyen d'un facteur. Pour cela nous lui donnerons fa nouvelle forme, réfultant de l'élimination de cette variable ; favoir, ... (Ac)

$$d\Psi = A\left(dz + [dp + \lambda dq]\frac{\Gamma''}{\Gamma + \lambda\Gamma'} + \frac{Hdr + Ids + Kdt}{H} \times \frac{ps - qr + \lambda[pt - qs]}{\Gamma + \lambda\Gamma'}\right).$$

Or en fubftituant dans celle-ci à Γ, Γ' & Γ'' leurs valeurs, & y mettant $\frac{G}{E}$ au-lieu de λ, elle fe réduit à

$$d\Psi = A\left(dz + \frac{Edp + Gdq}{A} + \frac{Hdr + Ids + Kdt}{A}\right)$$

qui devient une différentielle exacte étant multipliée par le facteur A, puisqu'elle n'est alors que l'expression primitive de $d\Psi$ (§ 75); donc &c.

129. Nous avons dit ci-dessus que Ω & Ω' deviennent zéro (§ 127) lorsqu'on fait en même tems $\mu H - I = 0$, & $\omega H - K = 0$. Il est facile de s'en convaincre en observant que, dans la partie Ω de la formule Υ, on peut donner aux coëfficiens de chacun des produits NT, NV, &c. qui la composent, la forme $(\mu H - I)$ P + $(\omega H - K)$ Q. En effet ils sont tous compris dans la formule générale $(\mu H - I)\, a + (\omega H - K)\, b + (\mu K - \omega I)\, c$; c'est-à-dire que tous les termes qui y entrent ont, deux à deux, pour facteur un de ces trois binomes : & de plus $\mu K - \omega I$ n'est que $(\mu H - I)\, \omega - (\omega H - K)\, \mu$. Il en sera de même de Ω' dont le développement peut se déduire immédiatement de celui de Ω. Il suffit pour cela de mettre dans ce dernier s pour r & t pour s, dans les trois premiers termes où r & s sont linéaires, cette même substitution n'ayant lieu, dans les six autres termes, qu'à l'égard de la première lettre de chacun des produits rs, s^2, sr, &c. qui deviennent par-là s^2, ts, tr, &c.; & d'y ajouter de plus au coëfficient de QT, $(\omega I^2 - \omega HK - \mu IK + K^2)$ $(tr - s^2)$; à celui de QV, $- \omega HI\, (tr - s^2)$; & enfin à celui de QW, $(\omega H^2 - HK)\, (tr - s^2)$, quantités qui s'anéantiront toutes en faisant dans $tr - s^2$ la substitution inverse de s pour t, & de r pour la première s de s^2. Aussi verra-t-on, en échange, de pareilles quantités s'anéantir dans les trois coëfficiens de RT, RV & RW par la substitution directe ci-dessus. Ayant donc développé de cette manière abrégée la partie Ω', on trouvera que tous ses termes sont de même nature que ceux de Ω, & on conclura ultérieurement que,

par l'anéantiſſement ſimultané de Ω & de Ω', on obtiendra deux équations entre μ & ω, dont chacune aura *eſſentiellement* les deux racines $\mu H - I = 0$, $\omega H - K = 0$ qui ſe manifeſteront par la combinaiſon de ces deux équations.

Il pourra ſe préſenter ici la même difficulté que dans le ſecond ordre, touchant la manière de reconnoître les termes qu'il faut annuller lorſque u, Ω & Ω' (§ 127) contiennent en même tems la variable à éliminer x. On ſuivra à cet égard la règle donnée (§ 100), ou plutôt celle plus générale qui ſe trouve dans le ſupplément placé à la tête de ce recueil, & qui eſt conſignée dans la note *ad pag.* 182 *lin.* 4.

Si la fonction Ψ ne contenoit pas r, on ſent qu'alors H étant zéro, $\frac{I}{H}$ & $\frac{K}{H}$, c'eſt-à-dire μ & ω deviendroient $= \infty$. Il faudroit dans ces cas-là prendre, pour dénominateur commun, au-lieu de H, un des deux coëfficiens de ds ou dt qui ne ſoit pas nul. Du reſte toutes les opérations ſeront les mêmes.

130. Ayant ainſi déterminé Ψ, on pourra, lorſque la propoſée contiendra en même tems z & x, procéder d'une manière analogue à la détermination de ſa cofonction Π. Mais ils ſeroit plus commode de ſavoir déduire immédiatement la ſeconde fonction Π de la propoſée elle même : & c'eſt de quoi je vais m'occuper; d'autant que cette recherche devient indiſpenſable dans tous les cas où l'équation à intégrer ne contient qu'une variable. Je commencerai par les équations du ſecond ordre, & je ſaiſirai cette occaſion d'expoſer une nouvelle méthode beaucoup plus ſimple & plus directe que celle de l'art. 98.

Suppofons donc que la propofée contenant ζ & x, on ait déterminé Ψ. Nous avons dès-lors $d\Psi$ & conféquemment A, E & G. De plus les coëfficiens ϵ, γ, &c. font tous connus ; mais comme il fe pourroit qu'il manquât à la propofée un certain facteur ω, pour être précifément dans l'état de la formule générale Æ (§ 56), nous lui rendrons ce facteur, & il réfultera de là $ER - GQ = \omega\epsilon$, & ainfi de fuite pour les quatre autres équations qui appartiennent à chacune des trois formules (§ 92). Cela pofé, nous avons cinq équations pour déterminer les trois inconnues N, Q & R d'où dépend $d\Pi$; & fon expreffion finale fera de la forme $d\Pi = \omega(N\,dx + Q\,dp + R\,dq)$ que le facteur indéterminé ω fervira à rendre une différentielle exacte. Cette méthode eft également applicable à tous les cas. Elle a de plus l'avantage de n'exiger aucune transformation dans celui de E, G, Q ou $R = 0$. En effet en confidérant les formules de l'art. 92, y compris l'équation commune $\epsilon = ER - GQ$, on verra que lorfque E, par exemple, eft $= 0$ dans la première, on ne peut plus à la vérité déterminer N au moyen du coëfficient ζ, puifque le terme EN difparoît ; mais on a alors celui ϑ ou celui η pour y fuppléer ; & ainfi de fuite. Quant aux équations fuperflues qu'on n'aura pas employées, elles deviennent évidemment des équations de condition, qui doivent être identiques d'elles-mêmes, en vertu du réfultat qu'on aura obtenu par le moyen des autres.

Je ferai remarquer en paffant, qu'on effayeroit inutilement d'appliquer cette méthode aux équations ordinaires à quatre variables (§ 23). La différence eft que dans celles-là chaque cofonction n'eft pas plutôt Π que toute autre combinaifon de Ψ avec Π (§ 6).

Ainſi la ſeconde fonction ne peut eſſentiellement ſe préſenter que ſous la forme $F(\Pi, \Psi)$. Dans celles, au contraire, dont-il s'agit ici, la fonction Ψ étant une fois déterminée, ſa cofonction Π eſt néceſſairement *une*, parce qu'en faiſant, par exemple, $B = C = M = P = 0$, nous avons exprimé dans le calcul que Ψ ne contient ni x ni y; & Π ni z ni y; & ainſi des autres. Il ſuit delà qu'aucune combinaiſon de Ψ avec Π ne peut remplacer Π elle même; puiſque chacune de ces combinaiſons ſeroit évidemment compliquée des deux variables z & x; ce qui eſt contre l'hypothèſe.

131. Paſſons maintenant au troiſième ordre; & conſidérons les équations C (§ 113). Nous voyons d'abord que les trois premières ſe réduiſent à deux; la troiſième n'étant qu'une ſuite néceſſaire des deux autres, comme l'exprime clairement la première des équations ſubſéquentes D. On a enſuite, non compris le terme ſans différence partielle du troiſième ordre, quatre autres équations; ce qui fait en tout ſix; & on a de même ſix indéterminées N, Q, R, T, V & W (je me tiens toujours à la première formule dans laquelle Ψ ne contient que z des trois variables primitives; & Π que x). Il ſembleroit donc qu'on doit parvenir à un réſultat analogue à celui du ſecond ordre, en ſuivant la même méthode, & il eſt naturel d'en faire l'eſſai.

On a d'abord la quatrième équation qui eſt entre les trois indéterminées Q, R & T. Chaſſant enſuite V de la cinquième, & W de la ſeptième au moyen des deux premières, & éliminant ultérieurement N de ces deux réſultats, on obtient une ſeconde équation entre les trois mêmes indéterminées. Une opération ſemblable, en ſubſtituant la ſixième équation à la cinquième, en fournira une

troisième de même nature. Voilà donc trois équations entre trois inconnues ; & conséquemment tout paroît déterminé. Mais ces trois équations sont d'une telle forme que, hormis la première, elles ne nous apprennent rien. En effet celle-ci étant ... (Ad)

$$HsQ + HtR - (Gt + Es + Aq)T = \varepsilon,$$

il se trouve que les deux autres se réduisent à $IK\varepsilon = (\mathrm{M})$, & $K^2\varepsilon = (\mathrm{N})$, ces deux seconds membres n'étant fonctions que de quantités connues comme le sont I, K & ε : desorte qu'au lieu de faire connoître les trois inconnues, elles assignent seulement chacune une certaine loi qui doit regner entre les coèfficiens θ, χ, ε, γ, δ, ζ & les autres quantités précédemment connues par la détermination de Ψ.

Il faut donc prendre une autre route. Pour cela, je combinerai seulement la septième des équations C, après en avoir éliminé W, avec celle Ad, par l'élimination de leurs termes sans différence partielle, ce qui me donnera une résultante entre Q, R, T & N; savoir, en nommant $Gs + Er + Ap = \Delta$, & $Gt + Es + Aq = \Lambda$ ... (Ae)

$$(\zeta H^2 s + \varepsilon KHr - \chi\Delta Hs)Q + (\zeta H^2 t + \varepsilon KHs - \chi\Delta Ht)R$$
$$-(\zeta H\Lambda + \varepsilon K\Delta - \chi\Delta\Lambda)T + \varepsilon KHN = 0.$$

La raison pour laquelle j'ai combiné de cette manière ces deux équations, plutôt que de toute autre, est qu'il ne doit pas exister de terme sans différence partielle dans l'équation d'où dépend la détermination de Π; puisque son intégrale doit être de la forme $\Pi = F(\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C})$, dans laquelle la variable principale ou fonction Π n'est accompagnée d'aucune des variables secondaires (§ 35).

Appliquons maintenant la formule générale Ae à l'exemple de

l'art. 124. Nous aurons l'équation....(A f)

$$s^2 t (rt - s^2 - 2x) Q - 2st^2 x R - (qrst z + p^2 qst - qs^3 z - pq^2 s^2 - 2ptzx - 2qszx - 2pq^2 x) T + s^2 t^2 N = 0.$$

qu'il s'agiroit d'intégrer par la méthode de l'art. 35. Mais on s'appercevra bientôt que les variables p, q, r, x ne s'y trouvent pas diſtribuées dans les coèfficiens, de façon à rendre cette équation entièrement intégrable par cette méthode. On ne parvient à déterminer qu'une ſeule des trois cofonctions, au moyen des deux termes R & N. En effet, en écrivant ici y pour q & z pour Π, on obtiendra dans la quatrième formule de l'art. cité,

$$dz = p \left(dx + \frac{s}{2x} dy \right),$$

qui en remettant q pour y & Π pour z, donne $\Pi = F(x^2 + qs, B, C)$, où B & C reſtent inconnues.

Mais ſuppoſons que, par quelqu'autre méthode, on ait intégré complètement l'équation Af. On aura donc, pour Π, trois valeurs différentes A, B, C, qui ſatisferont également à cette équation. Mais attendu que s & t y ont été traitées comme conſtantes, la forme générale de chacune de ces cofonctions ſera $mA^p + n$; m, n, & p étant des fonctions de s & t ſeulement (*ſuppl. page* 107), * qu'il faudra déterminer au moyen des trois premières équations C (§ 113). De plus, comme il ne peut y avoir qu'une valeur vraie de Π, il arrivera néceſſairement qu'une ſeule de ces fonctions ſera compatible avec ces mêmes équations. Et c'eſt aux deux autres

* Je déſigne, par cette expreſſion (*ſuppl. page* k), les citations qui renvoient au ſupplément placé à la tête de ce recueil; le chiffre k indiquant la page du premier recueil à laquelle ſe rapporte la note citée.

fonctions qu'appartiendront tous les z qui compliqueront l'équation Ae, lorſque la propoſée contiendra, comme ici celle Af, les deux variables x & z.

132. Examinons maintenant ſi la fonction $x^2 + qs$ eſt la véritable valeur de Π. Comme les trois premières équations C ne contiennent point de quantités logarithmiques (*ſuppl. page* 107), nous employerons la formule ordinaire $\Pi = \mathrm{m}(x^2 + qs) + \mathrm{n}$. Or les deux premières de ces équations donnent $t\frac{d\Pi}{dt} - r\frac{d\Pi}{dr} = 0$ & $s\frac{d\Pi}{ds} - r\frac{d\Pi}{dr} = qs$. Mettant donc, pour $\frac{d\Pi}{dr}, \frac{d\Pi}{ds}, \frac{d\Pi}{dt}$, leurs valeurs, réſultant de l'expreſſion précédente, & faiſant $d\mathrm{m} = \mu\, ds + \mu' dt$, $d\mathrm{n} = \nu\, ds + \nu' dt$, nous aurons $t(x^2 + qs)\mu' + t\nu' = 0$ & $s\,\mathrm{m}\, q + s(x^2 + qs)\mu + s\nu = qs$. Ainſi, parce que m & n ne doivent contenir que s & t, 1°. $\mu' = 0$, & $\nu' = 0$; & 2°. $\mu = 0$ & $\nu = 0$: c'eſt-à-dire, que m & n ſont conſtans. Il reſte alors $s\,\mathrm{m}\, q = sq$; donc $\mathrm{m} = 1$; & la véritable valeur de Π n'eſt autre que la fonction $x^2 + qs$ elle-même, telle que nous l'avons trouvée.

Nous venons de montrer ce qu'il faut faire, lorſque la propoſée contient deux, ou au moins une des trois variables z, x, y. Pour ſuivre la même marche que dans le ſecond ordre, ce feroit ici le lieu de diſcuter le cas où elle ne contient aucune de ces variables. Mais on verra aiſément que la méthode de l'article 101 ne peut point s'appliquer au troiſième ordre. En effet, conſidérons la première formule de cet article, qui devient ici $\Psi = (r, s, t, p, q) + z$, & $\Pi = [r, s, t, p, q] + x$. On auroit donc, outre $B = C = M = P = 0$, les deux nouvelles données $A = 1$, $N = 1$. Ainſi des ſeize coëfficiens qui compoſent la totalité des deux expreſſions

$d\Psi$,

$d\Psi$, $d\Pi$, il en resteroit dix à déterminer. Mais on n'a pour cela que deux des trois premières équations C, & les cinq dernières y compris celle que fournit le terme sans différence particlle : ce qui fait en tout sept, nombre insuffisant pour effectuer cette détermination. Il faudroit donc, pour que cette formule fût de nature à être intégrée par cette méthode, la restreindre à

$$\Psi = (r, s, t) + p + q + z \ \& \ \Pi = [r, s, t] + p + q + x,$$

dans laquelle il n'y a que six coëfficiens à déterminer au moyen de sept équations, comme dans le second ordre, il y avoit quatre coëfficiens, & cinq équations pour les déterminer. Mais outre que cette restriction réduit la formule à un cas trop particulier pour être d'un grand usage, il seroit encore difficile de distinguer les équations qui s'y rapportent; puisque les lettres p, q sont essentiellement partie des coëfficiens ϵ, γ, δ, ζ & η, indépendamment des valeurs de A, B, &c. M, N, &c., comme on peut voir par les formules C.

Nous ne pouvons donc que renvoyer à celle de l'article 122; soit dans toute sa généralité; soit en la réduisant à deux seulement des trois termes A, B, C, comme (§ 103), toutes les équations qui n'appartiennent pas à la classe de celles que nous avons examinées dans ce chapitre : & nous terminerons ici nos recherches sur ce sujet, en observant que les principes sur lesquels sont fondées ces diverses méthodes, s'appliqueroient également aux ordres plus élevés. Mais les calculs déjà très prolixes que nous avons rencontrés dans celui-ci, indiquent suffisamment avec quelle rapidité chaque accroissement dans l'exposant de l'ordre de ces équations augmenteroit la complication des formules.

CHAPITRE ONZIÈME.

Recherches ultérieures ſur l'intégration générale des équations à trois variables du premier degré & d'un ordre quelconque ſupérieur au premier, qui ont une intégrale de l'ordre immédiatement inférieur.

133. JE me propoſe ici de préſenter, ſous un nouveau jour & d'une manière uniforme, l'intégration générale de ces équations. Juſqu'ici j'avois établi (§ 84) que, dans leur intégrale, les différences partielles de chaque ordre conſtituoient ſtrictement à elles ſeules, y compris ſeulement les variables finies, une fonction particulière, ſous la forme de laquelle elles pouvoient uniquement s'y rencontrer. On verra dans le courant de ce chapitre, que cette ſuppoſition étoit trop limitée, & que les différences partielles de tous les ordres inférieurs peuvent, auſſi bien que les variables finies, entrer dans chacune de ces fonctions. Mais la qualification d'équation du premier degré n'impoſe pas même la néceſſité de cette reſtriction ſucceſſivement dans tous les ordres. Il ſuffit qu'elle ait lieu dans le plus élevé; puiſque nous n'eſtimons le degré d'une équation aux différences partielles, que par celui de cet ordre. Nous nous bornerons donc ici à cette ſeule condition, afin d'embraſſer généralement toutes les équations compriſes ſous la dénomination d'équations du premier degré. Je dis généralement, parce qu'il eſt évident que celles que j'ai examinées dans les chapitres IV & V, ne ſont elles-mêmes que des cas particuliers de celles dont je viens de parler.

Soit d'abord, pour le ſecond ordre (§ 56), ... (Ag)

$$\gamma \frac{dp}{dx} + \zeta \frac{dp}{dy} + \eta \frac{dq}{dy} + \vartheta = 0;$$

tous ces coëfficiens renfermant, d'une manière quelconque, p, q, z, x, y. Et ſuppoſons la fonction s de p et q qui ſont ici les différences partielles de l'ordre le plus élevé que l'intégrale puiſſe contenir, telle que nous l'avons ſuppoſée (§ 64). Il en réſultera, pour $\frac{dp}{dx}$ & $\frac{dq}{dy}$, les mêmes valeurs, que nous ſubſtituerons dans Ag. Nous avons prouvé au même endroit, que par cette dernière opération le coëfficient de $\frac{dp}{dy}$ doit s'anéantir; nous déduirons donc ici immédiatement de ce principe la détermination de σ. En effet, ce coëfficient étant $\zeta - \frac{\gamma \iota}{\theta} - \frac{\eta \theta}{\iota}$, nous conclurons, de ſon anéantiſſement, $\gamma \iota^2 - \zeta \iota \theta + \eta \theta^2 = 0$; d'où $\frac{\iota}{\theta} = \lambda$, ou $\frac{ds}{dq} - \lambda \frac{ds}{dp} = 0$; ce qui eſt conforme au réſultat du chapitre VI, auquel je renvoye pour le reſte.

134. Soit maintenant, pour le troiſième ordre (§ 75), . . . (Ah)

$$\beta' \frac{dr}{dx} + \gamma' \frac{dr}{dy} + \delta' \frac{dt}{dx} + \zeta' \frac{dt}{dy} + \eta' = 0.$$

D'après le même principe, nous repréſenterons encore ici par σ la fonction de r, s, t qui entre dans Ψ & Π, outre les différences partielles inférieures p, q, & les variables finies z, x, y, qui peuvent également en faire partie, mais qui y ſont conſidérées comme conſtantes. Nous aurons donc (§ 77)

$$\frac{d\sigma}{dx} = \theta \frac{dr}{dx} + \iota \frac{dr}{dy} + \tau \frac{dt}{dx} + \upsilon, \quad \frac{d\sigma}{dy} = \theta \frac{dr}{dy} + \iota \frac{dt}{dx} + \tau \frac{dt}{dy} + 8,$$

υ & 8 comprenant tous les termes des ordres inférieurs. Ayant enſuite déduit delà les valeurs de $\frac{dr}{dx}$ & $\frac{dt}{dy}$, & les ayant ſubſtituées

, nous annullerons les coèfficiens de $\frac{dr}{dy}$ & $\frac{dt}{dx}$; d'où ré- les deux équations . . . . . (A i)

$$\beta'\tau\eta + \zeta'\theta^2 - \gamma'\tau\theta = 0, \quad \zeta'\eta\theta + \beta'\tau^2 - \delta'\tau\theta = 0,$$

qui ferviront à déterminer σ, comme les deux équations B (§ 75) qui font exactement la même chofe. Ayant donc effectué cette fubſtitution dans Ah, & mis σ au-lieu de fa fonction équivalente en r, s, t, nous aurons une transformée parfaite qui ne contiendra plus aucune de ces trois lettres, hors celles qui font vraiment $\frac{dp}{dx}$, $\frac{dp}{dy}$, $\frac{dq}{dy}$. Cette transformée aura bien effentiellement la forme C (§ 77) ; mais comme tous les coèfficiens peuvent encore renfermer p & q, il fera impoffible d'en diftinguer tous les termes ; & elle ne fe préfentera réellement que fous celle . . . . (A k)

$$(kb - al)\left(\frac{dp}{dx}\frac{d\sigma}{dy} - \frac{dp}{dy}\frac{d\sigma}{dx}\right) + (ke - am)\left(\frac{dq}{dx}\frac{d\sigma}{dy} - \frac{dq}{dy}\frac{d\sigma}{dx}\right) - \left([kf - an]q + kh - aw\right)\frac{d\sigma}{dx} +$$
$$\left([kf - an]p + kg - av\right)\frac{d\sigma}{dy} - (el - bm)\left(\frac{dp}{dx}\frac{dq}{dy} - \frac{dp}{dy}\frac{dq}{dx}\right) - \left([fl - bn]q + hl - bw\right)\frac{dp}{dx} +$$
$$\left([fl - bn]p - [fm - en]q + gl - bv - hm + ew\right)\frac{dp}{dy} + \left([fm - en]p + gm - ev\right)\frac{dq}{dy} + \mu = 0.$$

Nous la repréfenterons en général par . . . . (A l)

$$\varepsilon\left(\frac{dp}{dx}\frac{d\sigma}{dy} - \frac{dp}{dy}\frac{d\sigma}{dx}\right) + \gamma\left(\frac{dq}{dx}\frac{d\sigma}{dy} - \frac{dq}{dy}\frac{d\sigma}{dx}\right) + \delta\frac{d\sigma}{dx} + \zeta\frac{d\sigma}{dy} + \varkappa\left(\frac{dp}{dx}\frac{dq}{dy} - \frac{dp}{dy}\frac{dq}{dx}\right) + \eta\frac{dp}{dx}$$
$$+ \vartheta\frac{dp}{dy} + \lambda\frac{dq}{dy} + \mu = 0.$$

Maintenant fi on compare fucceffivement entr'eux, dans le même ordre, tous les coèfficiens correfpondans de ces deux équations, on parviendra aux quatre fuivantes . . . . . (A m), favoir ;

par 1, 2, 5 . . . . $\varkappa a + \gamma b - \beta e = 0$,

par 1, 3, 6 . . . . $\eta a - \delta b - \beta\gamma f - \beta h = 0$,

par 1, 4, 5, 8 ..... $\lambda ab - \zeta be + (\beta e - \varkappa a)(fp + g) = o$,

par 2, 3, 5, 7, 8... $\lambda ab + \gamma e(fq + h) - \varkappa a(fp + g) - \vartheta ae + \delta e^2 = o$,

qui, en mettant dans la troisième γb pour $\beta e - \varkappa a$, & ôtant la quatrième de la troisième, se transformeront en.... (An)

1°. $\varkappa a + \gamma b - \beta e = o$,

2°. $\eta a - \delta b - \beta q f - \beta h = o$,

3°. $\lambda a - \zeta e + \gamma p f + \gamma g = o$,

4°. $\vartheta a - \zeta b - \delta e + (\beta p - \gamma q) f + \beta g - \gamma h = o$.

135. La première de ces équations qui est (§ 77)

$$\varkappa \frac{d\Psi}{d\sigma} + \gamma \frac{d\Psi}{dp} - \beta \frac{d\Psi}{dq} = o,$$

nous donnera d'abord Ψ en σ, p & q, par une formule $\Psi = F(\Gamma, \Lambda)$, la destination de ces deux fonctions différentes étant de satisfaire en même tems à Ψ & Π, par rapport à ces trois lettres. Nous pourrions donc déjà (*Suppl. pag.* 107) en conclure l'intégrale générale $(M\Gamma^{K} + N) = F(R\Lambda^{V} + T)$; toutes ces indéterminées étant des fonctions des trois variables finies z, x, y seulement, que les trois autres équations serviroient à déterminer, si Γ & Λ étoient réellement les deux fonctions de p, q, σ, dont chacune doit servir de base à l'une des deux *co-fonctions* qui constituent l'expression complète de Ψ. Mais comme je l'ai déjà souvent fait observer, & notamment (§ 119), on ne peut rien conclure de cette expression incomplète pour l'autre, sinon que p, q & σ ne s'y rencontrent jamais que sous une forme provenant d'une certaine combinaison de Γ & Λ ; & c'est précisément cette combinaison qu'il s'agit de déterminer, aussi bien que les fonctions M, K, &c. de z, x & y.

Il ſuit delà que la ſeule forme générale que nous puiſſions donner jusqu'ici à l'intégrale cherchée, eſt

$$M(\Gamma, \Lambda)^{K} + N = \phi(R[\Gamma, \Lambda]^{V} + T)$$

( ) & [ ] déſignant toujours deux fonctions quelconques déterminées des lettres incluſes.

Ceci me conduit à donner à ma méthode d'intégration pour les ſyſtèmes d'équations ſimultanées aux différences partielles, toute l'étendue dont elle eſt ſuſceptible. Je me bornerai à faire l'application de cette nouvelle méthode à un exemple aſſez compliqué pour ſervir de règle dans tous les cas. Mais je prie le lecteur de commencer par jetter un coup-d'œil ſur l'art. 63 de ce mémoire, qui lui préſentera toutes les réflexions qu'il eſt néceſſaire de ſe rappeler ici. Soit donc...(Ao)

$$(xyqt - xyqs - 2\zeta q^2 + 2y^2 q - q^3 t - xq^2 r - xpq)\left(x\frac{dr}{dx} + q\frac{dt}{dx}\right) - (\text{[illegible]} - xyqr - 2\zeta pq - ypq + yq^2)\left(x\frac{dr}{dy} + q\frac{dt}{dy}\right) - x^2 q r^2 s - x^2 y r s^2 + x^2 y r^2 t + 2xyqrt^2 - 3xq^2 rst - 2xyqs^2 t - 2q^3 st^2 - xq^2 r^2 + 2xy^2 rs - xyqrs - 2\zeta xqrs - x^2 prs - x^2 qrs + x^2 yrt + xyprt + 2\zeta xprt - q^3 rt - x^2 ys^2 + 4y^2 qst - 4\zeta q^2 st - 2xpqst - xq^2 st + 2ypqt^2 - 2yq^2 t^2 + 4\zeta pqt^2 - 2\zeta q^2 r + 2y^2 qr - xpqr - xq^2 r + 2xy^2 r - xyqs - 2\zeta xqs - x^2 ps + xypt + 2\zeta xpt - q^3 t + 4\zeta yp - 2\zeta q^2 + 2y^2 p - xpq = o.$$

On aura d'abord dans l'équation Ah, $\delta' = \frac{q}{x}\epsilon'$ & $\zeta' = \frac{q}{x}\gamma'$. Ces ſubſtitutions changeront la réſultante des deux B (§ 75) où H, I, K ſont reſpectivement la même choſe (§ 77) que θ, 7, τ, en

$$\epsilon'^2\left(\tau^3 - \frac{q}{x}\tau^2\theta\right) + \gamma'^2\left(\frac{q}{x}\tau\theta^2 - \frac{q^2}{x^2}\theta^3\right) = o,$$

dont une racine eſt $\tau x - \theta q = o$, & d'où on conclura ultérieurement $7 = o$, en vertu d'une des deux équations Ai. On a enſuite, en

donnant à cette racine la forme $x\frac{d\sigma}{dt} - q\frac{d\sigma}{dr} = 0$ & l'intégrant, $\sigma = F(qt + rx, p, q, z, x, y)$. Ainsi par rapport aux différences partielles les plus élevées r, s, t seulement, on aura $\sigma = F(qt + rx)$, d'où (§ 77) $\theta = x$, $\iota = 0$, $\tau = q$, $\upsilon = st + r$, $\varepsilon = t^2$; & il résultera de là, pour expression de la transformée imparfaite, ... (Ap)
$\beta'\frac{d\sigma}{dx} + \gamma'\frac{d\sigma}{dy} + \eta' x - \beta'(r + st) - \gamma' t^2 = 0$, dans les coëfficiens de laquelle il ne faut plus que mettre σ au lieu de sa fonction équivalente $qt + rx$, pour avoir une transformée parfaite à laquelle, en la comparant à l'équation Ak, on donnera facilement la forme (Aq)

$$xyq\left(\frac{dp}{dx}\frac{d\sigma}{dy} - \frac{dp}{dy}\frac{d\sigma}{dx}\right) - xyq\left(\frac{dq}{dx}\frac{d\sigma}{dy} - \frac{dq}{dy}\frac{d\sigma}{dx}\right) - (2zq^2 - 2y^2q + xpq + q^2\sigma)\frac{d\sigma}{dx}$$
$$+ (2zpq + ypq - yq^2)\frac{d\sigma}{dy} + (xy\sigma + x^2y)\left(\frac{dp}{dx}\frac{dq}{dy} - \frac{dp}{dy}\frac{dq}{dx}\right) + 2xy^2\frac{dp}{dx} + (2y^2\sigma -$$
$$2zq\sigma - xp\sigma - xq\sigma - q\sigma^2 - xyq - 2zxq - x^2p)\frac{dp}{dy} + (yp\sigma - yq\sigma + 2zp\sigma + xyp$$
$$+ 2zxp)\frac{dq}{dy} + 4zyp + 2y^2p - xpq - 2zq^2 - q^2\sigma = 0.$$

Nous connoissons donc tous les coëfficiens β, γ, δ, &c., & nous avons, par la première des équations An, $(\sigma + x)\frac{d\Psi}{d\sigma} - q\frac{d\Psi}{dp} - q\frac{d\Psi}{dq} = 0$, dont l'intégrale est $\Psi = F(q\sigma + px, p - q)$. Ainsi $\Gamma = q\sigma + px$, $\Lambda = p - q$, & parce qu'aucun des coëfficiens de la transformée ne contient de quantités logarithmiques, nous nous contenterons de la forme ordinaire * (Ar) .... $M(\Gamma, \Lambda) + N = \Phi(R[\Gamma\Lambda] + T)$, qui est son intégrale complète hypothétique.

* Voyez la note *ad pag.* 107, dans le supplém.

136. Nous ferons donc $\Psi = M\,(\Gamma,\ \Lambda) + N$, & à caufe de la permutabilité des fonctions Ψ, Π, cette feule fuppofition fuffira pour les déterminer toutes deux. Repréfentons par le fymbole Θ la fonction inconnue $(\Gamma,\ \Lambda)$ laquelle, outre Γ & Λ, peut contenir z, x, y qui y ont été traitées précédemment comme conftantes. Ainfi

$$d\Theta = \mathrm{A}d\Gamma + \mathrm{B}d\Lambda + \mathrm{C}dz + \mathrm{D}dx + \mathrm{E}dy.$$

Soit de plus $dM = \mu dz + \mu' dx + \mu'' dy$; $dN = \nu dz + \nu' dx + \nu'' dy$. On aura, à caufe de $d\Psi = Md\Theta + \Theta dM + dN$,
$\mathrm{a} = \frac{d\Psi}{d\sigma} = M\frac{d\Theta}{d\sigma} = M\left(\mathrm{A}\frac{d\Gamma}{d\sigma} + \mathrm{B}\frac{d\Lambda}{d\sigma}\right) = Mq\mathrm{A}$; de même $\mathrm{b} = M(x\mathrm{A} + \mathrm{B})$; $\mathrm{e} = M(\sigma\mathrm{A} - \mathrm{B})$; $\mathrm{f} = M\mathrm{C} + \mu\Theta + \nu$; $\mathrm{g} = M(p\mathrm{A} + \mathrm{D}) + \mu'\Theta + \nu'$; $\mathrm{h} = M\mathrm{E} + \mu''\Theta + \nu''$.

On fubftituera enfuite ces expreffions dans les trois autres équations An, d'où on fera difparoître deux quelconques des trois variables p, q, σ, au moyen des valeurs de Γ & Λ ; c'eft-à-dire qu'on combinera ici chacune de ces équations avec les deux $\Gamma - q\sigma - px = 0$, $\Lambda - p + q = 0$, en éliminant p & q. Et comme ces trois variables ne font introduites dans la transformée Aq que par les deux fonctions Γ, Λ, ainfi qu'il eft aifé de le conclure de la forme de fon intégrale Ar; & qu'elles doivent conféquemment difparoître toutes en même tems en vertu ce cette combinaifon qui n'eft qu'une fubftitution de Γ & Λ à leurs valeurs, il eft évident que le coëfficient de la troifième variable qui eft ici σ, fe trouveroit, après la détermination finale, réduit à zéro. Nous pouvons donc admettre d'avance cette condition qui fera exprimée par *coëfficient de* $\sigma = 0$; ce qui partagera chacune des transformées des trois dernières équations An en deux autres

autres équations ; la première compofée de tous les termes fans σ; & la feconde de tous ceux qui fervent de coëfficient à cette même variable ; foit qu'elle fe préfente fous une forme unique & linéaire comme dans le cas préfent ; foit qu'elle fe trouve *fonctionnée* d'une manière quelconque, fous une forme *polynome*, avec d'autres variables : car il eft indubitable d'après le raifonnement précédent, qu'il doit exifter un moyen de la faire difparoître entièrement de la transformée, & partant des équations An qui en dérivent.

Pour fimplifier ce fyftème, nous fouftrairons, dans chacune de ces trois paires d'équations, la feconde, après l'avoir multipliée par x, de la première ; & nous parviendrons enfin, en confervant exactement le même ordre, à fix équations, où on s'appercevra d'abord que la troifième & la cinquième coïncident avec la première, & que la fixième n'eft que la fomme de la feconde & de la quatrième. On verra auffi que celle-ci peut fe fimplifier confidérablement, en la combinant avec la première des fix par l'élimination de la lettre A ; & il en réfultera enfin, pour fyftème final, les trois équations... (As)

$$2\zeta x MA + 2\zeta\, MB - xy\,(MC + \mu\Theta + \nu) = 0$$
$$y\Lambda MB - xy\,(MD + \mu'\Theta + \nu') = 0$$
$$x\Gamma MA + (\Gamma - 2y^2)\, MB - xy\,(ME + \mu''\Theta + \nu'') = 0.$$

137. Remarquons maintenant que le trinome qui forme le dernier terme de chacune de ces équations, eft la différence partielle de Ψ (en y confidérant Γ & Λ comme de fimples variables) ; le premier par ζ ; le fecond par x ; & le troifième par y : de même que MA & MB le font ; l'un par Γ, & l'autre par Λ. Nous pouvons donc mettre ce fyftème fous la forme . . . (At)

$$2\zeta x\frac{d\Psi}{d\Gamma}+2\zeta\frac{d\Psi}{d\Lambda}-xy\frac{d\Psi}{d\zeta}=0,$$

$$\Lambda\frac{d\Psi}{d\Lambda}-x\frac{d\Psi}{dx}=0,$$

$$x\Gamma\frac{d\Psi}{d\Gamma}+(\Gamma-2y^2)\frac{d\Psi}{d\Lambda}-xy\frac{d\Psi}{dy}=0.$$

En comparant le fyftème An (§ 134) à ce dernier, on appercevra aifément les avantages que préfente celui-ci. En effet, le premier n'offre à intégrer qu'une feule équation à trois variables fecondaires, qui eft la première, le nombre des variables allant en augmentant dans les fuivantes, de manière même qu'on ne fauroit en déduire une feconde de même genre par leur combinaifon. Le fyftème At, au contraire, eft compofé d'équations où le nombre des variables fecondaires n'excède pas trois, & telles qu'il eft poffible, en combinant ultérieurement celles-ci, de fe procurer tous les rapports trois à trois de ces cinq variables, & d'obtenir ainfi les dix intégrales, afin d'en foumettre autant qu'on voudra à l'examen prefcrit (§ 63).

138. Intégrons maintenant les trois équations At, en y joignant en quatrième & en cinquième celles qui réfultent ; l'une de l'élimination de $\frac{d\Psi}{d\Lambda}$ au moyen des deux premières ; & l'autre de la double élimination de $\frac{d\Psi}{d\Gamma}$ & $\frac{d\Psi}{d\Lambda}$ au moyen des trois conjointement. Nous aurons, dans le même ordre, . . . (Au)

$\Psi=\phi(\Gamma-x\Lambda,\ \zeta^2+xy\Lambda)$ par Γ, Λ, ζ,

$\Psi=\phi(x\Lambda,\ \Gamma)$ par Γ, Λ, x,

$\Psi=\phi(y\Gamma,\ x\Lambda-\Gamma-y^2)$ par Γ, Λ, y,

$\Psi=\phi(y\Gamma+\zeta^2,\ x\Lambda-\Gamma)$ par Γ, x, ζ,

$$\Psi = \phi(y\Gamma + z^2, x\Lambda - y^2) \quad \text{par } y, x, z,$$

dont il fuffit de confronter la quatrième avec la cinquième, pour appercevoir que l'intégrale complète eft,

$$\Psi = \phi(y\Gamma + z^2, x\Lambda - \Gamma - y^2).$$

En effet cette intégrale s'accorde également avec la feconde & la troifième; & on verra aifément que, pour établir cet accord dans tout le fyftème, il fuffit d'ajouter, dans la première où y eft confiant, la co-fonction $\Gamma - x\Lambda$ multipliée par y à la feconde $z^2 + xy\Lambda$; ce qui transformera celle-ci en $y\Gamma + z^2$. Ainfi en remettant d'abord pour Γ & Λ, & enfuite pour σ leurs valeurs, on aura

$$\Psi = \phi(y(q[qt + rx] + px) + z^2, q(qt + rx + x) + y^2).$$

139. Cette manière de compléter une intégrale, outre qu'elle fuppofe la poffibilité d'intégrer toutes, ou du moins plufieurs des équations qui compofent le fyftème, paroîtra peu analytique. On pourroit, à la vérité, employer ma méthode ordinaire, mais on voit clairement que fi, par hazard, on avoit choifi ici la première des équations At pour l'intégrer, elle n'auroit point réuffi; parce que cette méthode exige que les co-fonctions incomplètes, auxquelles on parvient immédiatement par l'intégration, foient précifément les mêmes que les fonctions complètes, à la différence près des variables qui, dans les premières, font traitées comme conftantes; ce qui, comme je l'ai déjà fouvent rappelé, n'a pas toujours lieu (§ 63), & notamment dans le cas en queftion. Effayons donc d'en trouver une générale telle, qu'ayant intégré une des équations d'un fyftème, on foit affuré de parvenir à approprier cette intégrale au fyftème entier. Je continuerai de l'appliquer au même exemple, en fuppofant qu'on ait feulement déterminé l'intégrale de la première

des équations At; favoir $\Psi = F(\Gamma - x\Lambda,\ z^2 + xy\Lambda)$ où x & y ont feules été regardées comme conftantes.

Cela pofé, j'opère fur le fyftème At, comme j'ai fait précédemment fur celui An. Soit donc $\Gamma - x\Lambda = \Sigma$; $z^2 + xy\Lambda = \Omega$; d'où $\Lambda = \frac{\Omega - z^2}{xy}$, $\Gamma = \frac{xy\Sigma + x\Omega - xz^2}{xy}$, & $\Psi = M(\Sigma,\ \Omega) + N$; M & N ne contenant plus ici que x & y. Soit encore $(\Sigma, \Omega) = \Theta$ & $d\Theta = \mathrm{A}d\Sigma + \mathrm{B}d\Omega + \mathrm{D}dx + \mathrm{E}dy$ (car on voit bien que z ne doit plus entrer dans Θ, puifque tous les z exiftans ont été englobés dans Σ & Ω, & que cette lettre, n'étant point ici conftante, ne peut plus concourir au fonctionnement particulier de Σ avec Ω); & de même $dM = \mu dx + \mu' dy$; $dN = \nu dx + \nu' dy$. On a donc encore $d\Psi = Md\Theta + \Theta dM + dN$; d'où

$\frac{d\Psi}{d\Gamma} = M\frac{d\Theta}{d\Gamma} = M(\mathrm{A}\frac{d\Sigma}{d\Gamma} + \mathrm{B}\frac{d\Omega}{d\Gamma} = M\mathrm{A}$; $\frac{d\Psi}{d\Lambda} = M(xy\mathrm{B} - x\mathrm{A})$; $\frac{d\Psi}{dz} = 2zM\mathrm{B}$; $\frac{d\Psi}{dx} = M(-\Lambda\mathrm{A} + y\Lambda\mathrm{B} + \mathrm{D}) + \mu\Theta + \nu$; $\frac{d\Psi}{dy} = M(x\Lambda\mathrm{B} + \mathrm{E}) + \mu'\Theta + \nu'$.

Il faut maintenant fubftituer ces expreffions dans les deux dernières équations At; y mettre enfuite, pour Λ & Γ, leurs valeurs en Σ & Ω; & faire enfin difparoître la troifième variable z, fi elle ne difparoît pas d'elle-même. La première de ces deux équations fe réduit par-là à $\frac{d\Psi}{dx} = 0$; & la feconde à $2yM\mathrm{A} + (\Sigma - 2y)M\mathrm{B} - (M\mathrm{E} + \mu'\Theta + \nu') = 0$; c'eft-à dire (§ 137) à

$$2y\frac{d\Psi}{d\Sigma} + (\Sigma - 2y)\frac{d\Psi}{d\Omega} - \frac{d\Psi}{dy} = 0,$$

dont l'intégrale eft $\Psi = F(\Sigma + y^2,\ y\Sigma + \Omega)$. On peut maintenant être sûr que ces deux co-fonctions font définitivement les

expreſſions de Ψ & Π ; car il n'y a que x qui ait été traitée comme conſtante ; ainſi cette variable pourroit ſeule concourir à leur *co-fonctionnement* ultérieur. Mais l'équation $\frac{d\Psi}{dx} = 0$ nous avertit que Ψ ne doit pas la contenir ; conſéquemment l'opération eſt terminée. *

Il pourra en général y avoir autant de pareilles opérations conſécutives, qu'il y aura eu de variables traitées comme conſtantes dans la première ; puiſque chaque opération diminue ce nombre d'une unité, & que l'expreſſion n'eſt complète, que lorſqu'elle s'eſt enfin accrue de toutes les variables qu'elle doit renfermer.

Il ne s'agit plus que de mettre dans l'intégrale ci-deſſus, pour Σ & Ω, leurs valeurs, ce qui la change en $\Psi = F(\Gamma - x\Lambda + y^2, y\Gamma + z^2)$, comme nous avons trouvé par l'autre méthode.

140. Si un des coëfficiens de la première des équations A étoit zéro ; par exemple, ſi $\varkappa = 0$, qui eſt préciſément l'hypothèſe que j'ai diſcutée dans le ſeptième chapitre ; ſavoir celle où le terme $\frac{dp}{dx}\frac{dq}{dy} - \frac{dp}{dy}\frac{dq}{dx}$ eſt diſparu (§ 78), tout ſe paſſera de même. Il arrivera ſeulement alors que la variable, par laquelle la différence partielle manque, par exemple ici σ, ſe préſentera ſous la forme indéterminée $\Psi = F(\Gamma, \sigma)$. Ainſi Λ ſera $= \sigma$, ce qui ne change rien au reſte de l'opération.

Il peut même ſe faire, comme (§ 83), que $\varkappa$, ϵ & γ ſoient

* Ce chapitre étant le dernier morceau composé du préſent recueil, comme il eſt aiſé de le remarquer, je prie le lecteur de faire particulièrement attention à cette méthode qui eſt la ſeule générale, & celle à laquelle il faudra avoir recours dans tous les cas où la méthode que j'employe ordinairement, y compris la correction inſérée dans le ſupplément note *ad pag.* 107, ſe trouveroit en défaut.

zéro en même tems. Mais alors les deux équations fuivantes fe réduifent à $\eta a - \delta b = 0$ & $\lambda a - \zeta e = 0$, d'où on conclura immédiatement la valeur unique de Ψ en σ, p & q. Appliquons à cette détermination notre nouvelle méthode. La formule générale de *complètement* (§ 136) fe réduira à $\Psi = M(\Gamma) + N$, M & N ne contenant que q fi nous employons la première équation $\eta a - \delta b = 0$ où cette variable eft traitée comme conftante, & (Γ) défignant une fonction inconnue de Γ & de q. Par exemple, dans l'équation de l'article cité 83, la transformée parfaite S donne $\frac{\eta}{\delta} = \frac{q}{x}$ d'où $\Gamma = pq + x\sigma$. Or ici $B = 0$, $C = \frac{d\Theta}{dq}$, D & E $= 0$: ainfi $a = M Ax$, $e = M Ap + \frac{d\Psi}{dq}$ (137) ; & la fubftitution de ces valeurs dans la feconde équation $\lambda a - \zeta e = 0$ ou $pa - xe = 0$ la change en $px - px - x\frac{d\Psi}{dq} = 0$, ou $\frac{d\Psi}{dq} = 0$. C'eft-à-dire, que $\Psi = \Gamma$ fans aucun mélange ultérieur de q, ou que $\Psi = pq + x\sigma$.

Si on effectuoit cette même fubftitution dans la quatrième des équations An qui fe reduit à $\vartheta a - \zeta b - \delta e = 0$, on n'obtiendroit que le même réfultat : feulement l'opération feroit plus longue, b feroit $= MAq$, & cette transformée contenant la lettre p, il faudroit la chaffer au moyen de fa valeur $\frac{\Gamma - x\sigma}{q}$.

Maintenant fi nous écrivons σ' au lieu de Γ, nous aurons $\sigma' = pq + x\sigma$, d'où $\sigma = \frac{\sigma' - pq}{x}$. Prenant donc de là les expreffions de $\frac{d\sigma}{dx}$ & $\frac{d\sigma}{dy}$, en obfervant de traiter auffi p & q comme des fonctions implicites des variables x & y, nous parviendrons à une équation

$$2zy^2\left(\frac{dz}{dx}\frac{d\sigma'}{dy}-\frac{dz}{dy}\frac{d\sigma'}{dx}\right)+x\frac{d\sigma'}{dx}+y\frac{d\sigma'}{dy}+(x^2y+2z^2xy^2)\frac{dz}{dx}-(2z^2y^3-xy^2)\frac{dz}{dy}+2zxy=0$$

qui retombe dans la formule C (§ 58), en y mettant s au lieu de σ'. Ainſi le problème eſt ramené à une équation que nous ſavons intégrer, & dans l'intégrale de laquelle il n'y aura plus qu'à mettre pour σ' ſa valeur.

Dans toutes les opérations précédentes nous n'avons eu aucun égard au dernier terme μ : on ſent qu'il faudroit s'aſſûrer qu'il eſt conforme à celui de la formule C, en mettant dans celui-ci les valeurs qu'on a trouvées pour toutes les indéterminées. Mais il eſt préférable de vérifier tout d'un coup l'intégrale entière, en la différentiant de nouveau.

141. Cette méthode s'appliquera avec un égal ſuccès à tous les ordres ultérieurs, ſans préſenter de difficultés ſupérieures à celles que nous avons rencontrées juſqu'ici. L'examen des équations du quatrième ordre, par où nous terminerons ce chapitre, ſuffira pour en convaincre. Nous conſerverons à p, q, r, s, t leurs ſignifications précédentes (§ 77), & nous y ajouterons

$$h=\frac{dr}{dx}=\frac{d^2p}{dx^2}=\frac{d^3z}{dx^3};\; l=\frac{dr}{dy}=\frac{ds}{dx}=\frac{d^2p}{dxdy}=\frac{d^2q}{dx^2}=\frac{d^3z}{dx^2dy};\; m=\frac{ds}{dy}=\frac{dt}{dx}=\frac{d^2p}{dy^2}=\frac{d^2q}{dxdy}=\frac{d^3z}{dxdy^2};\; n=\frac{dt}{dy}=\frac{d^2q}{dy^2}=\frac{d^3z}{dy^3}.$$

Soit donc l'équation générale du quatrième ordre... (Ar)

$$\beta'\frac{dh}{dx}+\gamma'\frac{dh}{dy}+\delta'\frac{dm}{dx}+\varepsilon'\frac{dm}{dy}+\zeta'\frac{dn}{dy}+\eta'=0,$$

où η' repréſente tous les termes ſans les plus hautes différences partielles. Nommons σ la fonction de h, l, m, n qui entre dans ſon intégrale, y compris toutes les différences partielles inférieures

& les variables finies qui y ſont traitées comme conſtantes. Nous aurons d'abord, comme (§ 77),

$$\frac{d\sigma}{dx} = \vartheta\frac{dh}{dx} + \theta\frac{dl}{dx} + 7\frac{dm}{dx} + \tau\frac{dn}{dx} + \upsilon = \vartheta\frac{dh}{dx} + \theta\frac{dh}{dy} + 7\frac{dm}{dx} + \tau\frac{dm}{dy} + \upsilon,$$

$$\frac{d\sigma}{dy} = \vartheta\frac{dh}{dy} + \theta\frac{dl}{dy} + 7\frac{dm}{dy} + \tau\frac{dn}{dy} + \text{ȣ} = \vartheta\frac{dh}{dy} + \theta\frac{dm}{dx} + 7\frac{dm}{dy} + \tau\frac{dn}{dy} + \text{ȣ};$$

ϑ, θ, 7, τ, υ & ȣ pouvant contenir h, l, m, &c. z, x, y; & υ, ȣ repréſentant la totalité des termes des ordres inférieurs provenant de la différentiation par r, s, t, p, q, z, x, y. Nous déduirons de là les valeurs de $\frac{dh}{dx}$ & $\frac{dn}{dy}$, afin de les ſubſtituer dans Ar. Mais puiſque nous ſuppoſons que σ renferme ſans exception tous les termes affectés de h, l, m, n, il faut néceſſairement, d'après cette hypothèſe, que cette ſubſtitution faſſe diſparoître en même tems $\frac{dh}{dy}$, $\frac{dm}{dx}$ & $\frac{dm}{dy}$. Ainſi leurs coèfficiens, qui ſont dans le même ordre,

$$\gamma' - \beta'\frac{\theta}{\vartheta} - \zeta'\frac{\vartheta}{\tau};\ \delta' - \beta'\frac{7}{\vartheta} - \zeta'\frac{\theta}{\tau};\ \varepsilon' - \beta'\frac{\tau}{\vartheta} - \zeta'\frac{7}{\tau},$$

étant égalés à zéro, donneront les trois équations (As)...... $\gamma'\tau\vartheta - \beta'\tau\theta - \zeta'\vartheta^2 = 0$; $\delta'\tau\vartheta - \beta'\tau 7 - \zeta'\vartheta\theta = 0$; $\varepsilon'\tau\vartheta - \beta'\tau^2 - \zeta'\vartheta 7 = 0$; d'où on tirera, dans chaque cas particulier, trois équations aux différences partielles du premier ordre, qui détermineront σ par h, l, m & n. D'un autre côté, la ſubſtitution ci-deſſus aura changé la propoſée Ar en... (At)

$$\beta'\tau\frac{d\sigma}{dx} + \zeta'\vartheta\frac{d\sigma}{dy} + \eta'\tau\vartheta - \beta'\tau\upsilon - \zeta'\vartheta\text{ȣ} = 0,$$

où il ne s'agira plus que de mettre σ au lieu de ſa fonction équivalente, pour avoir une *transformée parfaite* (§ 177).

142. Cette transformée ſera une équation telle qu'elle peut réſulter

fulter d'une intégrale $\Psi = F:\Pi$, dans laquelle Ψ & Π ne contiennent plus que σ, r, s, t, p, q, z, x, y. Nous ferons donc

$$d\Psi = A\,d\sigma + B\,dr + E\,ds + F\,dt + G\,dp + H\,dq + L\,dz + M\,dx + N\,dy$$
$$d\Pi = a\,d\sigma + b\,dr + e\,ds + f\,dt + g\,dp + h\,dq + l\,dz + m\,dx + n\,dy.$$

Subftituant enfuite ces valeurs dans $\frac{d\Psi}{dx}\frac{d\Pi}{dy} - \frac{d\Psi}{dy}\frac{d\Pi}{dx} = 0$, en ayant égard à ce que $\frac{ds}{dx} = \frac{dr}{dy}$ & $\frac{ds}{dy} = \frac{dt}{dx}$, & ne développant que les termes qu'il eft déjà poffible à cette époque de diftinguer; favoir, ceux qui font caractérifés par les différences partielles de σ & de r, s, t; puifque tous les h, l, m, n, qui n'étoient point vraiment des différences partielles de ces trois dernières lettres, doivent être difparus & confondus dans la fonction σ, nous aurons ... (Au)

$$(Ab - aB)\left(\frac{d\sigma}{dx}\frac{dr}{dy} - \frac{d\sigma}{dy}\frac{dr}{dx}\right) + (Ae - aE)\left(\frac{d\sigma}{dx}\frac{ds}{dy} - \frac{d\sigma}{dy}\frac{ds}{dx}\right) + (Af - aF)\left(\frac{d\sigma}{dx}\frac{dt}{dy} - \frac{d\sigma}{dy}\frac{dt}{dx}\right)$$
$$+ (\overline{Ag - aG}\cdot s + \overline{Ah - aH}\cdot t + \overline{Al - aL}\cdot q + An - aN)\frac{d\sigma}{dx} - (\overline{Ag - aG}\cdot r + \overline{Ah - aH}\, s + \overline{Al - aL}\cdot p$$
$$+ Am - aM)\frac{d\sigma}{dy} + (Be - bE)\left(\frac{dr}{dx}\frac{ds}{dy} - \frac{dr}{dy}\frac{ds}{dx}\right) + (Bf - bF)\left(\frac{dr}{dx}\frac{dt}{dy} - \frac{dr}{dy}\frac{dt}{dx}\right) +$$
$$(Ef - eF)\left(\frac{ds}{dx}\frac{dt}{dy} - \frac{ds}{dy}\frac{dt}{dx}\right) + (\overline{Bg - bG}\cdot s + \overline{Bh - bH}\cdot t + \overline{Bl - bL}\cdot q + Bn - bN)\frac{dr}{dx} -$$
$$(\overline{Bg - bG}\cdot r + \overline{Bh - bH - Eg + eG}\cdot s - \overline{Eh - eH}\cdot t + \overline{Bl - bL}\cdot p - \overline{El - eL}\cdot q + Bm - bM -$$
$$En + eN)\frac{dr}{dy} - (\overline{Eg - eG}\cdot r + \overline{Eh - eH - Fg + fG}\cdot s - \overline{Fh - fH}\cdot t + \overline{El - eL}\cdot p - \overline{Fl - fL}\cdot q$$
$$+ Em - eM - Fn + fN)\frac{dt}{dx} - (\overline{Fg - fG}\cdot r + \overline{Fh - fH}\cdot s + \overline{Fl - fL}\cdot p + Fm - fM)\frac{dt}{dy} +$$
$$\overline{Gh - gH}\cdot\overline{rt - s^2} + \overline{Gl - gL}\cdot\overline{qr - ps} + \overline{Hl - hL}\cdot\overline{qs - pt} + \overline{Gn - gn}\cdot r + \overline{Hn - hN - Gm + gM}\cdot s$$
$$- \overline{Hm - hM}\cdot t + \overline{Ln - lN}\cdot p - \overline{Lm - lM}\cdot q + Mn - mN = 0,$$

qui fera la forme de toute pareille transformée : & nous la repréfenterons en général par ... (Av)

$$\beta\left(\frac{d\sigma}{dx}\frac{dr}{dy}-\frac{d\sigma}{dy}\frac{dr}{dx}\right)+\gamma\left(\frac{d\sigma}{dx}\frac{ds}{dy}-\frac{d\sigma}{dy}\frac{ds}{dx}\right)+\delta\left(\frac{d\sigma}{dx}\frac{dt}{dy}-\frac{d\sigma}{dy}\frac{dt}{dx}\right)+\varepsilon\frac{d\sigma}{dx}+\zeta\frac{d\sigma}{dy}+$$
$$\eta\left(\frac{dr}{dx}\frac{ds}{dy}-\frac{dr}{dy}\frac{ds}{dx}\right)+\vartheta\left(\frac{dr}{dx}\frac{dt}{dy}-\frac{dr}{dy}\frac{dt}{dx}\right)+\varkappa\left(\frac{ds}{dx}\frac{dt}{dy}-\frac{ds}{dy}\frac{dt}{dx}\right)+\lambda\frac{dr}{dx}+\mu\frac{dr}{dy}+$$
$$\varpi\frac{dt}{dx}+\rho\frac{dt}{dy}+\chi=0.$$

La comparaiſon terme à terme de Au avec Av, dans le même ordre, donnera, ſans y comprendre le dernier χ, douze équations qu'on combinera de la manière ſuivante; ſavoir, 1, 2, 6; 1, 3, 7; 2, 3, 8; 1, 4, 9; 3, 5, 12; 1, 4, 7, 8, 10, 12; 1, 4, 7, 8, 11, 12; d'où réſulteront ſept équations, dont les cinq premières n'auront plus aucun changement à ſubir. Quant aux deux autres, il faudra encore les combiner avec les 2, 3 & 5 de ces cinq premiers réſultats eux-mêmes, & on aura enfin, dans le même ordre... (Ax)

$$\eta a-\gamma b+\beta e=0,$$
$$\vartheta a-\delta b+\beta f=0,$$
$$\varkappa a-\delta e+\gamma f=0,$$
$$\lambda a-\varepsilon b+\beta(sg+th+ql+n)=0,$$
$$\rho a-\zeta f-\delta(rg+sh+pl+m)=0,$$
$$\mu a-\zeta b-\varepsilon e-\beta(rg+sh+pl+m)+\gamma(sg+th+ql+n)=0,$$
$$\varpi a-\zeta e-\varepsilon f-\gamma(rg+sh+pl+m)+\delta(sg+th+ql+n)=0.$$

On voit évidemment que le ſyſtême des trois premières donnera Ψ par rapport à σ, r, s, t, par une intégrale de la forme $\Psi=F(\Gamma, \Lambda)$, comme dans le troiſième ordre (§ 135). Cette détermination de Ψ étoit la ſeule choſe qui pût faire craindre que les difficultés ne s'accruſſent dans les ordres ſuivans, par le nombre de variables qui entre dans ſon expreſſion. Mais en obſervant que, quel que ſoit ce nombre, cette fonction ne doit admettre que deux valeurs ſimultanées;

l'une pour Ψ; & l'autre pour Π, il étoit aiſé de prévoir, d'aprés tout ce qui précéde, que l'analyſe s'exprimeroit par un pareil ſyſtème, auquel on appliquera la méthode (§ 139, 140).

On aura donc encore ici, pour la forme de l'intégrale cherchée, (§ 135) $M(\Gamma, \Lambda)^K + N = \phi(R[\Gamma, \Lambda]^V + T)$; mais toutes ces indéterminées, au-lieu de ne contenir que z, x, y, comme dans le troiſième ordre, pourront en général renfermer, outre ces variables finies, toutes les différences partielles inférieures à celles par rapport auxquelles Γ & Λ ſont déterminées. Ainſi dans le cas actuel du quatrième ordre, elles contiendront p, q, z, x, y; ce qui obligera ſeulement à faire, par exemple, $dM = \mu dp + \mu' dq + \mu'' dz + \mu''' dx + \mu^{IV} dy$; &c., & qui multipliera les opérations ſans les rendre plus difficiles.

CHAPITRE DOUZIÈME.

Des équations aux différences partielles du ſecond ordre & du premier degré entre quatre variables.

143. LA formule des équations de ce genre eſt . . . . (A)

$$\alpha \frac{d^2 z}{dx^2} + \beta \frac{d^2 z}{dxdy} + \gamma \frac{d^2 z}{dxdu} + \delta \frac{d^2 z}{dy^2} + \varepsilon \frac{d^2 z}{dydu} + \zeta \frac{d^2 z}{du^2} + \eta \frac{dz}{dx} + \vartheta \frac{dz}{dy} + \varkappa \frac{dz}{du} + \lambda = 0;$$

dont l'intégrale eſt en général $\Psi = F(\Pi, \Omega)$. Mais pour peu qu'on faſſe attention au tableau (§ 27), on verra bientôt que les coëfficiens différentiels $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$, $\frac{dz}{du}$ ne doivent ſe rencontrer que dans Ψ & ſous une forme linéaire : ce qui réduira cette intégrale à . . . (B)

$$A \frac{dz}{dx} + B \frac{dz}{dy} + C \frac{dz}{du} + D = F(\Pi, \Omega).$$

On la fimplifiera encore confidérablement, en remarquant que les mêmes raifons qui, pour les équations à trois variables, nous ont déterminés (§ 38) à n'admettre la variable principale z que dans le terme fans différence partielle P, ont également lieu ici; & conféquemment que cette variable n'exiftera que dans le feul terme D. Ainfi A, B, C, Π & Ω ne contiendront que les trois variables fecondaires x, y & u, Cela pofé, en différentiant l'intégrale hypothétique B, nous parviendrons à une équation de même forme que celle A, dans laquelle on appercevra diftinctement tous les élémens qui compofent chacun des coëfficiens α, β, &c. ainfi que la loi qui en règle le mélange.

Obfervons en paffant que cette même équation prouve clairement que l'intégrale de toute propofée linéaire à quatre variables du fecond ordre, eft elle-même une équation linéaire du premier; ce qui eft analogue à ce que nous avons dit (§ 39).

Comparons maintenant le réfultat de notre opération terme à terme avec la formule A, & nous obtiendrons les dix équations fuivantes où

$$\xi = \frac{d\Pi}{dy}\frac{d\Omega}{du} - \frac{d\Pi}{du}\frac{d\Omega}{dy},\ 7 = \frac{d\Pi}{du}\frac{d\Omega}{dx} - \frac{d\Pi}{dx}\frac{d\Omega}{du},\ \psi = \frac{d\Pi}{dx}\frac{d\Omega}{dy} - \frac{d\Pi}{dy}\frac{d\Omega}{dx};$$

favoir . . . . . (C)

$$A\xi = \alpha,\ A7 + B\xi = \beta,\ A\psi + C\xi = \gamma,\ B7 = \delta,\ B\psi + C7 = \varepsilon,\ C\psi = \zeta;$$

$$\xi\frac{dA}{dx} + 7\frac{dA}{dy} + \psi\frac{dA}{du} + \xi\frac{dD}{dz} = \eta,\ \xi\frac{dB}{dx} + 7\frac{dB}{dy} + \psi\frac{dB}{du} + 7\frac{dD}{dz} = \vartheta,$$

$$\xi\frac{dC}{dx} + 7\frac{dC}{dy} + \psi\frac{dC}{du} + \psi\frac{dD}{dz} = \varkappa,\ \xi\frac{dD}{dx} + 7\frac{dD}{dy} + \psi\frac{dD}{du} = \lambda.$$

Nous éliminerons d'abord ξ & 7 des équations 1, 2 & 4; ξ & ψ de celles 1, 3 & 6; & enfin ψ & 7 de celles 4, 5 & 6; & il

réſultera delà les trois équations . . . . (D)

$$\alpha B^2 - \beta AB + \delta A^2 = 0,\ \alpha C^2 - \gamma AC + \zeta A^2 = 0,\ \delta C^2 - \varepsilon BC + \zeta B^2 = 0.$$

Nous ôterons enſuite, au moyen de celles 1, 4 & 6, les lettres ξ, η & ψ des équations 7, 8 & 9 ; ce qui nous donnera les trois transformées . . . . . (E)

$$\alpha BC\frac{dA}{dx} + \delta AC\frac{dA}{dy} + \zeta AB\frac{dA}{du} + \alpha BC\frac{dD}{d\zeta} = \eta ABC,$$

$$\alpha BC\frac{dB}{dx} + \delta AC\frac{dB}{dy} + \zeta AB\frac{dB}{du} + \delta AC\frac{dD}{d\zeta} = \vartheta ABC,$$

$$\alpha BC\frac{dC}{dx} + \delta AC\frac{dC}{dy} + \zeta AB\frac{dC}{du} + \zeta AB\frac{dD}{d\zeta} = \kappa ABC;$$

& éliminant $\frac{dD}{d\zeta}$ par les combinaiſons ſucceſſives de la première avec la ſeconde, & puis avec la troiſième, nous aurons les deux . . . (F)

$$\alpha\delta ABC\frac{dA}{dx} + \delta^2 A^2 C\frac{dA}{dy} + \zeta\delta A^2 B\frac{dA}{du} - \eta\delta A^2 BC - \alpha^2 B^2 C\frac{dB}{dx} - \delta\alpha ABC\frac{dB}{dy} - \zeta\alpha AB^2\frac{dB}{du}$$
$$+ \vartheta\alpha AB^2 C = 0$$

$$\alpha\zeta ABC\frac{dA}{dx} + \delta\zeta A^2 C\frac{dA}{dy} + \zeta^2 A^2 B\frac{dA}{du} - \eta\zeta A^2 BC - \alpha^2 BC^2\frac{dC}{dx} - \delta\alpha AC^2\frac{dC}{dy} - \zeta\alpha ABC\frac{dC}{du}$$
$$+ \kappa\alpha ABC^2 = 0.$$

144. Cela poſé, deux des trois équations D nous donnent toujours le rapport de deux quelconques des trois lettres A, B, C à la troiſième. Mais comme ces équations ſont toutes trois également indiſpenſables, nous en déduirons une de condition qui devra toujours préalablement avoir lieu ; ſavoir . . . . (G)

$$\zeta\beta^2 + \delta\gamma^2 + \alpha\varepsilon^2 - \beta\gamma\varepsilon - 4\alpha\delta\zeta = 0.$$

Les valeurs de B & C, par exemple, en A ſeront exprimées par les formules . . . . (H)

$$B = \frac{\beta \pm \sqrt{(\beta^2 - 4\alpha\delta)}}{2\alpha}A = \rho A,\ C = \frac{\gamma \pm \sqrt{(\gamma^2 - 4\alpha\zeta)}}{2\alpha}A = \sigma A;$$

rien juſqu'ici ne l'indique. Nous aurons donc recours à l'équation L. On a d'une part $\frac{\delta - \alpha\rho^2}{\zeta - \alpha\sigma^2} = \frac{y^2}{x^2}$; d'ailleurs T ſe réduit à $2\zeta^4 y \sigma \cdot y^2$; ainſi il faut que V devienne $= 2\zeta^4 y \sigma \cdot x^2$. Or à cauſe de σ conſtante, & partant de $g = h = k = 0$, $V = \zeta^2 x^3 \rho \sigma (\zeta^2 - xy + ux \mp \zeta^2 \mp xy \pm ux)$, σ étant $= \pm 1$. Il faut donc prendre le ſigne inférieur qui donne préciſément pour V l'expreſſion demandée; & conſéquemment faire $\sigma = -1$. Ainſi les deux valeurs correſpondantes de ρ & σ ſont $\rho = \frac{y}{x}$, & $\sigma = -1$.

Paſſant à l'une des équations I, par exemple à la première, on verra qu'elle ſe réduit à $x\frac{dA}{dx} - y\frac{dA}{dy} + x\frac{dA}{du} - A = 0$ dont l'intégrale eſt $Ay = F(xy, u-x)$, ou ſimplement $Ay = 1$; puiſqu'une valeur particulière ſuffit. Ainſi $A = \frac{1}{y}$, $B = \frac{1}{x}$, $C = -\frac{1}{y}$.

L'équation K nous donne enſuite $x\frac{d\Pi}{dx} - y\frac{d\Pi}{dy} + x\frac{d\Pi}{du} = 0$ qui ne diffère de la précédente que par le dernier terme qui eſt ici zéro. Ainſi on en conclut $\Pi = F(xy, u-x)$; c'eſt-à-dire, $\Pi = u - x$ & $\Omega = xy$.

Il ne nous reſte plus que D à déterminer au moyen de la dixième des équations C. Pour cela, mettant au lieu de ξ, η & ψ leurs valeurs $\frac{\alpha}{A}$, $\frac{\delta}{B}$ & $\frac{\zeta}{C}$ qui ſont toutes connues par les opérations précédentes, & diviſant ce réſultat par $\zeta^2 xy$, nous aurons... (N)

$$x\frac{dD}{dx} - y\frac{dD}{dy} + x\frac{dD}{du} + \frac{x+u}{\zeta y} = 0.$$

On pourroit auſſi tirer immédiatement les valeurs de ξ, η & ψ de celles qu'on a trouvées ci-deſſus pour Π & Ω. Mais il faudroit

alors

alors écrire $\lambda\omega$ au lieu de λ, ω étant un facteur quelconque qui peut être disparu de la proposée, & qu'on déterminera en comparant la valeur de ξ, par exemple, déduite de cette dernière manière, avec $\xi = \frac{a\omega}{A}$. Ainsi dans le cas présent cette comparaison donneroit $-x = z^2 x^2 y \omega$, d'où $\omega = \frac{-1}{z^2 xy}$ & $\lambda\omega = \frac{x+u}{zy}$. Et comme d'ailleurs $\xi = -x$, $\eta = y$ & $\psi = -x$, on voit que ce résultat est entièrement conforme au premier.

Revenons à l'équation N que nous intègrerons à l'ordinaire, ce qui nous donnera $D + \frac{u}{zy} = F(xy, u-x)$ ou simplement $=0$, expression de D dans l'hypothèse de z constante. Maintenant pour tenir compte de la variabilité de cette lettre, nous prendrons $P(D + \frac{u}{zy}) + Q = 0$ (§ 118 *à la note*), P & Q étant fonctions de z seule; & différentiant par cette variable, nous aurons

$$\left(D + \frac{u}{zy}\right)P' + Q' + P\left(\frac{dD}{dz} - \frac{u}{z^2 y}\right) = 0,$$

où $dP = P'dz$, $dQ = Q'dz$. Or nous avons, en vertu de la première équation E, $\frac{dD}{dz} = \frac{u-y}{z^2 y}$. Donc $\left(D + \frac{u}{zy}\right)P' + Q' - \frac{P}{z^2} = 0$; & comme P & Q ne peuvent contenir que z, il faut évidemment que $P' = 0$, $P = const. = 1$, $Q' = \frac{1}{z^2}$ & $Q = -\frac{1}{z}$. Donc $D = \frac{y-u}{zy}$; & enfin on a pour l'intégrale cherchée, en multipliant tout par xy, . . . (O)

$$x\frac{dz}{dx} + y\frac{dz}{dy} - x\frac{dz}{du} + \frac{xy-ux}{z} = xyF(xy, u-x) = F(xy, u-x).$$

On pourroit encore s'y prendre d'une manière plus simple & plus analogue à ce que nous avons pratiqué dans les équations à

trois variables (§ 41). Pour cela, de $D + \frac{u}{zy} = F(xy, u-x, z)$, on concluroit $\frac{dD}{dz} = \frac{u}{yz^2} + Æ$; où $Æ$, repréfentant la différentielle de la fonction arbitraire par z feule, ne peut être fonction que des mêmes élémens xy, $u - x$ & z. Comparant enfuite cette valeur avec celle $\frac{dD}{dz} = \frac{u-y}{z^2 y}$, on auroit $Æ = -\frac{1}{z^2}$; & conféquemment $F(xy, u-x, z)$ devient $\frac{1}{z}$ ou $\frac{y}{zy} + F(xy, u-x)$, c'eft-à-dire, que $D = \frac{y-u}{zy}$; réfultat bien conforme au précédent.

Si on avoit effayé la valeur négative $\rho = -\frac{y}{x}$, on auroit trouvé qu'aucune de celles $\sigma = \pm 1$ n'y correfpond dans l'équation L. Ainfi la propofée n'a qu'une première intégrale complète : & en l'intégrant ultérieurement, par les méthodes ordinaires du chapitre troifième, on parvient à une expreffion intraitable & analogue à celle (§ 41); favoir, Ψ étant $= \frac{x}{y}$ & $\Omega = u + x$ (§ 24),

$$Mdz + Qdy = ydz + dy\left(\frac{\Psi y}{z}[y + \Psi y - \Omega] - F[\Psi y^2, \Omega - 2\Psi y]\right).$$

Je fuppoferai donc, afin de donner ici un exemple de la fuite de cette opération, qu'on ait, pour première intégrale, ... (P)

$$\frac{dz}{dx} + \frac{dz}{dy} + \frac{dz}{du} - \phi'(u-y, x+y) = 0.$$

On arrivera à un réfultat

$$dz - dy\phi'(u-y, x+y) = d \cdot F(u-y, x-y);$$

c'eft-à-dire, en faifant $u - y = \Psi$, $x - y = \Omega$ (§ 24), $\int[dz - dy\phi'(\Psi, \Omega + 2y)] = F(\Psi, \Omega)$. Quant à l'intégrale de cette différentielle fonctionnelle, il eft évident qu'elle n'eft autre que $\frac{1}{2}\phi(\Psi, \Omega + 2y)$; puifque y feule y eft confidérée comme variable. En effet, fi on

avoit cette dernière expreſſion à différentier, dans la même hypothèſe, il ne pourroit en réſulter que

$$\tfrac{1}{2}\left(M\frac{d\Psi}{dy} + N\frac{d[\Omega+2y]}{dy}\right) dy\,\phi'(\Psi, \Omega + 2y).$$

Or $\frac{d\Psi}{dy} = 0$ & $\frac{d(\Omega + 2y)}{dy} = 2$; on a donc enfin $Ndy\phi'$, ou parce que N eſt néceſſairement auſſi une fonction de Ψ & de $\Omega + 2y$, ſeulement $dy\phi'(\Psi, \Omega + 2y)$. Conſéquemment en continuant notre opération, nous aurons $z = \tfrac{1}{2}\phi(\Psi, \Omega + 2y) + F(\Psi, \Omega)$; c'eſt-à-dire, en remettant pour Ψ & Ω leurs valeurs,

$$z = \phi(u - y, x + y) + F(u - y, x - y).$$

146. Il peut arriver que, dans les deux équations I (§ 144), les coèfficiens T & V deviennent en même tems zéro : & il ſemble que celle L ne faſſe plus diſtinguer alors les valeurs correſpondantes de ρ & σ. Soit par exemple . . . . (Q)

$$\frac{d^2z}{dx^2} - \frac{d^2z}{dy^2} - 2\frac{d^2z}{dydu} - \frac{d^2z}{du^2} = 0.$$

On a $\alpha = 1$; $\beta = \gamma = \eta = \vartheta = \varkappa = \lambda = 0$; $\delta = \zeta = -1$; $\varepsilon = -2$; & ces coèfficiens ſatisfont à l'équation de condition G. On trouve enſuite $\rho = \pm 1$, $\sigma = \pm 1$; ce qui réduit la fraction $\frac{T}{V}$ à $\frac{\vartheta\alpha\rho - \eta\delta}{\varkappa\alpha\sigma - \eta\zeta}$ qui, à cauſe de $\vartheta = \varkappa = \eta = 0$, devient $= \frac{0}{0}$. Pour changer cette expreſſion vague, obſervons que ſi on ſuppoſe $\vartheta = \varkappa = \eta$, quelle que ſoit d'ailleurs leur valeur commune, on aura $\frac{T}{V} = \frac{\alpha\rho - \delta}{\alpha\sigma - \zeta}$. Or cette conſéquence étant généralement vraie, ſoit que cette valeur ſoit poſitive ou négative ; finie ou infiniment petite, il ſeroit abſurde qu'elle ne s'étendît pas également au cas intermédiaire de

$= \eta = 0$. Nous avons donc $\frac{\alpha\rho - \delta}{\alpha\sigma - \zeta} = \frac{\delta - \alpha\rho^2}{\zeta - \alpha\sigma^2}$. Ainsi lorsque 1, $\frac{2}{\sigma + 1} = \frac{2}{\sigma^2 + 1}$ ou $\sigma^2 = \sigma$ & enfin $\sigma = 1$. Si au contraire $\rho = -1$, $\frac{0}{\sigma + 1} = \frac{2}{\sigma^2 + 1}$ & $\sigma = -1$. Le reste de l'opération ne présente aucune difficulté. Le premier terme des équations I n'étant point zéro, elles serviront toujours à déterminer A. On trouvera ensuite, en adoptant $\rho = \sigma = 1$, la première intégrale

$$\frac{dz}{dx} + \frac{dz}{dy} + \frac{dz}{du} = \phi(u - y, x + y)$$

qui est précisément celle P de l'article précédent.

L'autre valeur $\rho = \sigma = -1$ auroit donné de même la seconde intégrale $\frac{dz}{dx} - \frac{dz}{dy} - \frac{dz}{du} = F(u - y, x - y)$; & en les additionnant, on obtiendra $2\frac{dz}{dx} = \phi(u - y, x + y) + F(u - y, x - y)$, dont l'intégrale ultérieure, prise par rapport à x seule, & en observant que la fonction arbitraire des deux autres variables, qui devroit compléter cette nouvelle intégrale, est nécessairement contenue dans celles ϕ & F; dont l'intégrale ultérieure, dis-je, est

$$z = \phi(u - y, x + y) + F(u - y, x - y).$$

147. Mais si tout le premier membre de ces deux équations se réduit à zéro, nous tombons dans le cas analogue à celui que nous avons rencontré (§ 45), en traitant des équations à trois variables. Cette circonstance dépend également ici de ce que 6^2 étant $= 4\alpha\delta$, & $\gamma^2 = 4\alpha\zeta$, le radical s'évanouit des valeurs ρ & σ qui se réduisent à $2\alpha\rho - 6 = 0$ & $2\alpha\sigma - \gamma = 0$. Pour le prouver, en nous bornant à la première des deux équations I, puisque les consé-

quences font les mêmes pour la feconde, nous lui donnerons la forme . . . . (R)

$$(\delta - \alpha\rho^2)\left(\alpha\rho\sigma \frac{dA}{dx} + \delta\sigma \frac{dA}{dy} + \zeta\rho \frac{dA}{du}\right) - (\delta[\eta + \alpha b]\rho\sigma - \alpha\rho^2[\vartheta\sigma - \alpha\sigma a - \zeta e])A = 0.$$

Or à caufe de $\varepsilon^2 = 4\alpha\delta$ & de $2\alpha\rho = \varepsilon$, on a $\delta - \alpha\rho^2 = 0$. Il fuffira donc, pour démontrer qu'alors toute l'équation R aura le facteur $\delta - \alpha\rho^2 = 0$, & qu'elle fera conféquemment identique, de faire voir que de cette même fuppofition il réfulte $(\eta + \alpha b)\,\rho\sigma = \vartheta\sigma - \alpha\sigma a - \zeta e$, ou (S) . . . $(\vartheta - \eta\rho)\,\sigma - \alpha\sigma a - \alpha\rho\sigma b - \zeta e = 0$. Or c'eft de quoi il eft aifé de fe convaincre de la manière fuivante.

On cherchera (§ 143) les valeurs; 1°. de $(\vartheta - \eta\rho)\,\sigma$ dans laquelle on fubftituera ρA à B, & par conféquent $\rho dA + Ad\rho$ à dB, en fe fouvenant (§ 144) que $d\rho = a dx + b dy + c du$, & laiffant σ telle qu'elle eft, parce qu'il fe trouvera, à la fin de l'opération, qu'elle affecte tous les termes; 2°. de $-\alpha\sigma a = -A\xi\sigma a$; 3°. de $-\alpha\rho\sigma b$ où $\rho\alpha = \frac{1}{2}\varepsilon$ contient B qu'on éliminera encore comme ci-deffus; & enfin 4°. de $-\zeta e = -A\psi\sigma e$, où j'ai fait $C = \sigma A$. Prenant enfuite la fomme de toutes ces valeurs, il reftera, après réduction,

$$(\gamma - \rho\xi)\left(\frac{dD}{dz} + \tfrac{1}{2} A b\right)\sigma. \text{ Or}$$

$$\gamma - \rho\xi = (\S\ 143)\ \frac{\delta}{B} - \frac{\rho\alpha}{A} = \frac{\delta}{\rho A} - \frac{\rho\alpha}{A};\ \&\ \delta - \alpha\rho^2 = 0;$$

Donc $\gamma - \rho\xi = 0$; & le premier membre de l'équation S eft effectivement égal à zéro.

Il faudra alors commencer par la dernière des équations C dans laquelle, après avoir fubftitué à ξ, γ & ψ leurs valeurs prifes des 1re, 4me & 6me, on mettra encore $\rho A = \frac{\varepsilon}{2\alpha} A$ pour B & $\sigma A =$

$\frac{\gamma}{2\alpha} A$ pour C. Réduifant enfuite au même dénominateur, & ayant égard à ce que $\beta^2 = 4\alpha\delta$, on obtiendra enfin . . . . (T)

$$2\alpha\gamma \frac{dD}{dx} + \beta\gamma \frac{dD}{dy} + 4\alpha\zeta \frac{dD}{du} - 2\gamma\lambda A = 0,$$

qu'on intègrera comme une équation à cinq variables, puifque D peut renfermer la principale z (§ 143).

Prenons pour exemple

$$xu\left(\frac{d^2 z}{dx^2} + 2\frac{d^2 z}{dxdy} + 2\frac{d^2 z}{dxdu} + \frac{d^2 z}{dy^2} + 2\frac{d^2 z}{dydu} + \frac{d^2 z}{du^2}\right) + 2(u+x)\left(\frac{dz}{dx} + \frac{dz}{dy} + \frac{dz}{du}\right)$$
$$+ 2z = 0;$$

où $\alpha = \delta = \zeta = xu$; $\beta = \gamma = \varepsilon = 2xu$; $\eta = \vartheta = \varkappa = 2(x+u)$ & $\lambda = 2z$. En fuivant la première méthode générale, on trouve que les deux équations I font identiques; & qu'ainfi cette méthode n'eft point applicable au cas préfent. Ayant donc fubftitué les valeurs précédentes dans l'équation T, elle deviendra

$$xu\left(\frac{dD}{dx} + \frac{dD}{dy} + \frac{dD}{du}\right) - 2Az = 0.$$

On en prendra l'intégrale (§ 24), en regardant z comme conftante, & on ajoutera feulement cette variable d'une manière tout-à-fait indéterminée dans la fonction arbitraire; puifque rien en effet ne fixe encore le genre de combinaifons dont elle eft fufceptible avec les deux autres. On aura d'abord

$$\int\left(dD - \frac{2zAdy}{ux}\right) = F(x-y,\ u-y,\ z),$$

où on voit que, pour rendre le premier membre une différentielle exacte, il faut faire $A = xu\phi' : y$. Cela fuppofé, on en déduira (U) ... $D = 2z\phi : y + F(x-y,\ u-y,\ z)$. D'ailleurs on a $\rho = \sigma = 1$; & en vertu de l'équation K (§ 144), $\frac{d\Pi}{dx} + \frac{d\Pi}{dy} + \frac{d\Pi}{du} = 0$.

qui, étant intégrée, donne $\Pi = F(x - y, u - y)$; c'eſt-à-dire $\Pi = u - y$, & $\Omega = x - y$; & il réſulte ultérieurement delà $\xi = 7 = \psi = 1$ (§ 143). De plus la ſeptième équation C devient

$$\frac{dD}{dz} = 2\omega(x + u) - u\phi':y - x\phi':y - xu\phi'':y,$$

où ω eſt le facteur, commun à toute la propoſée, qu'on peut ſuppoſer être diſparu par la diviſion, & où j'ai ſubſtitué à A ſa valeur $xu\phi':y$. D'un autre côté celle de D, que nous venons de trouver, donne $\frac{dD}{dz} = 2\phi:y + Æ$, $Æ$ étant $= f(x - y, u - y, z)$. Ainſi en vertu de cette dernière condition, on a l'équation

$$\frac{dÆ}{dx} + \frac{dÆ}{dy} + \frac{dÆ}{du} = 0$$

dans laquelle on ſubſtituera la valeur de $Æ$; ſavoir

$$Æ = \frac{dD}{dz} - 2\phi:y = 2\omega(x+u) - 2\phi:y - u\phi':y - x\phi':y - ux\phi'':y.$$

Cette opération donnera, après réduction, ... (V)

$$4\omega - 4\phi':y + 2(x + u)(\omega' - \phi'':y) - xu\phi''':y = 0$$

où j'ai regardé ω comme une fonction de y ſeulement en faiſant $d\omega = \omega' dy$, par la raiſon qu'il faut chaſſer x & u de cette équation, afin que ces variables n'affectent pas l'expreſſion de $\phi:y$, &c. qui feroit contradictoire. Cette dernière conſidération exige que $\phi''':y = 0$; & de plus que $\omega' = \phi'':y$. Or $\phi''':y$ étant zéro, $\phi'':y$ ne peut être que $=$ *conſt.* $= 1$, ou $= 0$. Ainſi nous avons les deux ſolutions

1°. $\phi'':y = 1$, $\phi':y = y$; d'où $\omega' = 1$, $\omega = y$, &

2°. $\phi'':y = 0$, $\phi':y = 1$; d'où $\omega' = 0$, $\omega = 1$,

qui ſont conformes au reſte de l'équation V; ſavoir, $\omega = \phi':y$.

La première de ces deux ſolutions donne $A = B = C = xyu$. En-

suite $\frac{dD}{dz} = 2\phi{:}y + Æ = 2y(x+u) - yu - xy - xu = xy - xu + yu$; c'est-à-dire, en intégrant par z seule, (§ 146) $D = z(xy - xu + yu)$. Ce résultat est parfaitement d'accord avec l'expression U de D trouvée ci-dessus. En effet, $2z\phi{:}y$ étant $= zy^2$, elle devient $D = zy^2 + F(u-y, x-y, z)$. Or pour faire voir que cette formule générale, dans laquelle la portion de la fonction arbitraire F, relative à la variable z, n'a point encore été determinée, contient celle ci-dessus où cette détermination est déjà effectuée, il suffit de transformer $F(u-y, x-y, z)$ en $F(u-y, x-y) - (u-y)(x-y)z$, d'où

$$D = zy^2 - (xu - xy - yu + y^2)z + F(u-y, x-y)$$
$$= (xy - xu + yu)z + F(u-y, x-y).$$

La seconde solution donne $A = B = C = xu$. Ensuite $\frac{dD}{dz} = u + x$ & $D = z(u+x)$. Ainsi les deux premières intégrales complètes de la proposée sont

$$xyu\left(\frac{dz}{dx} + \frac{dz}{dy} + \frac{dz}{du}\right) + (xy - xu + yu)z = \phi(x-y, u-y), \&$$
$$xu\left(\frac{dz}{dx} + \frac{dz}{dy} + \frac{dz}{du}\right) + (x+u)z = F(x-y, u-y).$$

Multiplions celle-ci par y, & soustrayons en la première, il restera $xuz = yF(x-y, u-y) - \phi(x-y, u-y)$ qui est l'intégrale finie.

148. Je passe à l'examen des équations de ce genre où $\lambda = 0$, & auxquelles conséquemment la méthode précédente ne peut s'appliquer (*supplém. page* 74). On connoît d'abord ρ & σ; & partant tous les coëfficiens de l'équation K. Celle-ci détermine Π & Ω, & ultérieurement ξ, η & ψ (§ 143). On combinera ensuite entr'elles

la

la feptième & la huitième des équations C, en multipliant celle-là par ϑ, & celle-ci par η. Et après avoir pris la différence de ces deux produits, on y fubftituera à ξ, γ & ψ leurs valeurs, & à B la fienne; favoir, ρA. Le réfultat fera une équation Y aux différences partielles à quatre variables, dont la feule variable principale fera A; hormis que le dernier terme contiendra $\frac{dD}{d\zeta}$. Or en vertu de la dernière des équations C, on trouvera qu'en général, λ étant $=0$, on a $D = F(\Pi, \Omega, \zeta)$; puifque le premier membre de cette équation ne diffère de la dernière ligne du tableau (§ 27), qu'en ce que D y remplace Ψ; & que cette dernière ligne eft précifément le réfultat de la différentiation de $\Psi = F(\Pi, \Omega)$, en traitant Ψ comme une fimple variable principale. Quant à l'addition de ζ dans la fonction arbitraire, elle défigne que D peut, outre les trois variables x, y, u, contenir auffi cette quatrième d'une manière qui n'eft point encore déterminée. Cela pofé, $\frac{dD}{d\zeta}$ fera donc en général $= f(\Pi, \Omega, \zeta)$; c'eft-à-dire $= f(\Pi, \Omega)$, en regardant ζ comme une conftante. Ainfi ayant fubftitué cette expreffion de $\frac{dD}{d\zeta}$ dans l'équation Y, on l'intègrera dans la même hypothèfe de ζ conftante, & on parviendra à une expreffion de A analogue à celle M dans la note citée. Enfuite A ne pouvant contenir ζ, l'exclufion des termes qui en font affectés fervira à déterminer, tant la fonction arbitraire $\phi(\Pi, \Omega)$ provenant de l'intégration, que celle $f(\Pi, \Omega)$ qu'y a introduite la valeur hypothétique de $\frac{dD}{d\zeta}$. Cette dernière étant connue, on en conclura D relativement à ζ feulement; & il fera inutile de compléter cette expreffion par rap-

port aux trois autres variables ; puifque nous avons vu qu'elles ne peuvent y être contenues que fous la forme $F(\Pi, \Omega)$. Cette folution eft trop parfaitement analogue à celle de la note citée, pour avoir befoin d'une plus grande explication ; & je me difpenferai, par cette raifon, d'en faire l'application à un exemple. Il en eft de même des trois articles fuivans ; qui fe rapportent à ceux 47, & 48 fur les équations à trois variables.

149. Afin de fuivre la même marche que dans ces équations, nous examinerons maintenant les différens cas où l'abfence d'un ou de plufieurs des coëfficiens de la propofée néceffite quelque changement dans les folutions précédentes. On voit d'abord que pour les formules H, fi α étoit $=0$, il fuffiroit de permuter la variable x avec une des deux autres, dont le coëfficient δ ou ζ ne fût pas nul. Nous pouvons donc, d'après cet expofé, faire abftraction de ce cas, & regarder toujours α comme un coëfficient exiftant. Cela pofé, les deux équations I deviendront identiques, & conféquemment cette méthode fera infuffifante toutes les fois que les deux conditions fuivantes auront lieu ; favoir, $\delta = \rho = 0$; & $\zeta = \sigma = 0$; ou du moins l'une des deux. Ce cas fe rapporte évidemment à celui de $B = \frac{\epsilon - \epsilon}{2\alpha} A, C = \frac{\gamma - \gamma}{2\alpha} A$ (§ 144) ; c'eft-à-dire, que B & C feront égaux à zéro, ou du moins l'un d'eux. Dans la première de ces deux hypothèfes, les fix premières équations C fe réduifent à $A\xi = \alpha$, $A\eta = \epsilon$, $A\psi = \gamma$; d'où on déduira, par le même procédé qui à fourni l'équation K, celle ... (Z)

$$\alpha \frac{d\Pi}{dx} + \epsilon \frac{d\Pi}{dy} + \gamma \frac{d\Pi}{du} = 0$$

qui détermine les deux fonctions Π & Ω.

Pour connoître A, nous employerons la feptième équation que nous multiplierons par η, & dont nous retrancherons la huitième multipliée elle-même par ξ ; favoir, $\xi\eta \frac{dD}{dz} = \xi\vartheta$. Mettant enfuite, pour ξ, η & ψ, leurs valeurs en α, β & γ, & multipliant le réfultat par A^2, il viendra enfin . . . . (a)

$$\alpha\beta \frac{dA}{dx} + \beta^2 \frac{dA}{dy} + \beta\gamma \frac{dA}{du} + (\alpha\vartheta - \beta\eta) A = 0.$$

Quant à D, nous avons, pour la déterminer, la dernière équation, dans laquelle nous remettrons encore les mêmes expreffions de ξ, η & ψ, dont le dénominateur A eft maintenant connu. Le refte de l'opération eft entièrement conforme à ce que nous avons dit (§ 145).

150. Il peut arriver de plus, dans ce même cas, que η ou ψ foit auffi $= 0$. Je dis l'un ou l'autre, par exemple η; & en voici la raifon. Cette circonftance indique que les fonctions Π & Ω (§ 57) ne contiennent u & x que fous une certaine forme s qui leur eft commune; de forte qu'elles ne diffèrent entr'elles que par la troifième variable y qui peut être diverfement *fonctionnée* avec s. Or fi ψ étoit en même tems $= 0$, il s'enfuivroit que Π & Ω ne feroient qu'une feule & même fonction des trois variables ; fuppofition abfurde. Soit donc $\eta = 0$, ce qui annulle auffi le coëfficient β : l'intégrale de l'équation Z fera de la forme $\Pi = F(s, y)$; & cette forme confirme ce que je viens de dire au fujet de Π & Ω ; puifqu'il en réfulte $\Omega = f(s, y)$. Maintenant la huitième équation, que nous avons employée dans l'art. précédent, étant identique, à caufe de B & de $\eta = 0$, & conféquemment de ϑ auffi $= 0$, on

lui fubftituera la neuvième qui fe réduit à $\psi \frac{dD}{dz} = \varkappa$. Ce font là les feuls changemens que la circonftance du troifième coëfficient $\varepsilon = 0$ néceffite dans la folution précédente.

J'ai fuppofé dans ces deux articles que *B* & *C* étoient nuls en même tems. Je ne m'arrêterai point ici à développer la feconde hypothèfe où une de ces deux lettres feulement s'annulleroit : cette circonftance, après tout ce que j'ai dit, ne peut plus préfenter aucune difficulté.

151. Nous fommes convenus de regarder toujours α comme celui des trois coëfficiens α, δ, ζ qui fubfifte. Mais il peut arriver qu'ils foient tous trois en même tems égaux à zéro ; ce qui rend encore les deux équations I identiques. On verra aifément qu'il faut pour cela que deux des trois lettres *A*, *B*, *C*; par exemple les deux dernières *B*, *C* foient zéro, & que le facteur ξ, qui multiplie la troifième, le foit auffi. Il fuit de ce que nous venons de dire dans l'art. précédent, qu'alors Π & Ω ne contiendront *u* & *y* que fous une forme *s* commune à ces deux fonctions. De plus *B* & *C* étant zéro, on aura $\varepsilon = 0$. Ainfi les fix premières équations C fe réduiront à $A\eta = \epsilon$ & $A\psi = \gamma$. Cette nouvelle circonftance n'apportera donc, à l'équation Z (§ 149), d'autre changement que celui d'annuller le terme $\frac{d\Pi}{dx}$ à caufe de $\alpha = 0$. On a enfuite, en vertu de la feptième équation C,

$$\eta \frac{dA}{dy} + \psi \frac{dA}{du} = \eta, \text{ ou } \epsilon \frac{dA}{dy} + \gamma \frac{dA}{du} - \eta A = 0,$$

qui coïncide auffi avec celle a, en faifant encore, dans cette dernière, $\alpha = 0$. Enfin de la dixième on conclura l'expreffion de *D*

par rapport à y & u, le *fonctionnement* par x reſtant quelconque. Et on aura, pour déterminer la portion de cette expreſſion qui doit être affectée de la variable z, $\eta \frac{dD}{dz} = \vartheta$; c'eſt-à-dire, $\frac{dD}{dz} = \frac{\vartheta}{\epsilon} A$, où A eſt connu.

Quant au moyen de diſtinguer, à l'inſpection d'une pareille propoſée, quel eſt celui des coëfficiens A, B, C de ſon intégrale qu'il faut conſerver, il eſt évident que ce ne peut être que celui qui appartient à la variable qui ſe trouve répétée dans les deux termes exiſtans du ſecond ordre. Ainſi ſi on avoit (§ 143) $\alpha = \delta = \zeta = \gamma = 0$, on ſeroit sûr que c'eſt le terme $B \frac{dz}{dy}$ qui ſubſiſte dans l'intégrale; puiſque ceux ϵ & ε de la propoſée montrent clairement que $\frac{dz}{dy}$ a varié par x & par u.

152. Il nous reſte un point important à diſcuter; ſavoir, à aſſigner toutes les formes d'intégrales finies, d'où peut réſulter une équation aux différences partielles du ſecond ordre entre quatre variables z, x, y & u. Cette queſtion eſt analogue à celle que nous avons réſolue (§ 49) pour les équations à trois variables; & ce que nous dirons ici ne ſera qu'une application des mêmes principes.

Conſidérons la formule générale $\Sigma = \lambda \phi(\mu, \nu) + F(\Pi, \Omega)$. Pour éliminer une de ces deux fonctions arbitraires, par exemple celle F, nous ſubſtituerons dans le tableau (§ 27), ou plutôt dans la dernière ligne de ce tableau, ce qui ſuffit à l'objet que nous nous propoſons ici; ſavoir, en conſervant à ξ, η & ψ leur même ſignification (§ 143), dans . . . $\xi \frac{d\Psi}{dx} + \eta \frac{d\Psi}{dy} + \psi \frac{d\Psi}{du} = 0$,

$\Sigma - \lambda\phi(\mu, \nu)$ à Ψ, d'où

$$\frac{d\Psi}{dx} = \frac{d\Sigma}{dx} - \lambda\left(M\frac{d\mu}{dx} + N\frac{d\nu}{dx}\right) - \frac{d\lambda}{dx}\phi(\mu, \nu),$$

& ainsi des autres. Il résultera de cette substitution, en représentant en général par le symbole Dk, quelle que soit la lettre k, tout trinome $\xi\frac{dk}{dx} + \eta\frac{dk}{dy} + \psi\frac{dk}{du}$, (b)... $D\Sigma - \lambda MD\mu - \lambda ND\nu - D\lambda\phi(\mu, \nu) = 0$; & il faut faire en sorte que ce premier membre ne contienne qu'une seule fonction arbitraire de μ & ν, car il est évident que M & N sont de pareilles fonctions, aussi bien que ϕ.

La manière la plus simple de satisfaire à cette condition, est d'en faire disparoître en effet deux, en annullant chacun en particulier leurs coëfficiens; c'est-à-dire, en réalisant deux quelconques des trois équations $D\mu = 0$, $D\nu = 0$, $D\lambda = 0$; ce qui donne lieu à trois différentes combinaisons.

Des deux premières; savoir, de $D\lambda = 0$ & $D\mu$ ou $D\nu = 0$, on conclura, en remettant d'abord pour le symbole D, & ensuite pour ξ, η & ψ leurs expressions, & comparant le résultat à la dernière ligne du tableau (§ 27), on en conclura, dis-je, $\lambda = \phi(\Pi, \Omega)$ & μ ou $\nu = f(\Pi, \Omega)$. Ainsi λ peut être une fonction quelconque de Π & Ω: & il en sera de même de μ ou de ν. Supposons donc que $[\Pi, \Omega]$ soit la fonction à laquelle μ, par exemple, est égale: nous aurons $\Sigma = \lambda\phi([\Pi, \Omega], \nu) + F(\Pi, \Omega)$. Mais nous pouvons toujours mettre $F(\Pi, \Omega)$ sous la forme $F(\Pi, [\Pi, \Omega])$: ainsi faisant $[\Pi, \Omega] = \Delta$, nous aurons $\Sigma = \lambda\phi(\Delta, \nu) + F(\Delta, \Pi)$; c'est-à-dire, que sans limiter la condition μ ou $\nu = f(\Pi, \Omega)$, on peut y substituer celle plus simple μ ou $\nu = \Pi$ ou Ω. Ces deux premières combinaisons réduiront donc notre formule générale d'inté-

gration, en la divisant par λ (fonction de Π & de Ω), à $\Sigma = \phi(\mu, \Omega) + F(\Pi, \Omega)$.

Quant à la troisième; savoir. $D\mu = o$ & $D\nu = o$, qui laisse le coëfficient λ indéterminé, il en résulte que μ & ν sont égaux chacun à une fonction quelconque de Π & Ω. Ainsi $\phi(\mu, \nu)$ n'est autre chose que $\phi(\Pi, \Omega)$, & la seconde forme des intégrales finies, dont on peut éliminer successivement les deux fonctions arbitraires, est $\Sigma = \lambda\phi(\Pi, \Omega) + F(\Pi, \Omega)$. Tout ceci s'accorde parfaitement avec ce que nous avons trouvé pour les équations à trois variables. Ces deux formes donneront aussi évidemment aux équations qui en dérivent deux premières intégrales complètes; puisqu'on peut faire disparoître indistinctement l'une ou l'autre des deux fonctions arbitraires la première.

153. On parviendroit encore, par d'autres combinaisons plus compliquées, à réduire à une seule les trois fonctions arbitraires M, N & ϕ. Nous allons les examiner en peu de mots, seulement afin de montrer qu'elles ne fournissent aucun résultat différent des précédens.

Nous égalerons d'abord successivement à zéro le coëfficient de chacune de ces fonctions, en établissant en même tems que ceux des deux autres sont en raison de l'unité à une fonction quelconque de μ & ν. Soit, par exemple, $D\mu = o$ & $D\lambda = n\lambda D\nu$, ce qui réduit la formule b à $D\Sigma = \lambda D\nu(N + n\phi)$, où $N + n\phi$ n'est que $f(\mu, \nu)$. On déduira de ces deux suppositions; 1°. $\mu = F(\Pi, \Omega)$; c'est-à-dire, par la même raison que ci-dessus, $\mu = \Pi$ ou Ω; & 2°. $D(l.\lambda - \phi : \nu) = o$, n n'étant alors qu'une fonction de ν, d'où $l.\lambda - \phi : \nu = F(\Pi, \Omega)$, & enfin $\lambda = \phi : \nu \times F(\Pi, \Omega)$.

En faifant $D\nu = o$, on ne feroit que permuter ν avec μ. Ainfi ces deux combinaifons ne nous apprennent rien de plus, & elles réduifent encore la formule générale d'intégration à $\Sigma = \phi(\mu, \Omega) + F(\Pi, \Omega)$.

Il en fera de même de la double fuppofition de $D\lambda = o$ & $D\mu = m D\nu$. En effet il en réfulte $\lambda = F(\Pi, \Omega)$ & $D(\mu, \nu) = o$; puifqu'on peut toujours multiplier $d\mu - m\,d\nu$ par un facteur de μ & ν qui la rende une différentielle exacte. Ainfi $(\mu, \nu) = f(\Pi, \Omega)$; ce qui fignifie, comme ci-deffus, μ ou $\nu = \Pi$ ou Ω.

Il refte encore une troifième combinaifon; c'eft celle qui confifte à fuppofer en même tems $D\mu = mD\nu$ & $D\lambda = n\lambda D\nu$. Il réfulteroit de là $D\Sigma = (mM + N + n\phi)\lambda D\nu$ où toute la quantité entre les parenthèfes n'eft qu'une fonction arbitraire de μ & ν. Pour fatisfaire à ces deux fuppofitions, il faut encore faire ici, en vertu de la première, $(\mu, \nu) = f(\Pi, \Omega)$; c'eft-à-dire, μ ou $\nu = \Pi$ ou Ω. De plus la feconde exigeroit auffi feulement que λ fût, comme ci-deffus, $= \phi : \nu \times F(\Pi, \Omega)$. Mais pour obtenir l'expreffion la plus complète de λ, combinons enfemble ces deux équations qui nous donneront $\frac{1}{\lambda} D\lambda = nD\nu$ & $\frac{1}{\lambda} D\lambda = \frac{n}{m} D\mu$. Nous aurons, en les additionnant, $2 \frac{D\lambda}{\lambda} = n(D\nu + \frac{1}{m} D\mu)$ ou $D(l.\lambda) = D(\mu, \nu)$; puifque le facteur indéterminé n fuffit pour rendre $d\nu + \frac{1}{m} d\mu$ une différentielle exacte; & enfin $l.\lambda - (\mu, \nu) = F(\Pi, \Omega)$, c'eft-à-dire, en ayant égard à la première condition, $\lambda = f(\mu, \Omega) \times f(\Pi, \Omega)$. Ce nouveau réfultat, bien conforme à ce qui a lieu * dans les équa-

* Voyez le troifième mém. du préfent rec. art. 4.

$\Sigma =$

tions à trois variables, ne nous donne encore évidemment que $\Sigma = \phi(\mu, \Omega) + F(\Pi, \Omega)$, comme avant.

154. Le cas des équations qui n'ont qu'une première intégrale complète (§ 49) se présentera également ici : telle est, par exemple, celle dont l'intégrale est $\frac{dz}{dx} + \frac{dz}{dy} - \frac{dz}{du} = 4y\phi(x-y, u-y)$. En effet en l'intégrant ultérieurement par la première formule (§ 24), on trouve (*suppl. page* 82) $z - \int 4y dy \phi''(x-y, u-y) = F(x-y, u+y)$; ou en faisant $x - y = \Omega$ & $u + y = \Pi$, $z - \int 4y dy \phi''(\Omega, \Pi - 2y) = F(\Omega, \Pi)$, qu'on peut, au moyen de deux intégrations successives par parties (§ 145), transformer en ...(d)

$$z = 2y\phi'(\Omega, \Pi - 2y) - \int 2dy\phi'(\Omega, \Pi - 2y) \left.\begin{matrix} \\ \text{ou} + \phi(\Omega, \Pi - 2y) \end{matrix}\right\} + F(\Omega, \Pi);$$

c'est-à-dire, qu'en remettant pour Ω & Π leurs valeurs, on aura enfin $z = \phi(x-y, u-y) + 2y\phi' + F(x-y, u+y)$. Tout cela est bien analogue à ce que j'ai dit dans la note insérée au supplément, que je viens de citer.

Nous rapporterons, comme (§ 49), ce genre d'intégrales finies à la formule (e) ... $\Sigma = a\phi(\mu, \nu) + b\phi' + c\phi'' + \&c. + F(\Pi, \Omega)$; & nous allons chercher la loi qui doit regner entre les coëfficiens a, b, c, &c. & les élémens μ, ν, Π, Ω des deux fonctions arbitraires, pour que cette formule soit réellement de nature à ce qu'on en puisse faire disparoître toutes les fonctions arbitraires au moyen de deux différentiations successives.

Pour cela, dans l'équation (§ 152) $\xi \frac{d\Psi}{dx} + \eta \frac{d\Psi}{dy} + \psi \frac{d\Psi}{du} = 0$, nous

fubftituerons à Ψ, $\Sigma - a\phi - b\phi' - c\phi'' -$ &c. ; c'eft-à-dire, que nous ferons

$$\frac{d\Psi}{dx} = \frac{d\Sigma}{dx} - \frac{da}{dx}\phi - a\left(M\frac{d\mu}{dx} + N\frac{d\nu}{dx}\right)\phi' - \frac{db}{dx}\phi' - b\left(M\frac{d\mu}{dx} + N\frac{d\nu}{dx}\right)\phi''$$
$$- \frac{dc}{dx}\phi'' - c\left(M\frac{d\mu}{dx} + N\frac{d\nu}{dx}\right)\phi''' - \&c.$$

& ainfi de fuite pour les deux autres variables y & u. Servons-nous encore, comme ci-deffus, du fymbole Dk; la fubftitution précédente nous donnera... (f)

$$D\Sigma - Da\phi - (aMD\mu + aND\nu + Db)\phi' - (bMD\mu + bND\nu + Dc)\phi'' - (cMD\mu + cND\nu)\phi''' = o,$$

d'où il s'agit de faire difparoître toutes les fonctions arbitraires, hormis une.

Nous ferons auparavant quelques réflexions fur la différence de celles ϕ, ϕ', &c. à celles M & N qui font également arbitraires & compofées des mêmes élémens μ, ν. Nous obferverons donc que dans $\phi(\mu, \nu)$ il faut diftinguer deux chefs d'*arbitrariété*; le premier eft dans (μ, ν) par où j'ai coûtume d'exprimer une fonction déterminée, mais quelconque de μ & ν, ce qui a véritablement lieu ici; le fecond eft dans le fymbole ϕ par lequel on modifie, en outre, (μ, ν) d'une manière quelconque. Suppofons, par exemple, qu'on ait groupé les deux élémens μ, ν, fous la forme $\mu^2 + \mu\nu + \nu^2 = (\mu, \nu)$. On pourra modifier ultérieurement ce groupe, au moyen du fymbole ϕ, en faifant $(\mu^2 + \nu\mu + \nu^2)^n$, ou l. $(\mu^2 + \mu\nu + \nu^2)$, ou, &c. $= \phi(\mu, \nu)$. On voit par-là que du premier chef, l'*arbitrarieté* tombe fur la combinaifon intérieure des deux élémens μ, ν; & du fecond, fur la modification extérieure de chacune de ces combinaifons. L'effentiel de cette obfervation eft de fe rappeler que, quand on prend

la différentielle $(Md\mu + Nd\nu)\ \phi'(\mu, \nu)$ de $\phi(\mu, \nu)$, $Md\mu + Nd\nu$ eſt proprement l'expreſſion $d(\mu, \nu)$: expreſſion indépendante des ſymboles ϕ', ϕ'', &c., & conſéquemment invariable, quoique arbitraire.

Cela poſé, pour réſoudre le problème en queſtion dans toute ſa généralité, nous devrions employer la méthode que j'ai donnée dans le troiſième mémoire de ce recueil (§ 12 & 13). Mais elle nous mèneroit néceſſairement ici à des réſultats encore moins traitables qu'à l'endroit cité. C'eſt pourquoi nous nous bornerons à ſuivre celle moins générale (§ 49), qui nous ſuffira pour faire remarquer l'analogie qui règne entre les équations à quatre, & celles à trois variables. Nous ferons donc d'abord $Da = 0$, d'où $a = f(\Pi, \Omega)$; ce qui prouve que, ſans limiter la formule e, on peut y faire $a = 1$. Il réſulte delà, pour la fonction ϕ', $MD\mu + ND\nu + Db = 0$, ou $D[(\mu, \nu) + b] = 0$; d'où on conclut $(\mu, \nu) + b = f(\Pi, \Omega)$, & $b = f(\Pi, \Omega) - (\mu, \nu)$. Cela ſignifie que le coëfficient b doit être la différence d'une fonction quelconque déterminée de Π, Ω, à une fonction quelconque également déterminée de μ, ν.

On trouvera enſuite, pour la fonction ϕ'', en ſubſtituant à b ſa valeur, & ayant l'attention de conſerver toujours à chacune des fonctions arbitraires introduites précédemment ſon même ſymbole qui déſigne qu'elle repréſente invariablement une même fonction, on trouvera, dis-je $[f(\Pi, \Omega) - (\mu, \nu)]\, D(\mu, \nu) + Dc = 0$; équation dont on appercevra facilement l'analogie avec celle k (§ 49), en développant l'expreſſion du ſymbole D, & mettant ultérieurement, au-lieu de ξ, η & ψ, leurs valeurs. Nous ne nous arrêterons point à la recherche de ce troiſième coëfficient c, qui

exigeroit préalablement une théorie des équations *indéterminées* à trois variables fecondaires, femblable à celle que j'ai donnée (§ 49) pour le cas de deux pareilles variables.

En fuppofant que la formule e fe termine à ce coëfficient, il ne reftera dans celle f que la dernière fonction ϕ'''. Mais celle-ci équivaut à deux, à caufe des deux différentes fonctions M & N, de même nature qu'elle, qui lui fervent de facteurs. Il faut donc encore faire difparoître l'une de ces dernières, par exemple M, ce qui donne $D\mu = 0$ ou $\mu = F(\Pi, \Omega)$; c'eft-à-dire que μ doit encore coïncider ici avec une des deux fonctions Π, Ω. Ainfi nous pouvons toujours fuppofer $\mu = \Pi$, ce qui reftreindra la formule e à celle . . . . (g)

$$\Sigma = a\phi(\Pi, \nu) + b\phi'(\Pi, \nu) + c\phi'' + \&c. \quad + F(\Pi, \Omega).$$

Il eft également indubitable qu'il y aura des équations à quatre variables qui, n'admettant point d'intégration fucceffive, auront feulement une intégrale finie de la forme

$$\Sigma = a\phi(\Pi, \nu) + b\phi' + c\phi'' + e\phi''' + \&c.$$
$$+ mF(\Pi, \Omega) + nF' + pF'' + qF''' + \&c.;$$

mais cette recherche eft étrangère à mon fujet, & demanderoit à être traitée en particulier, comme je fais pour les équations à trois variables dans le troifième mémoire de ce recueil.

SUITE DU TABLEAU RÉCAPITULATIF.

XI. FORMULE GÉNÉRALE.

$$\theta \left(\frac{d^3z}{dx^3}\frac{d^3z}{dxdy^2} - \frac{d^3z^2}{dx^2dy}\right) + \chi \left(\frac{d^3z}{dx^3}\frac{d^3z}{dy^3} - \frac{d^3z}{dx^2dy}\frac{d^3z}{dxdy^2}\right) + \rho \left(\frac{d^3z}{dx^2dy}\frac{d^3z}{dy^3} - \frac{d^3z^2}{dxdy^2}\right)$$
$$+ \epsilon\frac{d^3z}{dx^3} + \gamma\frac{d^3z}{dx^2dy} + \delta\frac{d^3z}{dxdy^2} + \zeta\frac{d^3z}{dy^3} + \eta = 0\,;$$

θ, χ, ρ n'étant jamais tous trois zéro en même tems, ſans quoi on retomberoit dans la formule pιécédente.

1°. Si les trois premiers termes reſtent ſeuls, & que leurs coèfficiens θ, χ, ρ ne ſoient fonctions que de r, s, t (§ 75), on intègrera cette équation par la méthode (§ 114).

2°. Si tous les termes ſans différence partielle du troiſième ordre diſparoiſſent; c'eſt-à-dire, ſi $\eta = 0$, on employera celle expliquée (§ 114 ... 121).

3°. En ne faiſant aucune ſuppoſition particulière, ſi la propoſée contient au moins une des trois variables z, x, y, on la rapportera aux formules (§ 123 ... 132).

4°. Tous les autres cas de cette équation rentrent dans la formule générale (§ 122).

XII. FORMULE GÉNÉRALE.

La propoſée à trois variables étant d'un ordre quelconque ſupérieur au premier, pourvu que ſes différences partielles de l'ordre le plus élevé, ne paſſent pas le premier degré.

Cette formule qui comprend les 5me, 6me, 9me & 10me s'intègre par la méthode générale expoſée dans le onzième chapitre.

XIII. FORMULE GÉNÉRALE.

$$\alpha \frac{d^2z}{dx^2} + \beta \frac{d^2z}{dxdy} + \gamma \frac{d^2z}{dxdu} + \delta \frac{d^2z}{dy^2} + \varepsilon \frac{d^2z}{dydu} + \zeta \frac{d^2z}{du^2} + \eta \frac{dz}{dx} + \vartheta \frac{dz}{dy} + \varkappa \frac{dz}{du} + \lambda = 0;$$

Tous ces coëfficiens ne contenant que les variables finies; & la variable principale z ne se rencontrant que dans ceux η, ϑ, $\varkappa$ & λ.

1°. Si aucun des termes du second ordre ne manquant dans la proposée, on n'a point $\delta - \alpha\rho^2 = 0$ & $\zeta - \alpha\sigma^2 = 0$, on l'intègrera par la méthode exposée (§ 143 ... 145).

2°. Si par l'absence de quelques-uns de ces mêmes termes ou de ceux du premier ordre, les coëfficiens T & V de *A* dans les deux équations I (§ 141) se réduisent à zéro, on aura égard à ce qui est dit (§ 146).

3°. Si au contraire on a $\delta - \alpha\rho^2 = 0$, & $\zeta - \alpha\sigma^2 = 0$, on consultera (§ 147).

4°. A moins que λ ne soit aussi $= 0$, auquel cas il faudra employer la méthode (§ 148).

5°. Si un ou deux des trois coëfficiens α, δ, ζ sont zéro, ces cas se rapportent aux articles 149 & 150; & s'ils le sont tous trois, à celui 151.

SECOND MÉMOIRE.

Sur les équations indéterminées aux différences partielles ; c'eſt-à-dire, ſur les équations entre pluſieurs grandeurs α, β, γ, &c. qui ſont elles-mêmes des fonctions implicites de deux variables x, y.

1. LES équations de cette eſpèce ſe préſentent toutes les fois qu'il s'agit de déterminer les rapports que doivent avoir entr'elles les différentes grandeurs qui compoſent une certaine formule, pour que cette formule ſatisfaſſe à une certaine condition dépendante de la différentiation. On en a un exemple bien ſimple, tant dans l'équation $\frac{d\alpha}{dx} - \frac{d\beta}{dy} = 0$ qui indique la relation qu'ont entr'eux les coëfficiens α, β de la formule générale $\alpha dy + \beta dx$, lorſque cette formule eſt une différentielle exacte ; que dans celle $\frac{d\Psi}{dx}\frac{d\Pi}{dy} - \frac{d\Psi}{dy}\frac{d\Pi}{dx} = 0$ qui provient de la formule générale $\Psi = \phi : \Pi$. On en a vu un plus compliqué dans le premier mémoire du recueil précédent *art.* 49, où il s'agiſſoit de déterminer les rapports mutuels des différentes fonctions λ, μ, ν, &c. ω, 7, de manière à pouvoir faire diſparoître de l'équation $\Psi = \lambda \phi : \omega + \mu \phi' : \omega + \nu \phi'' \omega +$ &c. $+ F : 7$ toutes les fonctions arbitraires : & cet article contient tout ce qu'on

que je vais employer n'eſt qu'une application de celle que j'ai expoſée dans le premier mémoire du recueil précédent, aux chapitres 6 & 7 : & j'y renvoye le lecteur, s'il rencontre ici quelque difficulté qui ne ſoit point ſuffiſamment éclaircie.

2. Soit $\Psi = F : \Pi$ l'intégrale d'une équation du ſecond ordre, Ψ & Π étant des fonctions de α, β, γ, ε, η, $e = \frac{d\alpha}{dx}$, $f = \frac{d\alpha}{dy}$, $g = \frac{d\beta}{dx}$, $h = \frac{d\beta}{dy}$, $k = \frac{d\gamma}{dx}$, $l = \frac{d\gamma}{dy}$, $m = \frac{d\varepsilon}{dx}$, $n = \frac{d\varepsilon}{dy}$, $p = \frac{d\eta}{dx}$, $q = \frac{d\eta}{dy}$; &

$$d\Psi = \mathit{A}d\alpha + \mathit{B}d\beta + \mathit{D}d\gamma + \mathit{E}d\varepsilon + \mathit{G}d\eta + \mathit{H}de + \mathit{I}df + \mathit{K}dg + \mathit{L}dh + \mathit{M}dk + \mathit{N}dl + \mathit{P}dm + \mathit{Q}dn + \mathit{R}dp + \mathit{T}dq;$$

$$d\Pi = \mathrm{A}d\alpha + \mathrm{B}d\beta + \mathrm{D}d\gamma + \mathrm{E}d\varepsilon + \mathrm{G}d\eta + \mathrm{H}de + \mathrm{I}df + \mathrm{K}dg + \mathrm{L}dh + \mathrm{M}dk + \mathrm{N}dl + \mathrm{P}dm + \mathrm{Q}dn + \mathrm{R}dp + \mathrm{T}dq.$$

On aura, en ſubſtituant ces valeurs dans la formule générale $\frac{d\Psi}{dx}\frac{d\Pi}{dy} - \frac{d\Psi}{dy}\frac{d\Pi}{dx} = 0$, une équation compoſée de 105 termes de la forme

$$1^{\circ}.\ \overline{\mathit{A}\mathrm{B} - \mathrm{A}\mathit{B}}\left(\frac{d\alpha}{dx}\frac{d\beta}{dy} - \frac{d\alpha}{dy}\frac{d\beta}{dx}\right),\ 2^{\circ}.\ \overline{\mathit{A}\mathrm{H} - \mathrm{A}\mathit{H}}\left(\frac{d\alpha}{dx}\frac{de}{dy} - \frac{d\alpha}{dy}\frac{de}{dx}\right),$$

$$3^{\circ}.\ \overline{\mathit{H}\mathrm{I} - \mathrm{H}\mathit{I}}\left(\frac{de}{dx}\frac{df}{dy} - \frac{de}{dy}\frac{df}{dx}\right),$$

qu'on peut partager en trois claſſes ; la première, de ceux qui comme le terme n°. 1°., ne contiennent que des différences partielles du premier ordre $\frac{d\alpha}{dx}$, $\frac{d\beta}{dy}$, &c. ; la ſeconde, de ceux pareils au terme n°. 2°., qui renferment des différences du ſecond ordre, mais linéaires, $\frac{de}{dy} = \frac{d^2\alpha}{dxdy}$, $\frac{de}{dx} = \frac{d^2\alpha}{dx^2}$, &c. ; enfin la troiſième, de ceux où il ſe rencontre des produits de deux pareilles différences, tel que le terme n°. 3°. qui contient $\frac{de}{dx}\frac{df}{dy} = \frac{d^2\alpha}{dx^2}\frac{d^2\alpha}{dy^2}$, &c.

Je commencerai par ſuppoſer les coëfficiens de ces derniers égaux à zéro, afin de me borner aux équations dont les différences partielles de l'ordre le plus élevé ſont linéaires. Par-là l'équation précédente ſe réduira à 60 de ces mêmes termes. Je les ordonne par rapport aux différences partielles $\frac{d^2\alpha}{dx^2}$, $\frac{d^2\alpha}{dxdy}$, $\frac{d^2\alpha}{dy^2}$, $\frac{d^2\beta}{dx^2}$, &c., & prenant pour formule générale de toute équation de cette eſpèce, . . . (A)

$$\mathrm{a}\frac{d^2\alpha}{dx^2} + \mathrm{b}\frac{d^2\alpha}{dxdy} + \mathrm{e}\frac{d^2\alpha}{dy^2} + \mathrm{f}\frac{d^2\beta}{dx^2} + \mathrm{g}\frac{d^2\beta}{dxdy} + \mathrm{h}\frac{d^2\beta}{dy^2} + \mathrm{i}\frac{d^2\gamma}{dx^2} + \mathrm{k}\frac{d^2\gamma}{dxdy} +$$
$$\mathrm{l}\frac{d^2\gamma}{dy^2} + \mathrm{m}\frac{d^2\varepsilon}{dx^2} + \mathrm{r}\frac{d^2\varepsilon}{dxdy} + \mathrm{s}\frac{d^2\varepsilon}{dy^2} + \mathrm{t}\frac{d^2\eta}{dx^2} + \mathrm{u}\frac{d^2\eta}{dxdy} + \mathrm{v}\frac{d^2\eta}{dy^2} + \mathrm{w} = 0,$$

je la compare terme à terme avec celle qui réſulte des opérations ci-deſſus, & j'en déduis 15 équations, outre le dernier terme qui eſt celui ſans différence partielle du ſecond ordre, & dont, pour le préſent, je ferai abſtraction. J'élimine d'abord toutes les lettres I, K, L, . . . T de ces 15 équations, au moyen de celles $\mathit{H}\mathrm{I} - \mathrm{H}\mathit{I} = 0$, &c. qui ſervent à anéantir les termes où les différences partielles du ſecond ordre ſont multipliées entr'elles ; & par-là elles deviennent

$$\overline{\mathit{A}\mathrm{H} - \mathrm{A}\mathit{H}}\cdot f + \overline{\mathit{B}\mathrm{H} - \mathrm{B}\mathit{H}}\cdot h + \overline{\mathit{D}\mathrm{H} - \mathrm{D}\mathit{H}}\cdot l + \overline{\mathit{E}\mathrm{H} - \mathrm{E}\mathit{H}}\cdot n + \overline{\mathit{G}\mathrm{H} - \mathrm{G}\mathit{H}}\cdot q = -\mathrm{a},$$
$$\overline{\mathit{A}\mathrm{H} - \mathrm{A}\mathit{H}}\cdot e + \overline{\mathit{B}\mathrm{H} - \mathrm{B}\mathit{H}}\cdot g + \overline{\mathit{D}\mathrm{H} - \mathrm{D}\mathit{H}}\cdot k + \overline{\mathit{E}\mathrm{H} - \mathrm{E}\mathit{H}}\cdot m + \overline{\mathit{G}\mathrm{H} - \mathrm{G}\mathit{H}}\cdot p - \,:\,;\,:$$
$$\frac{I}{H}(\overline{\mathit{A}\mathrm{H} - \mathrm{A}\mathit{H}}\cdot f + \overline{\mathit{B}\mathrm{H} - \mathrm{B}\mathit{H}}\cdot h + \overline{\mathit{D}\mathrm{H} - \mathrm{D}\mathit{H}}\cdot l + \overline{\mathit{E}\mathrm{H} - \mathrm{E}\mathit{H}}\cdot n + \overline{\mathit{G}\mathrm{H} - \mathrm{G}\mathit{H}}\cdot q) = \mathrm{b},$$
$$\frac{I}{H}(\overline{\mathit{A}\mathrm{H} - \mathrm{A}\mathit{H}}\cdot e + \overline{\mathit{B}\mathrm{H} - \mathrm{B}\mathit{H}}\cdot g + \overline{\mathit{D}\mathrm{H} - \mathrm{D}\mathit{H}}\cdot k + \overline{\mathit{E}\mathrm{H} - \mathrm{E}\mathit{H}}\cdot m + \overline{\mathit{G}\mathrm{H} - \mathrm{G}\mathit{H}}\cdot p) = \mathrm{e}$$

&c.

Pour leur donner une forme plus ſimple, je ferai $\mathit{A}\mathrm{H} - \mathrm{A}\mathit{H} = \Gamma$, $\mathit{B}\mathrm{H} - \mathrm{B}\mathit{H} = \Delta$, $\mathit{D}\mathrm{H} - \mathrm{D}\mathit{H} = \Theta$, $\mathit{E}\mathrm{H} - \mathrm{E}\mathit{H} = \Lambda$, $\mathit{G}\mathrm{H} - \mathrm{G}\mathit{H} = \Xi$; & elles ſe changeront en

$$\Gamma f + \Delta h + \Theta l + \Lambda n + \Xi q = -\mathrm{a},$$

$$\Gamma e + \Delta g + \Theta k + \Lambda m + \Xi p - \frac{I}{H}(\Gamma f + \Delta h + \Theta l + \Lambda n + \Xi q) = \mathrm{b};$$

$$\frac{I}{H}(\Gamma e + \Delta g + \Theta k + \Lambda m + \Xi p) = e;$$

&c.

que je ſimplifierai encore en faiſant

$$\Gamma f + \Delta h + \Theta l + \Lambda n + \Xi q = \Sigma,\ \Gamma e + \Delta g + \Theta k + \Lambda m + \Xi p = \Omega;$$

ce qui les réduira à

$$1^{o}.\ \Sigma = -\mathrm{a},\ 2^{o}.\ \Omega - \frac{I}{H}\Sigma = \mathrm{b},\ 3^{o}.\ \frac{I}{H}\Omega = \mathrm{e},\ 4^{o}.\ \frac{K}{H}\Sigma = -\mathrm{f},\ 5^{o}.\ \frac{K}{H}\Omega - \frac{L}{H}\Sigma = \mathrm{g},$$

$$6^{o}.\ \frac{L}{H}\Omega = \mathrm{h},\ 7^{o}.\ \frac{M}{H}\Sigma = -\mathrm{i},\ 8^{o}\ \frac{M}{H}\Omega - \frac{N}{H}\Sigma = \mathrm{k},\ 9^{o}.\ \frac{N}{H}\Omega = \mathrm{l},\ 10^{o}.\ \frac{P}{H}\Sigma = -\mathrm{m};$$

$$11^{o}.\ \frac{P}{H}\Omega - \frac{Q}{H}\Sigma = \mathrm{r},\ 12^{o}.\ \frac{Q}{H}\Omega = \mathrm{s},\ 13^{o}.\ \frac{R}{H}\Sigma = -\mathrm{t},\ 14^{o}.\ \frac{R}{H}\Omega - \frac{T}{H}\Sigma = \mathrm{u};$$

$$15^{o}.\ \frac{T}{H}\Omega = \mathrm{v}.$$

Je combine entr'elles ces 15 équations de la manière ſuivante ; ſavoir . . . . (B)

les 1, 2, 3	donnent	$1^{o}.\ \mathrm{a}I^2 - \mathrm{b}IH + \mathrm{e}H^2 = 0$
1, 3, 5	»	$2^{o}.\ \mathrm{a}IL - \mathrm{g}IH + \mathrm{e}HK = 0$
1, 3, 8	»	$3^{o}.\ \mathrm{a}IN - \mathrm{k}IH + \mathrm{e}HM = 0$
1, 3, 11	»	$4^{o}.\ \mathrm{a}IQ - \mathrm{r}IH + \mathrm{e}HP = 0$
1, 3, 14	»	$5^{o}.\ \mathrm{a}IT - \mathrm{u}IH + \mathrm{e}HR = 0$
1, 4	»	$6^{o}.\ \mathrm{a}K - \mathrm{f}H = 0$
3, 6	»	$7^{o}.\ \mathrm{e}L - \mathrm{h}I = 0$
1, 7	»	$8^{o}.\ \mathrm{a}M - \mathrm{i}H = 0$
3, 9	»	$9^{o}.\ \mathrm{e}N - \mathrm{l}I = 0$
1, 10	»	$10^{o}.\ \mathrm{a}P - \mathrm{m}H = 0$
3, 12	»	$11^{o}.\ \mathrm{e}Q - \mathrm{s}I = 0$
1, 13	»	$12^{o}.\ \mathrm{a}R - \mathrm{t}H = 0$
3, 15	»	$13^{o}.\ \mathrm{e}T - \mathrm{v}I = 0.$

3. Remarquons maintenant; 1°. que ces treize équations ne contiennent que les lettres H, I ..... T, c'eſt-à-dire les différences partielles de Ψ par $e, f \ldots q$ qui ſont elles-mêmes des différences partielles de α, β, γ, &c.; 2°. que la première d'entre ces équations, avec les huit dernières, établira un rapport deux à deux entre toutes les différentes lettres H, I .... T; 3°. qu'à cauſe des équations $H\text{I} - \text{H}I = 0$, &c. qui ont ſervi à éliminer les différences partielles correſpondantes H, I .... T de Π, il règne entre celles-ci le même rapport qu'entre les premières; & qu'ainſi, lorſqu'au moyen de ces neuf équations nous aurons déterminé la fonction Ψ en $e, f \ldots q$, cette même détermination ſervira auſſi pour Π, qui conſéquemment ne contiendra ces mêmes lettres que ſous la même forme.

Quant aux autres équations, ſavoir les 2^{me}, 3^{me}, 4^{me} & 5^{me}, elles fourniſſent quatre équations de condition qui doivent avoir lieu, pour que la propoſée ſoit ſuſceptible de cette première opération. Pour cela on y ſubſtituera à L, K; N, M; Q, P; T, R; leurs valeurs tirées des huit dernières; & elles deviendront toutes de la forme $\xi I^2 - \zeta IH + \gamma H^2 = 0$. Eliminant donc ſucceſſivement, de chacune d'elles, au moyen de la première $\text{a}I^2 - \text{b}IH + \text{e}H^2 = 0$, les deux lettres I, H, on parviendra dans le même ordre à ces quatre équations; ſavoir .... (C)

$$(\text{ef} - \text{ah})^2 = (\text{eg} - \text{bh})(\text{bf} - \text{ag}),$$
$$(\text{ei} - \text{al})^2 = (\text{ek} - \text{bl})(\text{bi} - \text{ak});$$
$$(\text{em} - \text{as})^2 = (\text{er} - \text{bs})(\text{bm} - \text{ar}),$$
$$(\text{et} - \text{av})^2 = (\text{eu} - \text{bv})(\text{bt} - \text{au}).$$

Maintenant la première des équations B donne

$$\frac{I}{H} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ae}}{2a} = \rho, \text{ c'eſt-à-dire } \frac{d\Psi}{df} - \rho \frac{d\Psi}{de} = 0$$

dont l'intégrale ſera $\Psi = F: Æ$, $dÆ$ étant $= 7(de + \rho df)$. Mais comme Ψ peut, outre e & f, contenir encore les lettres g, h, k, l, m, n, p & q qui ont été traitées ici comme conſtantes, il faudra, pour avoir l'intégrale complète, l'exprimer par la formule $\Psi = F:(UÆ + Y)$, U & Y, étant des fonctions à déterminer de toutes ces lettres. *

4. Suppoſons donc . . . . (D)

$$dU = adg + bdh + cdk + rdl + tdm + udn + vdp + wdq,$$
$$dY = \vartheta dg + \zeta dh + \kappa dk + \lambda dl + \mu dm + \nu dn + \varpi dp + \chi dq,$$

& différentions cette formule partiellement, ſucceſſivement par e, g; f, h; e, k; f, l; e, m; f, n; e, p; f, q; il en réſultera huit équations qui devront être identiques, chacune & dans le même ordre, à une des huit dernières équations B : & cette comparaiſon ſuffira pour déterminer toutes les indéterminées. Connoiſſant U & Y, on aura donc Ψ relativement ſeulement aux lettres $e, f \ldots q$; c'eſt-à-dire, qu'on ſaura ſous quelle forme ces lettres ſont contenues dans Ψ, & conſéquemment auſſi, d'après la troiſième remarque ci-deſſus, dans Π. Nous pourrons dès-lors égaler cette fonction de $e, f \ldots q$ à une ſeule lettre σ, & par la ſubſtitution de cette valeur en σ, les éliminer toutes de la propoſée qui ſe réduira à une équation telle qu'elle réſulteroit de la formule $\Psi = F: \Pi$, Ψ & Π ne contenant plus que $\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon, \eta$ & σ; c'eſt-à-dire, ſix fonctions ou variables

---

* Voyez le prem. Mém. du prem. Recueil art. 60, & le ſecond Mém. du même Recueil art. 9. Voyez auſſi dans le prem. Mém. art. 139, une méthode plus générale pour compléter ces intégrales partielles.

ales, au-lieu de quinze : pourvu néanmoins que les quatre ns de condition C ayent lieu, comme nous avons dit ci-d[illegible] (§ 3).

5. Nous pouvons conféquemment regarder la fuite des opérations comme un nouveau problème ; ce qui remet à notre difpofition toutes les lettres que nous avons employées jufqu'ici, excepté les cinq α, β, γ, ε, η qui confervent leur ancienne fignification, & celle σ qui a déjà la fienne. Soit donc

$$d\Psi = A\,d\alpha + B\,d\beta + D\,d\gamma + E\,d\varepsilon + G\,d\eta + H\,d\sigma$$

$$d\Pi = \mathrm{A}\,d\alpha + \mathrm{B}\,d\beta + \mathrm{D}\,d\gamma + \mathrm{E}\,d\varepsilon + \mathrm{G}\,d\eta + \mathrm{H}\,d\sigma$$

& fubftituons ces valeurs dans la formule $\frac{d\Psi}{dx}\frac{d\Pi}{dy}-\frac{d\Psi}{dy}\frac{d\Pi}{dx}=0$, il en réfultera . . . . (E)

$$\overline{A\mathrm{B}-\mathrm{A}B}\left(\frac{d\alpha}{dx}\frac{d\beta}{dy}-\frac{d\alpha}{dy}\frac{d\beta}{dx}\right)+\overline{A\mathrm{D}-\mathrm{A}D}\left(\frac{d\alpha}{dx}\frac{d\gamma}{dy}-\frac{d\alpha}{dy}\frac{d\gamma}{dx}\right)+\overline{A\mathrm{E}-\mathrm{A}E}\left(\frac{d\alpha}{dx}\frac{d\varepsilon}{dy}-\frac{d\alpha}{dy}\frac{d\varepsilon}{dx}\right)+$$

$$\overline{A\mathrm{G}-\mathrm{A}G}\left(\frac{d\alpha}{dx}\frac{d\eta}{dy}-\frac{d\alpha}{dy}\frac{d\eta}{dx}\right)+\overline{A\mathrm{H}-\mathrm{A}H}\left(\frac{d\alpha}{dx}\frac{d\sigma}{dy}-\frac{d\alpha}{dy}\frac{d\sigma}{dx}\right)+\overline{B\mathrm{D}-\mathrm{B}D}\left(\frac{d\beta}{dx}\frac{d\gamma}{dy}-\frac{d\beta}{dy}\frac{d\gamma}{dx}\right)+$$

$$\overline{B\mathrm{E}-\mathrm{B}E}\left(\frac{d\beta}{dx}\frac{d\varepsilon}{dy}-\frac{d\beta}{dy}\frac{d\varepsilon}{dx}\right)+\overline{B\mathrm{G}-\mathrm{B}G}\left(\frac{d\beta}{dx}\frac{d\eta}{dy}-\frac{d\beta}{dy}\frac{d\eta}{dx}\right)+\overline{B\mathrm{H}-\mathrm{B}H}\left(\frac{d\beta}{dx}\frac{d\sigma}{dy}-\frac{d\beta}{dy}\frac{d\sigma}{dx}\right)+$$

$$\overline{D\mathrm{E}-\mathrm{D}E}\left(\frac{d\gamma}{dx}\frac{d\varepsilon}{dy}-\frac{d\gamma}{dy}\frac{d\varepsilon}{dx}\right)+\overline{D\mathrm{G}-\mathrm{D}G}\left(\frac{d\gamma}{dx}\frac{d\eta}{dy}-\frac{d\gamma}{dy}\frac{d\eta}{dx}\right)+\overline{D\mathrm{H}-\mathrm{D}H}\left(\frac{d\gamma}{dx}\frac{d\sigma}{dy}-\frac{d\gamma}{dy}\frac{d\sigma}{dx}\right)+$$

$$\overline{E\mathrm{G}-\mathrm{E}G}\left(\frac{d\varepsilon}{dx}\frac{d\eta}{dy}-\frac{d\varepsilon}{dy}\frac{d\eta}{dx}\right)+\overline{E\mathrm{H}-\mathrm{E}H}\left(\frac{d\varepsilon}{dx}\frac{d\sigma}{dy}-\frac{d\varepsilon}{dy}\frac{d\sigma}{dx}\right)+\overline{G\mathrm{H}-\mathrm{G}H}\left(\frac{d\eta}{dx}\frac{d\sigma}{dy}-\frac{d\eta}{dy}\frac{d\sigma}{dx}\right)=0,$$

équation qui, à l'avantage de contenir confidérablement moins de termes, en joint un beaucoup plus effentiel ; favoir, que tous les termes en font connus & de même ordre ; ce qui n'avoit pas lieu dans la première formule A où nous avons été obligés de confidérer comme un feul terme W, la fomme de tous ceux qui ne contenoient pas de différences particlles du fecond ordre.

6. Je repréfenterai toute propofée après cette transformation,

qui eſt ce que j'ai nommé dans le mémoire cité une *transformée parfaite*, par une équation de même forme, & dont tous les termes auront reſpectivement, & dans le même ordre de gauche à droite, pour coèfficiens, a, b, c, e, f, g, h, k, l, m, n, p, q, r, t. Comparant enſuite ces deux équations terme à terme, j'aurai quinze équations $\mathcal{A}B - A\mathcal{B} = a$, $\mathcal{A}D - A\mathcal{D} = b$, $\mathcal{A}E - A\mathcal{E} = c$, &c. que je combinerai entr'elles dans l'ordre ſuivant, afin d'en éliminer tous les coèfficiens de l'une ou de l'autre des deux fonctions Ψ, Π, par exemple de la dernière; 1, 2, 6; 1, 3, 7; 1, 4, 8; 1, 5, 9; 2, 3, 10; 2, 4, 11; 2, 5, 12; 3, 4, 13; 3, 5, 14; 4, 5, 15; 6, 7, 10; 6, 8, 11; 6, 9, 12; 7, 8, 13; 7, 9, 14; 8, 9, 15; 10, 11, 13; 10, 12, 14; 11, 12, 15; 13, 14, 15; & je déduirai delà les vingt équations... (F)

1°. $gA - bB + aD = 0$.	11°. $mB - hD + gE = 0$
2°. $hA - cB + aE = 0$.	12°. $nB - kD + gG = 0$
3°. $kA - eB + aG = 0$	13°. $pB - lD + gH = 0$
4°. $lA - fB + aH = 0$	14°. $qB - kE + hG = 0$
5°. $mA - cD + bE = 0$	15°. $rB - lE + hH = 0$
6°. $nA - eD + bG = 0$	16°. $tB - lG + kH = 0$.
7°. $pA - fD + bH = 0$	17°. $qD - nE + mG = 0$
8°. $qA - eE + cG = 0$	18°. $rD - pE + mH = 0$
9°. $rA - fE + cH = 0$	19°. $tD - pG + nH = 0$
10°. $tA - fG + eH = 0$.	20°. $tE - rG + qH = 0$.

Ces vingt équations ſont de la même forme que celles de l'article 79 du mémoire cité; & de même que là j'ai combiné enſemble les deux équations par quadernes dans chacun deſquels il manquoit une des cinq lettres, ce qui a produit une équation de condition pour chaque lettre; de même ici on les combinera encore par quadernes dans chacun deſquels il manquera deux des ſix lettres A,

B, *D*, *E*, *G*, *H*; ce qui fera une équation par ambe, & conféquemment ici quinze équations de condition, mais qui fe réduiront indubitablement à un nombre beaucoup moindre, comme les cinq équations de l'endroit cité fe font réduites à trois. Je ne m'arrêterai pas davantage à cette recherche qui ne préfente aucune difficulté, & je paffe à l'intégration du fyftème de ces vingt équations.

7. La méthode à employer pour y réuffir, eft évidemment la même que celle de l'article 59 du Mémoire cité, à la différence près que dans cet article les fonctions indéterminées ne contenoient que deux variables, au-lieu qu'ici elles en contiendront trois. Ainfi, en fuppofant que la valeur réelle de Ψ foit $\Psi = F:(\Gamma, \Omega)$, d'où l'intégrale de la transformée parfaite feroit $\Gamma = \phi::\Omega$; que celle de l'une quelconque des vingt équations F foit $\Psi = F:(\Gamma', \Omega')$; & enfin, que P, Q, R, T foient quatre fonctions inconnues des trois lettres qui n'auront pas varié dans celle des vingt équations F qu'on aura intégrée, on aura $P\Gamma' + Q = \Gamma$ & $R\Omega' + T = \Omega$; & conféquemment en différentiant partiellement $P\Gamma' + Q = \phi:(R\cdot\Omega' + T)$, la réfultante doit être identique à la transformée parfaite dont on cherche l'intégrale; ce qui fuffit pour déterminer les quatre fonctions P, Q, R, T. Il nous refte à examiner l'opération de la fubftitution à faire dans la propofée, pour la rendre une transformée parfaite : & c'eft de quoi je vais m'occuper.

8. Nous avons repréfenté par σ (§ 4) la forme fous laquelle les lettres $e, f, g, \ldots q$ peuvent fe rencontrer dans Ψ & Π; ce qui n'exclut cependant pas celles $\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon, \eta$. Ainfi $d\sigma$ fera =

$$\frac{d\sigma}{de}de + \frac{d\sigma}{df}df + \&c. + \frac{d\sigma}{dq}dq + \frac{d\sigma}{d\alpha}d\alpha + \frac{d\sigma}{d\beta}d\beta + \&c.$$

mais

Mais $\frac{d\sigma}{de}$ eſt évidemment $= \frac{d\Psi}{de} = H$, $\frac{d\sigma}{df} = \frac{d\Psi}{df} = I$, &c. (§ 2) ; donc

$$d\sigma = Hde + Idf + \ldots + Tdq + \xi d\alpha + \zeta d\epsilon + \&c.,$$

ces lettres ξ, ζ étant de nouvelles indéterminées qui dépendent de la nature de la fonction σ. Et en prenant ſucceſſivement les différences partielles de σ par x & y, faiſant de plus $\xi e + \zeta g + \&c. = u$, $\xi f + \zeta h + \&c. = v$, on aura

$$\frac{d\sigma}{dx} = H\frac{d^2\alpha}{dx^2} + I\frac{d^2\alpha}{dxdy} \ldots + T\frac{d^2\eta}{dxdy} + u,$$

$$\frac{d\sigma}{dy} = H\frac{d^2\alpha}{dxdy} + I\frac{d^2\alpha}{dy^2} \ldots + T\frac{d^2\eta}{dy^2} + v.$$

Tirant enſuite delà les valeurs de $\frac{d^2\alpha}{dx^2}$ & $\frac{d^2\alpha}{dy^2}$, & les ayant ſubſtituées dans l'équation A (§ 2), non ſeulement ces deux différences partielles du ſecond ordre, mais encore toutes les autres du même ordre diſparoîtront en même tems ; puiſque chacun de leurs coëfficiens ſera proportionnel au premier membre d'une des treize équations B (§ 2), & il reſtera .... (H)

$$\mathrm{a}I\frac{d\sigma}{dx} + \mathrm{e}H\frac{d\sigma}{dy} - \mathrm{a}Iu - \mathrm{e}Hv + \mathrm{w}HI = 0$$

qui ſera la transformée imparfaite. Ainſi tant que la propoſée ſera telle que les treize équations B, ou les quatre équations de condition C (§ 3) ayent lieu, il ſuffira de ſubſtituer à $\frac{d^2\alpha}{dx^2}$ & $\frac{d^2\alpha}{dy^2}$, ou à $\frac{d^2\epsilon}{dx^2}$ & $\frac{d^2\epsilon}{dy^2}$, &c. leurs valeurs, en négligeant tous les autres termes du même ordre. Il n'y aura plus alors, pour rendre cette transformée parfaite, qu'à ſubſtituer dans les coëfficiens, σ à ſa valeur ; & elle devra prendre la forme de l'équation E (§ 5), où les coëf-

tions B qui dans ce cas-ci ſont les dernières ; les autres étant nulles, parce qu'il n'y a que trois variables principales. On aura par là... (G)

1°. $Uf+(gf-eh)a'+\vartheta'=\omega(le-kf)$; 2°. $Uh=\omega(lg-kh)$;
3°. $-Ue+(gf-eh)b'+\zeta'=\theta(le-kf)$; 4°. $Ug=\theta(kh-lg)$;
5°. $(gf-eh)c'+\varkappa'=\rho(fg-eh)$; 6°. $Uh=\rho(lg-kh)$;
7°. $(gf-eh)r'+\lambda'=\tau(fg-eh)$; 8°. $Ug=\tau(kh-lg)$;

$\omega, \theta, \rho, \tau$ étant des facteurs indéterminés par leſquels j'ai multiplié les quatre équations B avant de faire la comparaiſon terme à terme. Les 2, 4, 6 & 8[me] de ces équations G donnent d'abord $\theta h=-\omega g$, $\rho=\omega$, $\tau h=-\omega g$. Multipliant enſuite les 1, 3, 5 & 7[me] reſpectivement par dg, dh, dk & dl; mettant pour θ, ρ & τ leurs valeurs en ω; prenant la ſomme de ces quatre équations; & ſubſtituant enfin dU & dY à leurs valeurs, on aura

$$Ufdg-Uedh+(gf-eh)dU+dY=\omega\left((le-kf)(dg-\tfrac{g}{h}dh)+(fg-eh)(dk-\tfrac{g}{h}dl)\right)$$

qui, multipliant tout par h, mettant au lieu de Uh ſa valeur $\omega(lg-kh)$, & réduiſant, devient

$$(gf-eh)hdU+hdY=\omega(gf-eh)d(kh-lg).$$

Or U & Y ne doivent contenir ni e ni f; il faut donc que toute cette équation puiſſe ſe diviſer par $gf-eh$; ce qui ne peut avoir lieu, qu'autant que le terme hdY diſparoîtra. Ainſi $dY=0$ & $Y=$ *conſt.* Parlà on aura $dU=\frac{\omega}{h}d(kh-lg)$, & mettant pour $\frac{\omega}{h}$ ſa valeur tirée de la ſeconde équation G,

$$(kh-lg)dU+Ud(kh-lg)=0,$$

d'où $U=\frac{\text{conſt.}}{kh-lg}$. La valeur complète de Ψ eſt donc

$$\Psi=F\left(\frac{gf-eh}{kg-lg}\right), \text{ \& } \sigma=\frac{gf-eh}{kh-lg}.$$

U & Y. Il eſt cependant certain, d'après la forme de l'intégrale finie que nous avons trouvée, qu'il y a une ſeconde intégrale première complète : voici le nœud. Cette ſeconde intégrale, qu'on trouve facilement *à poſteriori* en différentiant l'intégrale finie, eſt $\Psi = \phi : \frac{fg - eh}{fk - el}$. Or, en ne traitant que e & f comme variables, ce qui a lieu en effet dans la première des équations B, cette fonction $\frac{fg - eh}{fk - el}$ devient une fraction homogène de dimenſion nulle de ces deux variables, qui conſéquemment ſe réduit, comme toute pareille fonction, à une fonction de la fraction ſimple $\frac{e}{f}$; c'eſt-à-dire, que le calcul ne peut dans ce cas s'exprimer autrement que par l'expreſſion vague $\phi : \frac{e}{f}$, comme il le fait. Pour obvier à cet inconvénient, au-lieu d'intégrer la première des équations B qui ne varie que par e & f, on prendra l'une ou l'autre de celles à deux racines, par exemple la ſeconde, dans laquelle on ſubſtituera à H & I leurs valeurs en K & L, ce qui y introduira g & h comme les deux variables. Il arrivera même, en prenant ces deux nouvelles variables, que la première valeur qu'on a déduite de l'autre manière, ſe préſentera ici, par la même raiſon, ſous une forme analogue $\Psi = \phi : \frac{g}{h}$.

Quant à la ſeconde valeur qu'on cherche, on y parviendra par ce moyen-ci ſans aucune difficulté, & on trouvera $\Psi = \phi : (fg - eh)$. De plus, on aura $Y = 0$, & U [fonction de f, e, k, l] $= \frac{1}{fk - el}$; ce qui donne la même expreſſion que ci-deſſus, pour la valeur complète $\Psi = \phi : [U(fg - eh) + Y]$.

$\frac{d\alpha}{dx}\frac{d\sigma}{dy}-\frac{d\alpha}{dy}\frac{d\sigma}{dx}$, $\frac{d\beta}{dx}\frac{d\sigma}{dy}-\frac{d\beta}{dy}\frac{d\sigma}{dx}$, ... $\frac{d\eta}{dx}\frac{d\sigma}{dy}-\frac{d\eta}{dy}\frac{d\sigma}{dx}$ (§ 5) ſoient, auſſi bien que ces indéterminées elles-mêmes, fonctions de σ ſans mélange de $e, f, \ldots q$; les autres lettres $\alpha, \beta, \ldots \eta$ étant regardées ici comme conſtantes.

13. Le problème que je viens de réſoudre; ſavoir, d'intégrer les équations *indéterminées* du ſecond ordre, dans leſquelles les différences partielles de cet ordre ſont linéaires, étoit le ſeul que je me propoſaſſe en commençant ce mémoire; mais l'utilité de cette théorie, & la facilité que j'ai trouvée à l'établir en y appliquant la méthode du chapitre ſixième du premier mémoire du recueil précédent, m'ont déterminé à continuer mes recherches ſur ce ſujet, & à embraſſer cette queſtion dans toute ſa généralité, comme j'ai fait pour les équations ordinaires ou *déterminées* de cet ordre. C'eſt auſſi la même méthode; ſavoir, celle du chapitre huitième du même mémoire, dont je me ſervirai pour la réſolution de ce nouveau genre d'équations. J'ai admis dans ce qui précède cinq variables α, β, γ, ε, η, parce que le problème auquel ſe rapportoient particulièrement ces recherches, en contenoit autant *, mais je reſtreindrai déſormais ce nombre à deux, ce qui ſuffira pour le but que je me propoſe ici. Soit donc (§ 2)

$$d\Psi = A d\alpha + B d\beta + H de + I df + K dg + L dh,$$
$$d\Pi = \mathrm{A} d\alpha + \mathrm{B} d\beta + \mathrm{H} de + \mathrm{I} df + \mathrm{K} dg + \mathrm{L} dh.$$

En ſubſtituant ces valeurs dans la formule générale $\frac{d\Psi}{dx}\frac{d\Pi}{dy}-\frac{d\Psi}{dy}\frac{d\Pi}{dx}$ $= 0$, on aura .... (L)

* C'eſt le problème du mémoire ſuivant, art. 6.

$$\overline{H\mathrm{I}-\mathrm{H}I}\left(\frac{de}{dx}\frac{df}{dy}-\frac{de}{dy}\frac{df}{dx}\right)+\overline{H\mathrm{K}-\mathrm{H}K}\left(\frac{de}{dx}\frac{dg}{dy}-\frac{de}{dy}\frac{dg}{dx}\right)+\overline{H\mathrm{L}-\mathrm{H}L}\left(\frac{de}{dx}\frac{dh}{dy}-\frac{de}{dy}\frac{dh}{dx}\right)+$$
$$\overline{I\mathrm{K}-\mathrm{I}K}\left(\frac{df}{dx}\frac{dg}{dy}-\frac{df}{dy}\frac{dg}{dx}\right)+\overline{I\mathrm{L}-\mathrm{I}L}\left(\frac{df}{dx}\frac{dh}{dy}-\frac{df}{dy}\frac{dh}{dx}\right)+\overline{K\mathrm{L}-\mathrm{K}L}\left(\frac{dg}{dx}\frac{dh}{dy}-\frac{dg}{dy}\frac{dh}{dx}\right)+$$
$$\overline{A\mathrm{H}-\mathrm{A}H}\left(\frac{d\alpha}{dx}\frac{de}{dy}-\frac{d\alpha}{dy}\frac{de}{dx}\right)+\overline{A\mathrm{I}-\mathrm{A}I}\left(\frac{d\alpha}{dx}\frac{df}{dy}-\frac{d\alpha}{dy}\frac{df}{dx}\right)+\overline{A\mathrm{K}-\mathrm{A}K}\left(\frac{d\alpha}{dx}\frac{dg}{dy}-\frac{d\alpha}{dy}\frac{dg}{dx}\right)+$$
$$\overline{A\mathrm{L}-\mathrm{A}L}\left(\frac{d\alpha}{dx}\frac{dh}{dy}-\frac{d\alpha}{dy}\frac{dh}{dx}\right)+\overline{B\mathrm{H}-\mathrm{B}H}\left(\frac{d\beta}{dx}\frac{de}{dy}-\frac{d\beta}{dy}\frac{de}{dx}\right)+\overline{B\mathrm{I}-\mathrm{B}I}\left(\frac{d\beta}{dx}\frac{df}{dy}-\frac{d\beta}{dy}\frac{df}{dx}\right)+$$
$$\overline{B\mathrm{K}-\mathrm{B}K}\left(\frac{d\beta}{dx}\frac{dg}{dy}-\frac{d\beta}{dy}\frac{dg}{dx}\right)+\overline{B\mathrm{L}-\mathrm{B}L}\left(\frac{d\beta}{dx}\frac{dh}{dy}-\frac{d\beta}{dy}\frac{dh}{dx}\right)+\overline{A\mathrm{B}-\mathrm{A}B}\left(\frac{d\alpha}{dx}\frac{d\beta}{dy}-\frac{d\alpha}{dy}\frac{d\beta}{dx}\right)=0;$$

qui eſt l'équation *indéterminée* du ſecond ordre à deux variables principales, dans toute ſa généralité ; & dont on diſtinguera, comme ci-deſſus, (§ 1), les termes en trois claſſes ; ſavoir,

Les ſix premiers qui contiennent les produits $\frac{de}{dx}\frac{df}{dy}$, &c. de deux différences partielles du ſecond ordre ;

Les huit ſuivans que je nommerai termes moyens, qui ne contiennent ces mêmes différences du ſecond ordre que ſous une forme linéaire ;

Et enfin les derniers (qui ſe réduiſent ici à un ſeul parce qu'il n'y a que deux variables α & β) qui ne contiennent que des différences partielles du premier ordre.

14. En ſuivant la marche du chapitre huitième du mémoire cité, nous commencerons par les équations qui ne conſiſtent que dans les ſix premiers termes. On a alors tous les autres coëfficiens égaux à zéro ; c'eſt-à-dire, $A\mathrm{H} - \mathrm{A}H = 0$, $A\mathrm{I} - \mathrm{A}I = 0$, ... $A\mathrm{B} - \mathrm{A}B = 0$; ce qui exige que A, A, B & B ſoient nuls, & conſéquemment que Ψ & Π ne renferment aucune des variables principales finies α, β. L'équation ſe réduit alors à une équation *indéterminée*

indéterminée du premier ordre entre les quatre variables principales e, f, g, h ; & elle rentre évidemment dans la claſſe de celles que j'ai enſeigné à intégrer dans le mémoire cité art. 49.

15. Maintenant, ſi on fait attention aux différens termes qui compoſent l'équation L, on verra que les premiers ne ſont ſuſceptibles d'aucune réduction, & que chacun d'eux fait néceſſairement un terme à part. Il n'en eſt pas de même des termes moyens qui, à cauſe de $\frac{df}{dx} = \frac{de}{dy} = \frac{d^2\alpha}{dxdy}$ & de $\frac{dh}{dx} = \frac{dg}{dy} = \frac{d^2\beta}{dxdy}$, prendront la forme ... (M)

$$-[(A\mathrm{H} - \mathrm{A}H)f + (B\mathrm{H} - \mathrm{B}H)h]\frac{d^2\alpha}{dx^2} + [(A\mathrm{H} - \mathrm{A}H)e + (B\mathrm{H} - \mathrm{B}H)g - (A\mathrm{I} - \mathrm{A}I)f - (B\mathrm{I} - \mathrm{B}I)h]\frac{d^2\alpha}{dxdy} + [(A\mathrm{I} - \mathrm{A}I)e + (B\mathrm{I} - \mathrm{B}I)g]\frac{d^2\alpha}{dy^2} - [(A\mathrm{K} - \mathrm{A}K)f + (B\mathrm{K} - \mathrm{B}K)h]\frac{d^2\beta}{dx^2} + [(A\mathrm{K} - \mathrm{A}K)e + (B\mathrm{K} - \mathrm{B}K)g - (A\mathrm{L} - \mathrm{A}L)f - (B\mathrm{L} - \mathrm{B}L)h]\frac{d^2\beta}{dxdy} + [(A\mathrm{L} - \mathrm{A}L)e + (B\mathrm{L} - \mathrm{B}L)g]\frac{d^2\beta}{dy^2}.$$

Quant aux derniers termes, qui ſe réduiſent ici à un ſeul, leur totalité ne peut jamais être conſidérée que comme un ſeul terme, vu l'impoſſibilité de diſtinguer l'un de l'autre. Ainſi, en ſuppoſant que, dans la formule générale de ces équations, les coèfficiens des ſix premiers termes ſoient, dans le même ordre que ceux de l'équation L, a, b, c, e, f, g ; ceux des ſix termes moyens, ſelon leur nouvelle forme M, auſſi dans le même ordre, h, i, k, l, m, n ; & enfin que p ſoit le dernier terme, on aura par la comparaiſon terme à terme les treize équations ... (N)

1°. $H\mathrm{I} - \mathrm{H}I = \mathrm{a}$; 2°. $H\mathrm{K} - \mathrm{H}K = \mathrm{b}$; 3°. $H\mathrm{L} - \mathrm{H}L = \mathrm{c}$;

4°. $I\mathrm{K} - \mathrm{I}K = \mathrm{e}$; 5°. $I\mathrm{L} - \mathrm{I}L = \mathrm{f}$; 6°. $K\mathrm{L} - \mathrm{K}L = \mathrm{g}$;

7°. $(A\mathrm{H} - \mathrm{A}H)f + (B\mathrm{H} - \mathrm{B}H)h = -\mathrm{h}$;

7, 8 ...... & 12 des équations N, $\frac{AB}{B}$ à A, & il résulte delà six nouvelles équations dont les trois premières donnent

$$\frac{eA+gB}{fA+hB}=\frac{-i\pm\sqrt{i^2-4hk}}{2h}=\lambda;$$

& les trois dernières, $\frac{eA+gB}{fA+hB}=\frac{-m\pm\sqrt{m^2-4ln}}{2l}$; & enfin, de la combinaison de ces deux-ci, on conclut l'équation de condition ... (Q)

$$(hm-il)(in-km)=(hn-lk)^2.$$

Intégrant ensuite l'une ou l'autre des deux équations précédentes, par exemple la première qu'on peut représenter par ... (R)

$$(e-\lambda f)\frac{d\Psi}{d\alpha}+(g-\lambda h)\frac{d\Psi}{d\beta}=0,$$

on aura la valeur de Ψ en α & β; c'est-à-dire, la fonction σ sous la forme de laquelle Ψ & Π peuvent uniquement contenir α & β; les autres lettres e, f, g, h étant regardées comme constantes.

Supposons qu'on ait substitué dans la proposée σ à sa valeur en α & β, il restera une équation telle qu'elle résulteroit de la formule $\Psi=\phi{:}\Pi$, dans laquelle Ψ & Π ne contiendroient plus que σ, e, f, g, h. Or, pour avoir la forme d'une pareille équation, il suffira de supposer dans celle L (§ 13); que B & B = o; que A & A sont les coëfficiens de $d\sigma$ dans $d\Psi$ & $d\Pi$, σ prenant la place de α, & $d\sigma$ de $d\alpha$; & enfin, que tous ces coëfficiens A, A; H, H; &c. ne contiennent que σ, e, f, g, h. Cette substitution ne produira aucun changement dans la forme des six premiers termes, mais elle réduira les six termes moyens M (§ 15) à

$$-(A\mathrm{H}-\mathrm{A}H)\frac{d\sigma}{dy}\frac{de}{dx}+\left((A\mathrm{H}-\mathrm{A}H)\frac{d\sigma}{dx}-(A\mathrm{I}-\mathrm{A}I)\frac{d\sigma}{dy}\right)\frac{de}{dy}+(A\mathrm{I}-\mathrm{A}I)\frac{d\sigma}{dx}\frac{df}{dy}$$
$$-(A\mathrm{K}-\mathrm{A}K)\frac{d\sigma}{dy}\frac{dg}{dx}+\left((A\mathrm{K}-\mathrm{A}K)\frac{d\sigma}{dx}-(A\mathrm{L}-\mathrm{A}L)\frac{d\sigma}{dy}\right)\frac{dg}{dy}+(A\mathrm{L}-\mathrm{A}L)\frac{d\sigma}{dx}\frac{dh}{dy}.$$

Réuniſſant donc ces douze termes, & égalant leur ſomme à zéro, on aura la forme que prendroit la propoſée en vertu de la ſubſtitution de σ à ſa fonction équivalente.

17. Maintenant il eſt évident que ſi dans cette nouvelle transformée on remettoit, pour $\frac{d\sigma}{dx}$ & $\frac{d\sigma}{dy}$, leurs valeurs, on verroit néceſſairement reparoître auſſitôt la propoſée dans ſon état primitif. Soit donc σ, qui en général eſt fonction de α, β, e, f, g, h, telle que

$$d\sigma = \Sigma de + \Delta df + \Theta dg + \Lambda dh + \Gamma d\alpha + \Omega d\beta.$$

En ſubſtituant à $\frac{d\sigma}{dx}$ & $\frac{d\sigma}{dy}$ les valeurs réſultantes de cette ſuppoſition, la transformée ſe changera en une équation dont les ſix premiers termes auront les mêmes caractériſtiques $\frac{de}{dx}\frac{df}{dy} - \frac{de}{dy}\frac{df}{dx}$, &c. que dans l'équation L (§ 13); & les ſix autres ſeront diſtingués par les différences partielles du ſecond ordre $\frac{de}{dx}, \frac{de}{dy}, \frac{df}{dy}, \frac{dg}{dx}, \frac{dg}{dy}, \frac{dh}{dy}$. Comparant enſuite cette nouvelle équation terme à terme avec la propoſée (il ſeroit inutile de multiplier d'abord celle-ci par un facteur indéterminé, puiſque ce facteur diſparoîtroit de lui-même des réſultats) dans laquelle les coëfficiens correſpondans à ces mêmes termes ſont, dans le même ordre (§ 15), a, b, c, e, f, g, h, i, k, l, m, n, on aura douze équations dont les 7, 8 & 9^me^ donneront . . . . (S)

$$h(\Gamma e + \Omega g)^2 + i(\Gamma e + \Omega g)(\Gamma f + \Omega h) + k(\Gamma f + \Omega h)^2 = 0.$$

De même, des trois dernières on conclura une équation ſemblable & qui n'en différera que par les coëfficiens l, m, n qui remplaceront, dans le même ordre, ceux h, i, k; & enfin, de la com-

binaiſon de ces deux réſultantes, on déduira la même équation Q qu'on a trouvée ci-deſſus (§ 16).

Quant aux ſix premières, on combinera chacune d'elles avec deux des ſix dernières comme il ſuit; 1, 7, 9; 2, 7, 10; 3, 7, 12; 4, 9, 10; 5, 9, 12; 6, 10, 12, afin d'en éliminer A, H, I, &c., ou A, H, I, &c.; & il réſultera delà ſix équations qui, en vertu de celle S ci-deſſus, & de la ſignification que nous avons donnée à λ; & remettant en outre, pour A, H, ... L, leurs valeurs $\frac{d\Psi}{d\sigma}$, $\frac{d\Psi}{de}$, &c, ſe réduiront à .... (T)

$$\mathrm{k}\frac{d\Psi}{de}+\lambda\mathrm{h}\frac{d\Psi}{df}+[\mathrm{k}\Sigma+\lambda\mathrm{h}\Delta-\mathrm{a}(\Gamma e+\Omega g)]\frac{d\Psi}{d\sigma}=0$$

$$\mathrm{l}\frac{d\Psi}{de}-\mathrm{h}\frac{d\Psi}{dg}+[\mathrm{l}\Sigma-\mathrm{h}\Theta+\mathrm{b}(\Gamma f+\Omega h)]\frac{d\Psi}{d\sigma}=0$$

$$\mathrm{n}\frac{d\Psi}{de}+\lambda\mathrm{h}\frac{d\Psi}{dh}+[\mathrm{n}\Sigma+\lambda\mathrm{h}\Delta-\mathrm{c}(\Gamma e+\Omega g)]\frac{d\Psi}{d\sigma}=0$$

$$\lambda\mathrm{l}\frac{d\Psi}{df}+\mathrm{k}\frac{d\Psi}{dg}+[\lambda\mathrm{l}\Delta+\mathrm{k}\Theta+\mathrm{e}(\Gamma e+\Omega g)]\frac{d\Psi}{d\sigma}=0$$

$$\mathrm{n}\frac{d\Psi}{df}-\mathrm{k}\frac{d\Psi}{dh}+[\mathrm{n}\Delta-\mathrm{k}\Lambda-\mathrm{f}(\Gamma e+\Omega g)]\frac{d\Psi}{d\sigma}=0$$

$$\mathrm{n}\frac{d\Psi}{dg}+\lambda\mathrm{l}\frac{d\Psi}{dh}+[\mathrm{n}\Theta+\lambda\mathrm{l}\Lambda-\mathrm{g}(\Gamma e+\Omega g)]\frac{d\Psi}{d\sigma}=0$$

d'où il ſera aiſé de conclure, par ma méthode, la valeur de Ψ en e, f, g, h & σ.

18. Appliquons ceci à un exemple bien ſimple : ſoit

$$\alpha h\left(\frac{de}{dx}\frac{df}{dy}-\frac{de}{dy}\frac{df}{dx}\right)+\alpha f\left(\frac{de}{dx}\frac{dh}{dy}-\frac{de}{dy}\frac{dh}{dx}\right)-6h\left(\frac{df}{dx}\frac{dg}{dy}-\frac{df}{dy}\frac{dg}{dx}\right)+6f\left(\frac{dg}{dx}\frac{dh}{dy}-\frac{dg}{dy}\frac{dh}{dx}\right)$$
$$-h(ef+gh)\frac{de}{dy}+h(e^2+g^2)\frac{df}{dy}-f(ef+gh)\frac{dg}{dy}+f(e^2+g^2)\frac{dh}{dy}=0.$$

On a ici $\mathrm{a}=\alpha h$, $\mathrm{b}=0$, $\mathrm{c}=\alpha f$, $\mathrm{e}=-6h$, $\mathrm{f}=0$, $\mathrm{g}=6f$, $\mathrm{h}=0$, $\mathrm{i}=-h(ef+gh)$, $\mathrm{k}=h(e^2+g^2)$, $\mathrm{l}=0$, $\mathrm{m}=-f(ef+gh)$, $\mathrm{n}=f(e^2+g^2)$;

& on voit que les deux équations de condition P & Q ont lieu. Enfuite on a (§ 16) $\lambda = \frac{-1 \pm 1}{0}$; c'eft-à-dire ou $\lambda = \frac{0}{0}$; ou $\lambda = \infty$. Pour découvrir la valeur réelle de cette première racine $\frac{0}{0}$, remontons à l'expreffion générale de λ, & nous trouverons par les règles connues que lorfque $h = 0$, comme il arrive ici, cette expreffion fe réduit à $\lambda = \frac{-k}{i}$; c'eft-à-dire, dans cet exemple, à $\lambda = \frac{e^2 + g^2}{ef + gh}$ qui fubftituée dans l'équation R la change en $g \frac{d\Psi}{d\alpha} - e \frac{d\Psi}{d\epsilon} = 0$; d'où $\Psi = \phi : (e\alpha + g\epsilon)$, $\sigma = e\alpha + g\epsilon$. Enfuite, de cette valeur de σ. on conclura (§ 17) $\Sigma = \alpha$, $\Delta = 0$, $\Theta = \epsilon$, $\Lambda = 0$, $\Gamma = e$, $\Omega = g$; & ces fubftitutions réduiront les équations T aux trois fuivantes

$$\frac{d\Psi}{de} = 0,\ \frac{d\Psi}{dg} = 0,\ f\frac{d\Psi}{df} - h\frac{d\Psi}{dh} = 0.$$

Cette dernière donne d'abord $\Psi = \phi : (fh, \sigma)$; & comme les deux premieres indiquent que Ψ ne contient ni e ni g, cette expreffion en fera la valeur complète. Ainfi en remettant pour σ, $e\alpha + g\epsilon$ que nous avons trouvé ci-deffus lui être égal, l'intégrale de la propofée eft $fh = F : (e\alpha + g\epsilon)$.

On doit s'attendre ici, comme dans toutes les folutions qui dépendent de l'intégration d'un fyftème d'équations fimultanées, à rencontrer des difficultés femblables à celles dont on a vu un exemple art. 11. On voudra bien confulter à ce fujet les articles 63 & 90 du mémoire que j'ai déjà fouvent cité.

19. Effayons maintenant d'intégrer la formule de l'article 15 dans toute fa généralité; c'eft-à-dire, fans établir aucun rapport particulier entre les coëfficiens. Je fuivrai pour cela la méthode de l'article 89 du même mémoire auquel je renvoye le lecteur. Re-

prenons donc les treize équations N (§ 15). J'en combine d'abord fucceffivement trois à trois les 7, 8 & 9^{me}, & les 10, 11 & 12^{me}; enfuite la 7^{me} & la 10^{me}; & enfin la 9^{me} avec la 12^{me}; & comme de ces différentes combinaifons il réfulte des binomes tels que $H\mathrm{I} - \mathrm{H}I$, $H\mathrm{K} - \mathrm{H}K$, &c., je les élimine au moyen des fix premières de ces mêmes équations. J'en déduis delà quatre nouvelles qui ne contiennent plus que les coëfficiens A, B, &c. de $d\Psi$ feule, favoir... (U)

1, 7, 8, 9; $\mathrm{k}H^2 - \mathrm{i}IH + \mathrm{h}I^2 - \mathrm{a}(eAH + gBH + fAI + hBI) = 0$

6, 10, 11, 12; $\mathrm{n}K^2 - \mathrm{m}LK + \mathrm{l}L^2 - \mathrm{g}(eAK + gBK + fAL + hBL) = 0$

2, 7, 10; $\mathrm{l}H - \mathrm{h}K + \mathrm{b}fA + \mathrm{b}hB = 0$

5, 9, 12; $\mathrm{k}L - \mathrm{n}I + \mathrm{f}eA + \mathrm{f}gB = 0$

où on obfervera qu'il y a trois des équations N qui ne font point employées; favoir, les 3^{me}, 4^{me} & 13^{me}; ce qui exige qu'on vérifie cette dernière, ainfi que l'équation de condition P (§ 15) qui doivent toutes les deux indifpenfablement avoir lieu.

Cela pofé, foit $I = \lambda H$, $K = \mu H$, $L = \nu H$; je fubftitue ces valeurs dans celle de $d\Psi$ (§ 13), & j'en tire

$$d\Psi = A d\alpha + B d\beta + H(de + \lambda df + \mu dg + \nu dh).$$

Je fais enfuite les mêmes fubftitutions dans les quatre équations U, dont la première devient

$$(\mathrm{h}\lambda^2 - \mathrm{i}\lambda + \mathrm{k})H - \mathrm{a}([e + f\lambda]A + [g + h\lambda]B) = 0;$$

& au moyen de celle-ci j'élimine H de l'expreffion de $d\Psi$; ce qui la change en

$$d\Psi = A\left(d\alpha + \frac{\mathrm{a}(e + f\lambda)}{\mathrm{h}\lambda^2 - \mathrm{i}\lambda + \mathrm{k}}[de + \lambda df + \mu dg + \nu dh]\right)$$
$$+ B\left(d\beta + \frac{\mathrm{a}(g + h\lambda)}{\mathrm{h}\lambda^2 - \mathrm{i}\lambda + \mathrm{k}}[de + \lambda df + \mu dg + \nu dh]\right).$$

Quant aux trois autres équations U qui, comme la première, ne contiennent plus que A, B & H, j'en déduis en les combinant avec elle, deux équations de condition V entre λ, μ, ν, & les coëfficiens connus de la propofée. J'ai enfuite, dans l'expreffion de $d\Psi$, λ qui fera déterminée par la condition de l'élimination de β dans le terme A, ou de α dans le terme B (*voyez mém. cité art.* 91); & de plus μ, ν qui le feront par les deux équations V. Ainfi tout eft connu dans chacun de ces deux termes, dont l'un fera la valeur de $d\Psi$, & l'autre de $d\Pi$.

Je n'entrerai pas dans de plus longs détails fur ces équations : mon but n'a été que de montrer ici comment on pourroit dans l'occafion y appliquer les méthodes que j'ai enfeignées dans le mémoire cité ; & je crois en avoir dit affez pour que cette application ne préfente aucune difficulté, quel que foit le nombre des variables.

20. La méthode d'intégration pour les équations *indéterminées* du premier ordre, que j'ai citée au commencement de ce mémoire (§ 1), eft entièrement fondée fur la fuppofition que leur intégrale foit de la forme $M = F{:}N$. En voici une autre également étendue & qui ne porte fur aucune hypothèfe préalable. Suppofons que la propofée contienne les variables principales α, β, γ, ε, &c. & repréfentons-la par . . . . (A a)

$$M\left(\frac{d\alpha}{dy}\frac{d\beta}{dx}-\frac{d\alpha}{dx}\frac{d\beta}{dy}\right)+N\left(\frac{d\alpha}{dy}\frac{d\gamma}{dx}-\frac{d\alpha}{dx}\frac{d\gamma}{dy}\right)+P\left(\frac{d\alpha}{dy}\frac{d\varepsilon}{dx}-\frac{d\alpha}{dx}\frac{d\varepsilon}{dy}\right)+$$
$$Q\left(\frac{d\beta}{dy}\frac{d\gamma}{dx}-\frac{d\beta}{dx}\frac{d\gamma}{dy}\right)+R\left(\frac{d\beta}{dy}\frac{d\varepsilon}{dx}-\frac{d\beta}{dx}\frac{d\varepsilon}{dy}\right)+S\left(\frac{d\gamma}{dy}\frac{d\varepsilon}{dx}-\frac{d\gamma}{dx}\frac{d\varepsilon}{dy}\right)=0.$$

Soit $\frac{d\alpha}{dx}=p$, $\frac{d\beta}{dx}=n$, $\frac{d\gamma}{dx}=m$, $\frac{d\varepsilon}{dx}=l$ qui font toutes des indéterminées indépendantes les unes des autres : on aura, en fubftituant ces

ces valeurs dans la formule générale, & en la multipliant par dy, (Bb)

$$(Mn+Nm+Pl)\frac{d\alpha}{dy}dy+(Qm-Mp+Rl)\frac{d\beta}{dy}dy+(Sl-Qn-Np)\frac{d\gamma}{dy}dy-(Pp+Rn+Sm)\frac{d\varepsilon}{dy}dy=0.$$

Remarquons à préfent que, fi dans cette transformée on mettoit $\frac{d\alpha}{dx}$ pour $\frac{d\alpha}{dy}$, $\frac{d\beta}{dx}$ pour $\frac{d\beta}{dy}$, &c., elle deviendroit identique, indépendamment des valeurs de M, N, &c. En effet, le réfultat de cette fubftitution doit être dans celle-ci néceffairement le même que dans la formule Aa. Or il eft clair que chacun des binomes $\frac{dx}{dy}\frac{d\beta}{dx}-\frac{d\alpha}{dx}\frac{d\beta}{dy}$, &c. s'y réduiroit à zéro. Ainfi on pourra, fans rien changer à l'équation Bb, y ajouter $(Mn+Nm+Pl)\frac{d\alpha}{dx}dx+$&c., & conclure . . . . (Cc)

$$(Mn+Nm+Pl)\,d\alpha+(Qm-Mp+Rl)\,d\beta+(Sl-Qn-Np)\,d\gamma-(Pp+Rn+Sm)\,d\varepsilon=0;$$

où il ne s'agira plus que de déterminer l, m, n, p de manière à rendre cette équation intégrable.

Prenons pour exemple l'équation k de l'article 49 du premier mémoire du recueil précédent, qui en y mettant α pour 7, β pour ω, & γ pour ν, devient $(\phi:\alpha-\beta)\left(\frac{d\beta}{dx}\frac{d\alpha}{dy}-\frac{d\beta}{dy}\frac{d\alpha}{dx}\right)+\left(\frac{d\gamma}{dx}\frac{d\alpha}{dy}-\frac{d\gamma}{dy}\frac{d\alpha}{dx}\right)=0$, ou fefant les fubftitutions & opérations ci-deffus, $[(\phi:\alpha-\beta)\,n+m]\,d\alpha-(\phi:\alpha-\beta)\,pd\beta-pd\gamma=0$. Donnons à cette équation la forme $(\phi:\alpha-\beta)\,(nd\alpha-pd\beta)+md\alpha-pd\gamma=0$, & nous verrons auffitôt qu'elle devient intégrable en faifant $n=2\phi':\alpha$, $p=2$, & laiffant m une fonction quelconque de α. L'intégrale en eft $(\phi:\alpha-\beta)^2-2\gamma+F:\alpha=0$, ou comme $\frac{(\phi:\alpha)^2+F:\alpha}{2}$ n'eft que $f:\alpha$, $f:\alpha-\beta\phi:\alpha+\frac{1}{2}\beta^2=\gamma$ précifément comme à l'endroit cité.

Dans cet exemple très-ſimple la détermination des lettres p, n, m, l, &c. s'eſt montrée, pour ainſi dire, d'elle même; mais on ne doit point eſpérer de réuſſir toujours auſſi facilement. On voit que la règle générale eſt que l'équation Cc ſatisfaſſe à l'équation ou au ſyſtème (ſi le nombre des variables α, β, γ, ε, &c. ſurpaſſe trois) d'équations de condition qui doivent avoir lieu pour qu'elle ſoit intégrable*. C'eſt au moyen de cette ou de ces équations qu'il s'agira de déterminer p, n, m, l, &c. : & pour cela il ſuffira d'y ſatisfaire, ſans en avoir l'intégrale complète. On auroit, par exemple, trouvé dans ce cas-ci l'équation de condition... (Dd)

$$(\phi:\alpha-\beta)\,p\frac{dm}{dy}+(\phi:\alpha-\beta)^2 p\frac{dn}{dy}-[(\phi:\alpha-\beta)^2 n+(\phi:\alpha-\beta)\,m]\frac{dp}{dy}-p\frac{dm}{d\beta}-p\,(\phi:\alpha-\beta)\frac{dn}{d\beta}+[(\phi:\alpha-\beta)\,n+m]\frac{dp}{d\beta}+pn-p^2\phi':\alpha=0$$

à laquelle $n=p\phi'\alpha$ ſatisfait évidemment, pourvu que m, n & p ne contiennent ni β, ni γ; ce qui ſe réduit à ſuppoſer, comme nous avons fait ci-deſſus, p conſtante & m une fonction quelconque de α.

Mais cette manière ſi ſimple de ſatisfaire à l'équation de condition ne réuſſira que très-rarement: & le plus ſouvent on ſera réduit à l'intégrer complètement. Telle eſt l'équation... (Ee)

$$\frac{d\alpha}{dy}\frac{d\beta}{dx}-\frac{d\alpha}{dx}\cdot\frac{d\beta}{dy}+(\beta-\gamma)\left(\frac{d\beta}{dy}\frac{dy}{dx}-\frac{d\beta}{dx}\frac{dy}{dy}\right)\phi(\beta+\gamma)=0$$

dont l'intégrale eſt $\alpha=\phi(\beta+\gamma)+(\beta-\gamma)\,\phi'(\beta+\gamma)+f:\beta$, & dans laquelle la détermination de n, p, m ne peut s'effectuer au moyen du ſeul terme ſans différence partielle de l'équation de condition. Mais il eſt inutile de nous arrêter davantage à cette ſeconde méthode, puiſque la première eſt auſſi générale, & beaucoup plus facile.

* Voyez leçons de calc. différ. & intég. de M. Couſin page 291 & ſuiv. édit. de 1777, ou art. 306 de l'édit. in-4°.

TROISIEME MÉMOIRE.

Recherches sur l'intégration des équations irrégulières aux différences partielles ; c'est-à-dire de celles qui n'admettent point d'intégration de l'ordre immédiatement inférieur.

CHAPITRE PREMIER.

Nouvelle manière de considérer la formation des équations aux différences partielles des ordres supérieurs entre trois variables z, x *&* y.

1. DANS le premier recueil de ces Mélanges j'ai considéré les équations aux différences partielles des ordres supérieurs, comme résultant de la différentiation d'une équation de l'ordre inférieur d'une unité : & en effet cette méthode est la plus naturelle & la plus facile. Mais comme il pourroit y avoir de ces équations * qui ne fussent pas susceptibles d'une intégration successive, je vais envisager leur formation sous un autre point de vue, en les dérivant

* Le lecteur verra bien que le doute que je laisse ici sur l'existence de pareilles équations n'est que pour amener plus naturellement, à la suite de mes premières recherches sur l'intégration des équations aux différences partielles, cette nouvelle manière d'en considérer la formation. Voyez aussi le dernier *à linéa* de l'art. 49 du premier mémoire du recueil préc.

immédiatement de l'équation finie. Ainſi pour parvenir aux équations du ſecond ordre, je prendrai la formule finie qui contient, de la manière la plus générale, deux fonctions arbitraires ; ſavoir,

$$(\Psi) = \omega\phi:\Pi + \eta F:\Omega\,;$$

& je chercherai quel doit être le rapport de ω, η, Π & Ω entr'elles, pour qu'il ſoit poſſible de faire diſparoître ces deux fonctions arbitraires. Mais puiſque, ſans limiter cette formule, je puis la diviſer par η, j'aurai en ſuppoſant $\frac{(\Psi)}{\eta} = \Psi$ & $\frac{\omega}{\eta} = \alpha$, $\Psi = \alpha\phi:\Pi + F:\Omega$ dont je prendrai les différentielles du premier & du ſecond ordre par x & par y ; ce qui me donnera les cinq équations ſuivantes... (A)

$$\frac{d\Psi}{dx} = \frac{d\alpha}{dx}\phi + \alpha\frac{d\Pi}{dx}\phi' + \frac{d\Omega}{dx}F'$$

$$\frac{d\Psi}{dy} = \frac{d\alpha}{dy}\phi + \alpha\frac{d\Pi}{dy}\phi' + \frac{d\Omega}{dy}F'$$

$$\frac{d^2\Psi}{dx^2} = \frac{d^2\alpha}{dx^2}\phi + \left(2\frac{d\alpha}{dx}\frac{d\Pi}{dx} + \alpha\frac{d^2\Pi}{dx^2}\right)\phi' + \frac{d^2\Omega}{dx^2}F' + \alpha\frac{d\Pi^2}{dx}\phi'' + \frac{d\Omega^2}{dx}F''$$

$$\frac{d^2\Psi}{dxdy} = \frac{d^2\alpha}{dxdy}\phi + \left(\frac{d\alpha}{dx}\frac{d\Pi}{dy} + \frac{d\alpha}{dy}\frac{d\Pi}{dx} + \alpha\frac{d^2\Pi}{dxdy}\right)\phi' + \frac{d^2\Omega}{dxdy}F' + \alpha\frac{d\Pi}{dx}\frac{d\Pi}{dy}\phi'' + \frac{d\Omega}{dx}\frac{d\Omega}{dy}F''$$

$$\frac{d^2\Psi}{dy^2} = \frac{d^2\alpha}{dy^2}\phi + \left(2\frac{d\alpha}{dy}\frac{d\Pi}{dy} + \alpha\frac{d^2\Pi}{dy^2}\right)\phi' + \frac{d^2\Omega}{dy^2}F' + \alpha\frac{d\Pi^2}{dy}\phi'' + \frac{d\Omega^2}{dy}F''.$$

Il faudroit maintenant, au moyen de ces cinq équations, éliminer les cinq fonctions arbitraires ϕ, ϕ', F', ϕ'' & F''; mais comme on ne peut en éliminer que quatre, il en reſtera néceſſairement une dont le coëfficient égalé à zéro fournira une équation qui déterminera le rapport des trois fonctions α, Π & Ω.

2. Pour procéder à cette opération de la manière la plus commode, je multiplie d'abord les quatre premières de ces cinq équations, chacune par un des facteurs indéterminés & dans le même ordre, b, c, e, g. Je prens enſuite la ſomme de toutes les cinq,

& j'égale à zéro le coèfficient de chacune des fonctions arbitraires ; c'eſt-à-dire, la ſomme des termes qui affectent une même fonction. Il réſulte delà, outre l'équation que fournit le terme ſans fonction arbitraire, & qui après les ſubſtitutions ſera la formule générale du ſecond ordre, les cinq équations ſuivantes que je déſignerai toujours dans la ſuite reſpectivement par la fonction arbitraire que chacune d'elles anéantit; ſavoir, ... (B)

$$\frac{d^2\alpha}{dy^2} + g\frac{d^2\alpha}{dxdy} + e\frac{d^2\alpha}{dx^2} + c\frac{d\alpha}{dy} + b\frac{d\alpha}{dx} = 0 \;\ldots\; \phi$$

$$2\frac{d\alpha}{dy}\frac{d\Pi}{dy} + \alpha\frac{d^2\Pi}{dy^2} + g\left(\frac{d\alpha}{dx}\frac{d\Pi}{dy} + \frac{d\alpha}{dy}\frac{d\Pi}{dx} + \alpha\frac{d^2\Pi}{dxdy}\right) + e\left(2\frac{d\alpha}{dx}\frac{d\Pi}{dx} + \alpha\frac{d^2\Pi}{dx^2}\right) + c\alpha\frac{d\Pi}{dy} + b\alpha\frac{d\Pi}{dx} = 0 \;\ldots\; \phi'$$

$$\frac{d^2\Omega}{dy^2} + g\frac{d^2\Omega}{dxdy} + e\frac{d^2\Omega}{dx^2} + c\frac{d\Omega}{dy} + b\frac{d\Omega}{dx} = 0 \;\ldots\; F'$$

$$\frac{d\Pi^2}{dy} + g\frac{d\Pi}{dx}\frac{d\Pi}{dy} + e\frac{d\Pi^2}{dx} = 0 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; \phi''$$

$$\frac{d\Omega^2}{dy} + g\frac{d\Omega}{dx}\frac{d\Omega}{dy} + e\frac{d\Omega^2}{dx} = 0 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; F''.$$

Enſuite au moyen des trois équations ϕ, ϕ' & F' j'élimine b & c, & la réſultante ne contient plus que g & e. J'élimine de même ces deux lettres au moyen des deux équations ϕ'' & F'', & l'équation finale eſt celle de condition cherchée.

3. Soient donc les équations

$$\frac{d^2\alpha}{dy^2} + g\frac{d^2\alpha}{dxdy} + e\frac{d^2\alpha}{dx^2} + c\frac{d\alpha}{dy} + b\frac{d\alpha}{dx} = 0$$

$$A + g\;B + e\;D + c\alpha\frac{d\Pi}{dy} + b\alpha\frac{d\Pi}{dx} = 0$$

$$\frac{d^2\Omega}{dy^2} + g\frac{d^2\Omega}{dxdy} + e\frac{d^2\Omega}{dx^2} + c\frac{d\Omega}{dy} + b\frac{d\Omega}{dx} = 0$$

où j'ai nommé A, B, D les coèfficiens des trois premiers termes de l'équation ϕ', afin de ſimplifier les calculs. Je multiplie deux de ces trois équations, par exemple les deux premières, l'une par

le facteur indéterminé τ, & l'autre par celui ρ ; & ayant pris la somme de ces trois équations, j'égale à zéro les coëfficiens de b & c, d'où je conclus les valeurs de τ & ρ que je substitue dans les autres termes de cette même somme, & il en résulte l'équation

$$\alpha\left(\frac{d\alpha}{dx}\frac{d\Pi}{dy}-\frac{d\alpha}{dy}\frac{d\Pi}{dx}\right)\frac{d^2\Omega}{dy^2}+\left(\frac{d\alpha}{dy}\frac{d\Omega}{dx}-\frac{d\alpha}{dx}\frac{d\Omega}{dy}\right)A+\alpha\left(\frac{d\Omega}{dy}\frac{d\Pi}{dx}-\frac{d\Omega}{dx}\frac{d\Pi}{dy}\right)\frac{d^2\alpha}{dy^2}\quad +$$

$$\text{b}\left\{\alpha\left(\quad \textit{ut suprà} \quad\right)\frac{d^2\Omega}{dxdy}+\left(\quad \textit{ut suprà} \quad\right)B+\alpha\left(\quad \textit{ut suprà} \quad\right)\frac{d^2\alpha}{dxdy}\right\}+$$

$$\text{c}\left\{\alpha\left(\quad \textit{ut suprà} \quad\right)\frac{d^2\Omega}{dx^2}+\left(\quad \textit{ut suprà} \quad\right)D+\alpha\left(\quad \textit{ut suprà} \quad\right)\frac{d^2\alpha}{dx^2}\right\}=0$$

que je représente par $\zeta+\theta g+\xi e=0$, & que je combine avec les deux équations Φ'' & F'' qui n'ont point encore été employées, & qui ne contiennent de même que g & e. Or ayant en général trois équations $A+Bg+Ce=0$, $D+Eg+Fe=0$, $G+Hg+Ie=0$, on en conclut par le même procédé

$$AEI-AFH+BFG-BDI+CDH-CEG=0;$$

il ne faudra donc plus que substituer dans cette dernière équation, aux valeurs générales, les valeurs particulières que donnent les trois équations ci-dessus disposées selon tel ordre qu'on voudra, pour avoir l'équation finale qui sera le produit des deux

$$\text{(C)}\ldots\ \frac{d\Omega}{dx}\frac{d\Pi}{dy}-\frac{d\Omega}{dy}\frac{d\Pi}{dx}=0,$$

$$\text{(D)}\ldots\ \zeta\frac{d\Omega}{dx}\frac{d\Pi}{dx}-\theta\left(\frac{d\Omega}{dx}\frac{d\Pi}{dy}+\frac{d\Omega}{dy}\frac{d\Pi}{dx}\right)+\xi\frac{d\Omega}{dy}\frac{d\Pi}{dy}=0.$$

4. On s'appercevra bientôt que les substitutions à faire dans cette dernière se simplifieront considérablement en supposant $\alpha=e^u$, $l.\alpha=u$, $\frac{d\alpha}{\alpha}=du$ & enfin $\frac{\alpha d^2\alpha-d\alpha^2}{\alpha^2}=d^2u$. Par cette transformation

on parviendra à l'équation ... (E)

$$\left(\frac{d\Pi}{dx}\frac{d\Pi}{dy}\frac{d\Omega^2}{dx}-\frac{d\Pi^2}{dx}\frac{d\Omega}{dx}\frac{d\Omega}{dy}\right)\frac{d^2u}{dy^2}+\left(\frac{du}{dx}\frac{d\Pi}{dx}\frac{d\Omega}{dx}\frac{d\Omega}{dy}-\frac{du}{dy}\frac{d\Pi}{dx}\frac{d\Omega^2}{dx}\right)\frac{d^2\Pi}{dy^2}+$$

$$\left(\frac{du}{dy}\frac{d\Pi^2}{dx}\frac{d\Omega}{dx}-\frac{du}{dx}\frac{d\Pi}{dx}\frac{d\Pi}{dy}\frac{d\Omega}{dx}\right)\frac{d^2\Omega}{dy^2}+\left(\frac{d\Pi^2}{dx}\frac{d\Omega^2}{dy}-\frac{d\Pi^2}{dy}\frac{d\Omega^2}{dx}\right)\frac{d^2u}{dxdy}+$$

$$\left(\frac{du}{dy}\frac{d\Pi}{dx}\frac{d\Omega}{dx}\frac{d\Omega}{dy}-\frac{du}{dx}\frac{d\Pi}{dy}\frac{d\Omega}{dx}\frac{d\Omega}{dy}+\frac{du}{dy}\frac{d\Pi}{dy}\frac{d\Omega^2}{dx}-\frac{du}{dx}\frac{d\Pi}{dx}\frac{d\Omega^2}{dy}\right)\frac{d^2\Pi}{dxdy}+$$

$$\left(\frac{du}{dx}\frac{d\Pi}{dx}\frac{d\Pi}{dy}\frac{d\Omega}{dy}-\frac{du}{dy}\frac{d\Pi}{dx}\frac{d\Pi}{dy}\frac{d\Omega}{dx}+\frac{du}{dx}\frac{d\Pi^2}{dy}\frac{d\Omega}{dx}-\frac{du}{dy}\frac{d\Pi^2}{dx}\frac{d\Omega}{dy}\right)\frac{d^2\Omega}{dxdy}+$$

$$\left(\frac{d\Pi^2}{dy}\frac{d\Omega}{dx}\frac{d\Omega}{dy}-\frac{d\Pi}{dx}\frac{d\Pi}{dy}\frac{d\Omega^2}{dy}\right)\frac{d^2u}{dx^2}+\left(\frac{du}{dx}\frac{d\Pi}{dy}\frac{d\Omega^2}{dy}-\frac{du}{dy}\frac{d\Pi}{dy}\frac{d\Omega}{dx}\frac{d\Omega}{dy}\right)\frac{d^2\Pi}{dx^2}+$$

$$\left(\frac{du}{dy}\frac{d\Pi}{dx}\frac{d\Pi}{dy}\frac{d\Omega}{dy}-\frac{du}{dx}\frac{d\Pi^2}{dy}\frac{d\Omega}{dy}\right)\frac{d^2\Omega}{dx^2}=0$$

qui eſt une équation *indéterminée* du ſecond ordre entre les trois variables principales ou fonctions Π, Ω, u.

On a déjà vu dans le premier recueil de ces mélanges (*prem. mém.* § 49) que la formule $\Psi = e^u \phi{:}\Pi + F{:}\Omega$ préſente deux cas où elle eſt ſuſceptible d'une différentiation ſucceſſive; ſavoir,

$$\Psi = e^u \phi{:}\Pi + F{:}\Pi, \ \& \ \Psi = \phi{:}\Pi + F{:}\Omega.$$

Le premier de ces deux cas eſt évidemment donné ici par la première racine C; c'eſt-à-dire $\frac{d\Omega}{dx}\frac{d\Pi}{dy}-\frac{d\Omega}{dy}\frac{d\Pi}{dx}=0$, d'où réſulte $\Omega = f{:}\Pi$. Il n'eſt pas moins clair que le ſecond doit être également contenu dans l'autre racine D. Or la formule générale finie ſe réduit à ce ſecond cas de deux manières; ſoit parce que $e^u = f{:}\Pi$; ſoit parce que $e^u = \mathrm{f}{:}\Omega$. Le premier eſt évident; & le ſecond ne l'eſt pas moins en conſidérant qu'alors on peut diviſer toute l'équation par $\mathrm{f}{:}\Omega$ qu'il faut regarder comme une fonction quelconque dé-

terminée de Ω. Ces deux manières font renfermées dans l'expreffion unique $e^u = f : \Pi \times \mathrm{f} : \Omega$, ou en prenant les logarithmes *,

$$u = log. f : \Pi + log.\ \mathrm{f} : \Omega \text{ ; c'eft-à-dire } u = f : \Pi + \mathrm{f} : \Omega.$$

Il ne s'agit plus que de favoir fi l'équation E eft précifément celle qui réfulte en faifant difparoître ces deux fonctions arbitraires ; ou fi elle contient en outre quelqu'autre racine. Pour cela j'effectue l'opération, & comparant le réfultat avec cette même équation, il fe trouve être exactement conforme **. D'où il fuit que les deux feuls cas de la formule ci-deffus, où on puiffe éliminer les deux fonctions arbitraires, font ceux où la différentiation fucceffive a lieu ; & que conféquemment il feroit inutile d'appliquer à cette formule notre nouvelle formation. Tout ceci confirme pleinement ce que j'ai dit dans le premier recueil (*prem. mém.* § 49) fur les équations du fecond ordre.

---

* Je remarquerai en paffant que ceci m'a fait appercevoir une troifième manière, qui m'avoit échappé (*prem. recueil page* 81 *lig.* 4), de réduire à une feule les deux fonctions arbitraires de l'équation

$$\Gamma + \lambda \left(\frac{d\daleth}{dx}\frac{d\omega}{dy} - \frac{d\daleth}{dy}\frac{d\omega}{dx}\right) \phi' : \omega + \left(\frac{d\daleth}{dx}\frac{d\lambda}{dy} - \frac{d\daleth}{dy}\frac{d\lambda}{dx}\right) \phi : \omega = 0,$$

où Γ repréfente la totalité des quatre premiers termes ; favoir, en fuppofant que leurs coèfficiens font en raifon d'une fonction de ω ; c'eft-à-dire, que

$$\lambda \left(\frac{d\daleth}{dx}\frac{d\omega}{dy} - \frac{d\daleth}{dy}\frac{d\omega}{dx}\right) f' : \omega = \left(\frac{d\daleth}{dx}\frac{d\lambda}{dy} - \frac{d\daleth}{dy}\frac{d\lambda}{dx}\right), \text{ ou } \ldots\ldots (\Theta)$$

$$\frac{d\daleth}{dx}\left(\frac{d\omega}{dy} f' : \omega - \frac{1}{\lambda}\frac{d\lambda}{dy}\right) - \frac{d\daleth}{dy}\left(\frac{d\omega}{dx} f' : \omega - \frac{1}{\lambda}\frac{d\lambda}{dx}\right) = 0.$$

En effet on aura alors $\Gamma + \lambda \left(\frac{d\daleth}{dx}\frac{d\omega}{dy} - \frac{d\daleth}{dy}\frac{d\omega}{dx}\right)(\phi' : \omega + \phi : \omega \times f' : \omega) = 0$; & l'affemblage de ces fonctions équivaut évidemment á une feule fonction arbitraire $F : \omega$. Or en intégrant l'équation Θ, on a $f : \omega - log.\ \lambda = \mathrm{f} : \daleth$ ou $log.\ \lambda = f : \omega + \mathrm{f} : \daleth$ qui coïncide avec la précédente $u = f : \Pi + \mathrm{f} : \Omega$. Ainfi cette troifième manière ne nous apprend rien de plus.

** Voyez dans le mém. préc. l'intégration de l'équation E par une méthode directe § 9.

5. Il

5. Il n'en eſt pas de même ſi on donne à cette formule plus d'étendue ; c'eſt-à-dire ſi, ſelon ce que j'ai obſervé à la fin du même article, on ſuppoſe .... (C2)

$$\Psi = \alpha\phi:\Pi + \beta\phi':\Pi + \gamma\phi'':\Pi + \ldots\ldots + \zeta\phi^{\nu}:\Pi$$
$$+ \ F:\Omega + \vartheta F':\Omega + \kappa F'':\Omega + \ldots\ldots + \xi F^{\nu}:\Omega,$$

ν déſignant le nombre d'accens de la dernière fonction. Dans ce cas on ne peut faire diſparoître les fonctions arbitraires que toutes à-la-fois : ainſi l'équation aux différences partielles du ſecond ordre, qui réſulteroit d'une pareille formule, ne feroit pas ſuſceptible d'une première intégration, & il faudroit chercher immédiatement ſon intégrale finie. Je déduis, comme ci-deſſus, de l'équation C2 les valeurs de $\frac{d\Psi}{dx}$, $\frac{d\Psi}{dy}$, $\frac{d^2\Psi}{dx^2}$, $\frac{d^2\Psi}{dxdy}$, $\frac{d^2\Psi}{dy^2}$; ce qui me fournit cinq équations, dont je multiplie encore les quatre premières par les quatre indéterminées & dans le même ordre b, c, e & g. Je prens enſuite la ſomme de ces cinq équations, & réuniſſant tous les termes affectés d'une même fonction arbitraire, j'en conclus d'abord ... (E2)

$$\frac{d^2\Psi}{dy^2} + g\frac{d^2\Psi}{dxdy} + e\frac{d^2\Psi}{dx^2} + c\frac{d\Psi}{dy} + b\frac{d\Psi}{dx} = 0$$

qui, après la ſubſtitution des valeurs de g, e, c & b, devient la formule générale. J'ai de plus, pour faire diſparoître $\phi^{\nu+2}$ & $F^{\nu+2}$,

$$\frac{d\Pi^2}{dy} + g\frac{d\Pi}{dx}\frac{d\Pi}{dy} + e\frac{d\Pi^2}{dx} = 0 \ldots \phi^{\nu+2}$$
$$\frac{d\Omega^2}{dy} + g\frac{d\Omega}{dx}\frac{d\Omega}{dy} + e\frac{d\Omega^2}{dx} = 0 \ldots F^{\nu+2},$$

& de même, pour éliminer ſucceſſivement ϕ, ϕ', ϕ'', &c., & F, F', F'', &c., j'aurai les équations ſuivantes ; ſavoir,

$$\frac{d^2\alpha}{dy^2}+g\frac{d^2\alpha}{dxdy}+e\frac{d^2\alpha}{dx^2}+c\frac{d\alpha}{dy}+b\frac{d\alpha}{dx}=0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \Phi$$

$$2\frac{d\alpha}{dy}\frac{d\Pi}{dy}+\alpha\frac{d^2\Pi}{dy^2}+\frac{d^2\epsilon}{dy^2}+g\left(\frac{d\alpha}{dx}\frac{d\Pi}{dy}+\frac{d\alpha}{dy}\frac{d\Pi}{dx}+\alpha\frac{d^2\Pi}{dxdy}+\frac{d^2\epsilon}{dxdy}\right)+e\left(2\frac{d\alpha}{dx}\frac{d\Pi}{dx}+\right.$$
$$\left.\alpha\frac{d^2\Pi}{dx^2}+\frac{d^2\epsilon}{dx^2}\right)+c\left(\alpha\frac{d\Pi}{dy}+\frac{d\epsilon}{dy}\right)+b\left(\alpha\frac{d\Pi}{dx}+\frac{d\epsilon}{dx}\right)=0 \ldots\ldots\ldots \Phi'$$

$$\frac{d^2(\Omega+\vartheta)}{dy^2}+g\frac{d^2(\Omega+\vartheta)}{dxdy}+e\frac{d^2(\Omega+\vartheta)}{dx^2}+c\frac{d(\Omega+\vartheta)}{dy}+b\frac{d(\Omega+\vartheta)}{dx}=0 \ldots F'$$

$$2\frac{d\epsilon}{dy}\frac{d\Pi}{dy}+\epsilon\frac{d^2\Pi}{dy^2}+\frac{d^2\gamma}{dy^2}+g\left(\frac{d\epsilon}{dx}\frac{d\Pi}{dy}+\frac{d\epsilon}{dy}\frac{d\Pi}{dx}+\epsilon\frac{d^2\Pi}{dxdy}+\frac{d^2\gamma}{dxdy}\right)+e\left(2\frac{d\epsilon}{dx}\frac{d\Pi}{dx}+\right.$$
$$\left.\epsilon\frac{d^2\Pi}{dx^2}+\frac{d^2\gamma}{dx^2}\right)+c\left(\epsilon\frac{d\Pi}{dy}+\frac{d\gamma}{dy}\right)+b\left(\epsilon\frac{d\Pi}{dx}+\frac{d\gamma}{dx}\right)=0 \ldots\ldots\ldots \Phi'';$$

puis une pareille équation en substituant ϑ, Ω & $\varkappa$ à ϵ, Π & γ, pour F''; & ainsi de suite jusqu'à $\Phi^{\nu+1}$ & $F^{\nu+1}$ inclusivement. Et on peut remarquer que, dans les équations Φ', Φ'', &c. celle Φ' contenant α & ϵ, on trouvera celle Φ'' en mettant ϵ au-lieu de α & γ au-lieu de ϵ, &c. Il en sera de même de la suite d'équations F', F'', &c. lesquelles ne différeront entr'elles que par la permutation successive des lettres ϑ, $\varkappa$; $\varkappa$, . . . &c.

6. En supposant $\nu=1$; c'est-à-dire, en prenant la formule . . . (E3)

$$\Psi=\alpha\Phi:\Pi+\epsilon\Phi':\Pi,$$
$$+\ F:\Omega+\vartheta F':\Omega$$

j'aurai γ & $\varkappa=0$, aussi-bien que tous les coëfficiens suivans; ce qui changera les deux équations Φ'' & F'' en

$$2\frac{d\epsilon}{dy}\frac{d\Pi}{dy}+\epsilon\frac{d^2\Pi}{dy^2}+g\cdot\overline{\frac{d\epsilon}{dx}\frac{d\Pi}{dy}+\frac{d\epsilon}{dy}\frac{d\Pi}{dx}+\epsilon\frac{d^2\Pi}{dxdy}}+e\cdot2\overline{\frac{d\epsilon}{dx}\frac{d\Pi}{dx}+\epsilon\frac{d^2\Pi}{dx^2}}+c\epsilon\frac{d\Pi}{dy}+b\epsilon\frac{d\Pi}{dx}=0 \ldots \Phi''$$

$$2\frac{d\vartheta}{dy}\frac{d\Omega}{dy}+\vartheta\frac{d^2\Omega}{dy^2}+g\cdot\overline{\frac{d\vartheta}{dx}\frac{d\Omega}{dy}+\frac{d\vartheta}{dy}\frac{d\Omega}{dx}+\vartheta\frac{d^2\Omega}{dxdy}}+e\cdot2\overline{\frac{d\vartheta}{dx}\frac{d\Omega}{dx}+\vartheta\frac{d^2\Omega}{dx^2}}+c\vartheta\frac{d\Omega}{dy}+b\vartheta\frac{d\Omega}{dx}=0 \ldots F''$$

toutes les autres restant les mêmes; savoir Φ, Φ', F'; & $\Phi^{\nu+2}$,

F^{v+2} devenant Φ''', F'''. Je repréſente ainſi les cinq équations Φ, Φ', F', Φ'' & F'',

$$\frac{d^2\alpha}{dy^2} + g\frac{d^2\alpha}{dxdy} + e\frac{d^2\alpha}{dx^2} + c\frac{d\alpha}{dy} + b\frac{d\alpha}{dx} = 0 \ldots\ldots\ldots \Phi$$

$$A + gB + eD + cE + bG = 0 \ldots\ldots\ldots \Phi'$$

$$\frac{d^2(\Omega+\vartheta)}{dy^2} + g\frac{d^2(\Omega+\vartheta)}{dxdy} + e\frac{d^2(\Omega+\vartheta)}{dx^2} + c\frac{d(\Omega+\vartheta)}{dy} + b\frac{d(\Omega+\vartheta)}{dx} = 0 \ldots\ldots F'$$

$$L + gM + eN + c\varepsilon\frac{d\Pi}{dy} + b\varepsilon\frac{d\Pi}{dx} = 0 \ldots\ldots\ldots \Phi''$$

$$P + gQ + eR + c\vartheta\frac{d\Omega}{dy} + b\vartheta\frac{d\Omega}{dx} = 0 \ldots\ldots\ldots F''$$

& j'en fais d'abord diſparoître b & c, en les combinant de la manière la plus ſimple ; ſavoir, chacune de celles Φ', Φ'', F'' avec les deux Φ & F'. Il réſultera delà trois équations F qui ne différeront entr'elles que par les grandeurs qui compoſent chacune de celles Φ', Φ'', F'' ; & elles pourront ſe rapporter toutes trois à la formule (E4) . . . $\zeta + g\theta + e\xi = 0$, d'où éliminant auſſi g & e au moyen des deux équations Φ''' & F''', on aura celle . . . (D)

$$\zeta\frac{d\Omega}{dx}\frac{d\Pi}{dx} - \theta\left(\frac{d\Omega}{dx}\frac{d\Pi}{dy} + \frac{d\Omega}{dy}\frac{d\Pi}{dx}\right) + \xi\frac{d\Omega}{dy}\frac{d\Pi}{dy} = 0,$$

comme dans le problème premier (§ 3).

Quant à l'autre facteur $\frac{d\Omega}{dx}\frac{d\Pi}{dy} - \frac{d\Omega}{dy}\frac{d\Pi}{dx} = 0$ qu'on retrouve encore ici, il eſt évident qu'il faut le négliger. En effet ce facteur ne ſatisfait au ſyſtème d'équations B (§ 2) que parce que les deux dernières d'entr'elles relatives à Φ'' & F'' ſe confondant alors en une ſeule, il ne reſte plus réellement que quatre de ces mêmes équations ; c'eſt-à-dire, autant qu'il y a d'indéterminées b, c, e, g ; & qu'on pourra conſéquemment toujours aſſigner à chacune de cellesci une valeur telle que les quatre équations deviennent identiques,

& faffent difparoître toutes les fonctions arbitraires reftantes. Mais dans le cas préfent où il y a fept équations & feulement les quatre mêmes indéterminées, on voit qu'une pareille racine eft infuffifante. Auffi provient-elle uniquement du concours des deux équations ϕ''' & F''' dans chacune des combinaifons que nous avons adoptées ; & elle n'auroit point lieu dans les autres fyftèmes de combinaifons, également propres à éliminer g & e des trois réfultats F ci-deffus.

Nous avons donc ici, pour déterminer toutes les relations poffibles des fonctions α, β, ϑ, Π & Ω entr'elles, trois équations G qu'il s'agira d'intégrer par la méthode du mémoire précédent. Pour cela nous y laifferons α, β, & nous ferons $\vartheta = \gamma$, $\Pi = \varepsilon$, $\Omega = \eta$, afin d'avoir les mêmes variables principales que dans ce mémoire art. 2. Nous donnerons auffi aux lettres e, f, g, ... q la même fignification. Soit encore, pour fimplifier les expreffions,

$[(\alpha m+g)(l+q)-(\alpha n+h)(k+p)]=\lambda$, $[(k+p)f-(l+q)e]=\delta$, $[(\alpha n+h)e-(\alpha m+g)f]=\mu$, $(en+fm)=\nu$, $(pn+qm)=\varpi$, $[(l+q)m-(k+p)n]=\varkappa$, $(ne-mf)=\rho$, $(gn+hm)=\tau$, $(pl-qk)=\psi$, $(pl+qk)=$ ȣ, $(qe-pf)=\upsilon$; De plus $(2pmfn-\varpi\nu+2qmen)=\Gamma$, $(2pmhn-\varpi\tau+2qmgn)=\Delta$, $(2pmlq-\varpi$ ȣ $+2qnkp)=\Lambda$, & enfin $\delta+\upsilon=\Omega=(kf-le)$;

il réfultera delà, pour les trois équations (G),

$$1^{o}.\ pm\lambda\frac{d^2\alpha}{dy^2}-\varpi\lambda\frac{d^2\alpha}{dxdy}+qn\lambda\frac{d^2\alpha}{dx^2}+pm\delta\frac{d^2\beta}{dy^2}-\varpi\delta\frac{d^2\beta}{dxdy}+qn\delta\frac{d^2\beta}{dx^2}+$$
$$pm\mu\frac{d^2\gamma}{dy^2}-\varpi\mu\frac{d^2\gamma}{dxdy}+qn\mu\frac{d^2\gamma}{dx^2}+pm\delta\alpha\frac{d^2\varepsilon}{dy^2}-\varpi\delta\alpha\frac{d^2\varepsilon}{dxdy}+qn\delta\alpha\frac{d^2\varepsilon}{dx^2}+$$
$$pm\mu\frac{d^2\eta}{dy^2}-\varpi\mu\frac{d^2\eta}{dxdy}+qn\mu\frac{d^2\eta}{dx^2}+\delta\Gamma=0,$$

$$2^{o}.\ pm\beta\varkappa\frac{d^2\alpha}{dy^2}-\varpi\beta\varkappa\frac{d^2\alpha}{dxdy}+qn\beta\varkappa\frac{d^2\alpha}{dx^2}+pm\beta\rho\frac{d^2\gamma}{dy^2}-\varpi\beta\rho\frac{d^2\gamma}{dxdy}+qn\beta\rho\frac{d^2\gamma}{dx^2}+$$
$$pm\delta\beta\frac{d^2\varepsilon}{dy^2}-\varpi\delta\beta\frac{d^2\varepsilon}{dxdy}+qn\delta\beta\frac{d^2\varepsilon}{dx^2}+pm\beta\rho\frac{d^2\eta}{dy^2}-\varpi\beta\rho\frac{d^2\eta}{dxdy}+qn\beta\rho\frac{d^2\eta}{dx^2}+\delta\Delta=o,$$

$$3^{o}.\ pm\gamma\psi\frac{d^2\alpha}{dy^2}-\varpi\gamma\psi\frac{d^2\alpha}{dxdy}+qn\gamma\psi\frac{d^2\alpha}{dx^2}+pm\gamma\upsilon\frac{d^2\gamma}{dy^2}-\varpi\gamma\upsilon\frac{d^2\gamma}{dxdy}+$$
$$qn\gamma\upsilon\frac{d^2\gamma}{dx^2}+pm\gamma\Omega\frac{d^2\eta}{dy^2}-\varpi\gamma\Omega\frac{d^2\eta}{dxdy}+qn\gamma\Omega\frac{d^2\eta}{dx^2}+\delta\Lambda=o.$$

7. Je ferai remarquer, en passant, la manière assez expéditive dont je parviens à ces trois résultats. Je commence par supposer trois équations symboliques.... (H)

$$A+gB+eC+cD+bE=o,$$
$$F+gG+eH+cI+bK=o,$$
$$L+gM+eN+cO+bP=o,$$

d'où je fais disparoître les deux lettres b & c. J'ai par là...(H2)

$$A(PI-KO)+F(EO-PD)+L(KD-EI)+$$
$$g[B(PI-KO)+G(EO-PD)+M(KD-EI)]+$$
$$e[C(PI-KO)+H(EO-PD)+N(KD-EI)]=o$$

qui doit correspondre terme à terme à la formule $\zeta+g\theta+e\xi=o$. Ainsi dès que j'aurai appliqué à chacune de ces trois équations quelque équation donnée, je connoîtrai ζ, θ & ξ dont il ne faudra plus que substituer les valeurs dans l'équation D ci-dessus, pour avoir un résultat qui ne renferme plus aucune des indéterminées b, c, e, g. Je représente donc, conformément à ce que j'ai dit plus haut, les deux équations Φ & F' constamment par les deux premières équations symboliques H, tandis que la troisième exprimera successivement celles Φ', Φ'', F''; & par là j'obtiens dans le même ordre les trois résultats (G).

8. Il s'agiroit maintenant d'intégrer ce systême de trois équations simultanées : commençons par essayer si la première d'entr'elles, en particulier, est susceptible d'intégration. Pour cela, je la compare terme à terme à celle A (*mém. préc.* § 2), & il se trouve que les quatre équations C (*mém. préc.* § 3) sont en effet identiques. Ensuite il résulte $\frac{l}{H} = -\frac{m}{n}$, ou $= -\frac{p}{q}$. Cette dernière valeur donne $Æ = qe - pf$, d'où * $\Psi = F[\mathrm{U}(qe - pf) + \mathrm{Y}]$, U & Y pouvant contenir g, h, k, l, m, n, p & q. Différentiant donc successivement cette formule par e, g; f, h; e, k; &c. dans le même ordre que les huit dernières équations B (*mém. préc.* § 2); faisant ensuite la comparaison terme à terme, & me conformant à tout ce qu'on a vu (*mém. préc.* § 9), en observant que $\omega n \lambda = \mathrm{U}$, j'aurai enfin... (J)

$$(qe - pf)\, d\mathrm{U} + d\mathrm{Y} = \frac{\mathrm{U}}{\lambda}\Big(q\delta dg - p\delta dh + q\mu dk - p\mu dl + q\delta\alpha dm - p\delta\alpha dn + (q\mu + f\lambda)\, dp - (p\mu + e\lambda)\, dq\Big)$$

dont il est impossible de tirer une valeur convenable de $d\mathrm{U}$ & $d\mathrm{Y}$ qui ne doivent contenir ni e ni f, à moins que $d\mathrm{Y}$ étant zéro, tout le second membre ne soit d'abord divisible par $qe - pf$, & que tous les autres termes compliqués de e & f n'en disparoissent en même tems ; ce qui n'a pas lieu dans le cas présent. Ainsi la première des équations G ci-dessus, dans son état actuel, n'est point intégrable par cette méthode.

Mais avec un peu d'attention on verra bientôt que si dans l'équation J on fait $\gamma = 0$, & conséquemment aussi k & $l = 0$, elle

* Voyez dans le prem. mém. art. 149 une méthode plus générale pour compléter ces intégrales partielles.

ſatisfera à la condition mentionnée ; & on aura en intégrant,

$$U = \frac{1}{(\alpha m + g) q - (\alpha n + h) p}$$

d'où $\sigma = \frac{qe - pf}{(\alpha m + g) q - (\alpha n + h) p} = \frac{qe - pf}{\lambda}$; & enſuite $I = \frac{d\sigma}{df} = -\frac{p}{\lambda}$; $H = \frac{d\sigma}{de} = \frac{q}{\lambda}$; $\xi = -\frac{(qe - pf)(qm - pn)}{\lambda^2}$. D'ailleurs $s = \xi e$, $v = \xi f$, $w = \delta\Gamma = (pf - qe) \times (pn - qm) \times (mf - ne)$. Ainſi en ſubſtituant ces valeurs dans l'équation H (*mém. préc.* § 8), on aura enfin $\frac{d\varepsilon}{dy}\frac{d\sigma}{dx} - \frac{d\varepsilon}{dx}\frac{d\sigma}{dy} = 0$ dont l'intégrale eſt $\sigma = F:\varepsilon$; c'eſt-à-dire, . . . (K)

$$\frac{d\alpha}{dx}\frac{d\eta}{dy} - \frac{d\alpha}{dy}\frac{d\eta}{dx} = \alpha F:\varepsilon \left(\frac{d\varepsilon}{dx}\frac{d\eta}{dy} - \frac{d\varepsilon}{dy}\frac{d\eta}{dx}\right) + F:\varepsilon \left(\frac{d\zeta}{dx}\frac{d\eta}{dy} - \frac{d\zeta}{dy}\frac{d\eta}{dx}\right)$$

qu'il faudroit intégrer de nouveau par la méthode du premier mémoire du recueil précédent (§ 49) : mais il ſe trouve que cette équation n'eſt pas intégrable. Abandonnons-la pour ce moment : nous y reviendrons plus tard, après avoir conſidéré ſous un point de vue plus général l'intégration du ſyſtème entier des trois équations G (§ 6), afin de découvrir s'il n'exiſte pas quelques manières de les combiner entr'elles, qui produiſent des réſultats intégrables par cette même méthode.

9. Nous les multiplierons donc chacune par un des facteurs, & dans le même ordre, A, B, C; & nous en prendrons la ſomme que nous comparerons terme à terme avec l'équation A (*mém. préc.* § 2) qui contient les mêmes variables principales $\alpha, \zeta, \gamma, \varepsilon, \eta$. On trouve d'abord que les quatre équations de condition C (*mem. préc.* § 3) ont lieu ; & en ſuivant la même marche que dans l'art. précédent, on parvient aux deux valeurs $Æ = ne - mf$ & $Æ = qe - pf$. De cette dernière on conclut, comme dans le même ar-

ticle, en obſervant que $Uq = \omega a$; c'eſt-à-dire $U = \omega n\ (A\lambda + B\beta\varkappa + C\gamma\psi)$, & en ſuppoſant $dY = 0$ . . . (Kk)

$$(qe - pf)\,dU = \frac{U}{A\lambda + B\beta\varkappa + C\gamma\psi}\Big(qA\delta dg - pA\delta dh + q(A\mu + B\beta\rho + C\gamma\upsilon)\,dk - p\,(A\mu + B\beta\rho + C\gamma\upsilon)\,dl + q\,(A\alpha\delta + B\beta\delta)\,dm - p\,(A\alpha\delta + B\beta\delta)\,dn + \big[q\,(A\mu + B\beta\rho + C\gamma\Omega) + f(A\lambda + B\beta\varkappa + C\gamma\psi)\big]\,dp - \big[p\,(A\mu + B\beta\rho + C\gamma\Omega) + e(A\lambda + B\beta\varkappa + C\gamma\psi)\big]\,dq\Big)$$

10. Mais avant d'étendre nos recherches à cette formule dans toute ſa généralité, bornons-les d'abord à l'hypothèſe ci-deſſus de γ, k & $l = 0$. On voit que δ elle-même devient alors $= -(qe - pf)$. De plus les termes dk & dl diſparoiſſent, auſſi-bien que tous ceux qui ſont multipliés par le facteur indéterminé C, à cauſe de celui γ qui s'y rencontre en même-tems. Par là l'équation ſe réduit à . . . (L)

$$(qe - pf)\,dU = \frac{U}{A\lambda + B\beta\varkappa}\Big(qA\delta dg - pA\delta dh + q\delta\,(A\alpha + B\beta)\,dm - p\delta\,(A\alpha + B\beta)\,dn + \big[q\,(A\mu + B\beta\rho) + f\,(A\lambda + B\beta\varkappa)\big]\,dp - \big[p\,(A\mu + B\beta\rho) + e\,(A\lambda + B\beta\varkappa)\big]\,dq\Big)$$

où $\delta = -(qe - pf)$, $\lambda = (\alpha m + g)\,q - (\alpha n + h)\,p$, $\varkappa = mq - np$, & il s'agit de rendre les deux coèfficiens de dp & dq diviſibles par $qe - pf = -\delta$: commençons par le premier. Pour cela il faut que

$$A\mu + B\beta\rho = eP + \frac{K}{q} \quad \& \quad A\lambda + B\beta\varkappa = -pP - \frac{K}{f}$$

P & K étant des fonctions indéterminées. De ces deux équations on déduit

$$A = \frac{mP + n\,\frac{K}{qf}}{hm - gn}, \quad B\beta = \frac{(\alpha m + g)\,P + (\alpha n + h)\,\frac{K}{qf}}{gn - hm};$$

& ſubſtituant ces valeurs dans l'équation L ci-deſſus, le coèfficient de

de dq devient auſſi diviſible par $qe - pf$; & cette équation, en ſupprimant ce facteur & faiſant $\frac{K}{fg} = E$, ſe change en

$$\frac{dU}{U} = \frac{1}{pP + qE}\left(\frac{mP + nE}{hm - gn}(qdg - pdh) - \frac{gP + hE}{hm - gn}(qdm - pdn) - Pdp - Edq\right).$$

Soit $P = \beta n$, $E = -\beta m$; A devient $= 0$, & $B = \frac{1}{\beta}$; c'eſt-à-dire, que nous retombons dans la ſeconde équation G diviſée par β : & il en réſulte, pour valeur de U, $\frac{1}{np - mq}$. Ainſi $\sigma = \frac{qe - pf}{np - mq}$, & en ſubſtituant ces valeurs dans l'équation H (*mém. précéd.* § 8) où $a = qnx$, $e = pmx$, $I = \frac{d\sigma}{df} = \frac{-p}{np - mq}$, $H = \frac{d\sigma}{de} = \frac{q}{np - mq}$, υ & $\theta = 0$, & enfin $w = \frac{\delta\Delta}{\beta}$, on aura pour réſultat

$$n\frac{d\sigma}{dx} - m\frac{d\sigma}{dy} + \frac{(qe - pf)(ng - mh)}{(mq - np)\beta} = 0,$$

dont l'intégrale (*mém. préc.* § 6 & 7) eſt $\Psi = \phi(\frac{\sigma}{\beta}, \varepsilon)$ d'où $\sigma = \beta\phi:\varepsilon$; c'eſt-à-dire, $qe - pf = \beta(np - mq)\phi:\varepsilon$, ou . . . . (M)

$$\frac{d\alpha}{dx}\frac{d\eta}{dy} - \frac{d\alpha}{dy}\frac{d\eta}{dx} = \beta\phi:\varepsilon\left(\frac{d\eta}{dx}\frac{d\varepsilon}{dy} - \frac{d\eta}{dy}\frac{d\varepsilon}{dx}\right);$$

équation qui, à cauſe de la variable β dont les différences partielles ne s'y rencontrent point, n'eſt pas ſuſceptible d'intégration en particulier. Il s'agit donc d'abord de préparer le ſyſtème des deux équations ſimultanées K (§ 8) & M de manière à le rendre intégrable.

11. Dans cette vue, j'en éliminerai la variable η & j'aurai pour réſultat, en diviſant par $F:\varepsilon$ & faiſant $\frac{\phi:\varepsilon}{F:\varepsilon} = f:\varepsilon, \ldots$ (N)

$$\beta\phi:\varepsilon\left(\frac{d\beta}{dx}\frac{d\varepsilon}{dy} - \frac{d\beta}{dy}\frac{d\varepsilon}{dx}\right) - (\alpha + \beta f:\varepsilon)\left(\frac{d\alpha}{dx}\frac{d\varepsilon}{dy} - \frac{d\alpha}{dy}\frac{d\varepsilon}{dx}\right) - \left(\frac{d\alpha}{dx}\frac{d\beta}{dy} - \frac{d\alpha}{dy}\frac{d\beta}{dx}\right) = 0.$$

En comparant cette équation à la formule générale Π ou plutôt Ψ (*mém. préc.* § 1), on trouve $V = -\beta\phi:\varepsilon$, $S = \alpha + \beta f:\varepsilon$, $Q = 1$; & les quatre équations Æ se réduisent à une seule $EQ - BS + AV = 0$, ou (O) ... $\beta\phi:\varepsilon \frac{dM}{d\alpha} + (\alpha + \beta f:\varepsilon)\frac{dM}{d\beta} - \frac{dM}{d\varepsilon} = 0$, qu'il s'agit d'intégrer à l'ordinaire comme une équation à quatre variables M, α, β, ε. On parvient d'abord à l'expression ... (P)

$$dM = p[\beta\phi:\varepsilon\, d\beta - (\alpha + \beta f:\varepsilon)\, d\alpha] + r(\beta\phi:\varepsilon\, d\varepsilon + d\alpha)$$

qu'on ne sauroit intégrer par la méthode directe, les deux binomes différentiels étant compliqués des trois variables α, β, ε. Il faudroit conséquemment ramener l'équation O à celles à trois variables, comme je l'ai enseigné (*prem. recueil*, *prem. mem.* § 31). Mais le résultat de cette opération seroit encore lui-même assez difficile à intégrer. Je me bornerai donc à montrer que, quand même on y réussiroit, on aboutiroit à une expression intraitable.

Pour cela, j'intègrerai l'équation P en déterminant, de la manière la plus simple, les deux fonctions arbitraires $\phi:\varepsilon$ & $f:\varepsilon$; supposons les, par exemple, l'une & l'autre $= -1$. Cette formule se réduira à $dM = p[\beta d\beta + (\alpha - \beta)d\alpha] + r(\beta d\varepsilon - d\alpha)$. Je multiplie le premier binome différentiel qui ne contient que α & β, & qui est homogène, par $\frac{1}{\beta^2 - \alpha\beta + \alpha^2}$, & je trouve, en l'intégrant,

$$\log. \sqrt{\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2} + \frac{1}{\sqrt{3}} \text{A. tang.} \frac{\beta\sqrt{3}}{2\alpha - \beta} = s.$$

Il faudroit maintenant déduire de là la valeur de β en α & s, afin de la substituer dans le second binome différentiel; mais cette opération est impossible ici, & voici une autre manière de parvenir au même but. Faisons $\alpha = t\beta$, s deviendra =

$$\log. \mathfrak{E}\sqrt{t^2-t+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\text{ A. tang. }\frac{\sqrt{3}}{2t-1}\text{; d'où}$$

$$\mathfrak{E}=e^{\varepsilon-\log.\sqrt{(t^2-t+1)}-\frac{1}{\sqrt{3}}\text{ A. tang. }\frac{\sqrt{3}}{2t-1}}$$

que je repréſente par $\mathfrak{E}=e^T$. Donc $\alpha=t\mathfrak{E}=te^T$; $d\alpha=e^T(dt+tdT)$; & $\frac{d\alpha}{\mathfrak{E}}=dt+tdT$. Ainſi l'intégrale du ſecond binome différentiel $d\varepsilon-\frac{d\alpha}{\mathfrak{E}}$ eſt $\varepsilon-\int(dt+tdT)=\varepsilon-\int\frac{dt}{1-t+t^2}=\varepsilon-\frac{2}{\sqrt{3}}$ A. tang. $\frac{t\sqrt{3}}{2-t}=\varepsilon-\frac{2}{\sqrt{3}}$ A. tang. $\frac{\alpha\sqrt{3}}{2\mathfrak{E}-\alpha}$; & conſéquemment, celle de la propoſée N dans cette hypothèſe *infini-infiniment* reſtreinte, puiſque nous y avons déterminé deux fonctions arbitraires indépendantes l'une de l'autre, ſeroit (*prem. recueil, prem. mém.* § 49)

$$\log. \sqrt{\alpha^2-\alpha\mathfrak{E}+\mathfrak{E}^2}+\frac{1}{\sqrt{3}}\text{ A. tang. }\frac{\mathfrak{E}\sqrt{3}}{2\alpha-\mathfrak{E}}=F\left(\varepsilon-\frac{2}{\sqrt{3}}\text{ A. tang. }\frac{\alpha\sqrt{3}}{2\mathfrak{E}-\alpha}\right).$$

Il reſteroit encore en outre à intégrer l'équation M ci-deſſus qui contient η, après y avoir ſubſtitué à $\mathfrak{E}$ ſa valeur tirée de cette dernière. C'en eſt aſſez pour abandonner toute tentative ultérieure ſur l'équation O.

12. Si on fait attention à l'hypothèſe à laquelle nous avons reſtreint les trois équations G (§ 6), qui par là ſe ſont réduites aux deux premières d'entr'elles, on s'appercevra bientôt qu'à cauſe de $\vartheta=0$, ce cas eſt préciſément le même que j'ai examiné (*mém. cité* § 49); ſavoir $\Psi=\lambda\phi:\omega+\mu\phi':\omega:+f:\gamma$; λ étant ici $=\alpha$, $\mu=\mathfrak{E}$, $\omega=\Pi=\varepsilon$, $\gamma=\Omega=\eta$. Il ſemble d'après cela que les rapports que j'ai aſſignés en cet endroit entre λ, μ, ω & γ devroient être ici les mêmes, & conſéquemment auſſi l'intégrale du ſyſtème des deux équations K & M (§ 8 & 10). Voici la réponſe à cette objection très-juſte.

$$\left(\gamma\left[\frac{d\sigma}{dy}\frac{d\varepsilon}{dx}-\frac{d\pi}{dx}\frac{d\varepsilon}{dy}\right]+\epsilon\left[\frac{d\eta}{dy}\frac{d\varepsilon}{dx}-\frac{d\eta}{dx}\frac{d\varepsilon}{dy}\right]\right)\left(\frac{dy}{dy}\frac{d\eta}{dx}-\frac{dy}{dx}\frac{d\psi}{dy}\right)+\left(\frac{d\eta}{dy}\frac{d\varepsilon}{dx}-\frac{d\eta}{dx}\frac{d\varepsilon}{dy}\right)\left(\frac{dy}{dy}\frac{d\alpha}{dx}-\frac{dy}{dx}\frac{d\alpha}{dy}\right)=0$$

qui, comme on voit, n'appartient point à la forme E (*mém. préc.* § 5); mais qui peut-être eſt intégrable de quelque autre manière.

Sans nous arrêter à chercher une méthode d'intégration propre à ce genre d'équations, nous obſerverons que, ſi on parvenoit à intégrer celle R, & à en déduire une expreſſion de γ en α, η & ε dont néceſſairement la valeur $\gamma = 0$ que nous avons adoptée ci-deſſus (§ 10) ſeroit un cas particulier, en ſuivant l'indication de l'analogie, le moyen de rendre intégrable le ſyſtème entier G, s'il en eſt ſuſceptible, ſeroit de ſubſtituer cette valeur de γ dans les deux premières équations. Mais quoiqu'il en ſoit, nous abandonnerons ce plan trop vaſte; & nous examinerons ſucceſſivement en détail les deux hypothèſes qui ſe préſentent le plus naturellement, & qui ſont les plus analogues aux deux formes dont on a vu (§ 4) qu'étoit ſuſceptible la formule générale ſimple $\Psi = \alpha\phi:\Pi + F:\Omega$.

CHAPITRE SECOND.

Développement des deux principaux cas de la formule générale C 2 (§ 5); *ſavoir*,

$$\left.\begin{matrix}\Psi = \alpha\phi:\Pi + \beta\phi':\Pi + \&c. \\ + \; F:\Pi + \vartheta F':\Pi + \&c.\end{matrix}\right\} \& \; \Psi = (\phi:\Pi + F:\Omega) + \beta(\phi':\Pi + F':\Omega) + \&c.$$

15. NOUS commencerons par ſuppoſer $\Omega = \Pi$ qui eſt le premier cas; c'eſt-à-dire, ici (§ 6), $\eta = \varepsilon$, d'où $p = m$, $q = n$: & par là l'équation R ci-deſſus ſe réduira à $\frac{d\sigma}{dy}\frac{d\varepsilon}{dx} - \frac{d\sigma}{dx}\frac{d\varepsilon}{dy} = 0$, dont l'inté-

dra enfuite déterminer U & Y, on ne trouvera aucune valeur convenable ; & la raifon en eft que nous rencontrons ici de nouveau le cas dont j'ai fait mention dans le mémoire précédent (§ 11). Nous employerons donc le moyen que j'y ai indiqué, c'eft-à-dire, que fubftituant d'abord, dans la feconde des équations B, à H & I leurs valeurs en K & L tirées des fixième & feptième de ces mêmes équations, nous la changerons en $fL^2 - gKL + hK^2 = 0$, d'où nous conclurons $\frac{L}{K} = -\frac{e}{f}$; $f\frac{d\Psi}{dh} - e\frac{d\Psi}{dg} = 0$; & enfin $\Psi = F(fg - eh)$, en intégrant par g & h feulement. Nous repréfenterons enfuite par $\Psi = F[U(fg - eh) + Y]$ la valeur complète de Ψ, U & Y contenant e, f, k & l. Et pour avoir des équations de comparaifon analogues à celles qu'on a dans le cas ordinaire où on intègre la première des équations B, nous mettrons auffi dans les huitième & neuvième de ces équations, au moyen de la fixième & de la feptième, K à la place de H, & L à celle de I : de forte que ces quatre équations de comparaifon deviendront, dans le même ordre, 6°. $fH - aK = 0$; 7°. $hI - eL = 0$; 8°. $fM - iK = 0$; 9°. $hN - lL = 0$. Maintenant nous différentierons fucceffivement l'équation $\Psi = F[U(fg - eh) + Y]$ par g & e; h & f; g & k; h & l; & faifant la comparaifon terme à terme avec chacune des quatre équations précédentes, comme il eft expliqué (*mém. préc.* § 9), nous parviendrons enfin aux valeurs $Y = 0$ & $U = \frac{1}{le - kf}$. Donc $\Psi = F\left(\frac{fg - eh}{le - kf}\right)$ & $\sigma = \frac{fg - eh}{le - kf}$. Faifant enfuite dans l'équation H (*mém. préc.* § 8) les fubftitutions néceffaires, il viendra pour réfultat

$$f\frac{d\sigma}{dx} - e\frac{d\sigma}{dy} = 0 \text{ ou } \frac{d\alpha}{dy}\frac{d\sigma}{dx} - \frac{d\alpha}{dx}\frac{d\sigma}{dy} = 0 ;$$

& enfin en intégrant & se souvenant que nous avons pris ici α au lieu de ε, $\alpha = F:\varepsilon$; c'est-à-dire, $fg - eh = (le - kf)\, F:\varepsilon$, ou $=$ $(kf - le)\, F:\varepsilon$. Ainsi $\frac{d\beta}{dy}\frac{d\varepsilon}{dx} - \frac{d\beta}{dx}\frac{d\varepsilon}{dy} - \left(\frac{d\gamma}{dy}\frac{d\varepsilon}{dx} - \frac{d\gamma}{dx}\frac{d\varepsilon}{dy}\right) F:\varepsilon = 0$ dont l'intégrale est $\beta = \gamma\, F:\varepsilon + \phi:\varepsilon$, expression pareille à celle de α.

16. La loi qui doit règner entre les quatre grandeurs α, β, ϑ & Π qui constituent le second membre de la formule générale

$$\Psi = \alpha\phi:\Pi + \beta\phi':\Pi,$$
$$+ F:\Pi + \vartheta F':\Pi$$

pour qu'on puisse en faire disparoître les quatre fonctions arbitraires ϕ, ϕ', F, F', est donc fixée par le système des deux équations

$$\alpha = \vartheta\, \mathrm{f}:\Pi + f:\Pi \;\; \& \;\; \beta = \vartheta\, F:\Pi + \phi:\Pi\,;$$

car nous avons substitué γ à ϑ & ε à Π. Ainsi, si nous représentons dans le même ordre par P, p, P & p ces quatre fonctions quelconques de Π, qu'il faut regarder comme données, mais comme indéterminées & indépendantes l'une de l'autre, nous aurons $\alpha = \vartheta \mathrm{P} + \mathrm{p}$, $\beta = \vartheta P + p$; & la formule générale finie ci-dessus se changera en

$$\Psi = (\vartheta \mathrm{P} + \mathrm{p})\, \phi:\Pi + (\vartheta P + p)\, \phi':\Pi.$$
$$+ F:\Pi + \quad \vartheta F':\Pi$$

En considérant avec un peu d'attention cette formule, on verra bientôt qu'elle se réduit à celle $\Psi = \alpha\phi:\Pi + F:\Pi$ de l'article 4. En effet, on peut la mettre sous la forme

$$\Psi = \vartheta\,(\mathrm{P}\,\phi:\Pi + P\phi':\Pi + F':\Pi) + \mathrm{p}\,\phi:\Pi + p\phi':\Pi + F:\Pi$$

qui, à cause de P, p, P & p fonctions de Π, est évidemment la même que la précédente.

Il suit de là que cette hypothèse ne peut fournir d'autres équations aux différences partielles du second ordre, que celles que j'ai

nommées *régulières*, & qui ont une intégrale de l'ordre immédiatement inférieur.

17. Paſſons maintenant à la ſeconde hypothèſe ; ſavoir, celle de $\alpha = 1$, $\vartheta = \epsilon$. Comme la première équation Φ (§ 5) s'y anéantit, & que cette même équation eſt entrée dans chacune des trois combinaiſons d'où ſont réſultées celles G (§ 6), nous ſerons obligés de reprendre cette opération dans un ordre différent. Nous combinerons donc d'abord, en laiſſant encore ici ε pour Π & η pour Ω, les quatre équations les plus ſimples ; ſavoir, les quatre dernières Φ'', F'', Φ''' & F''' entr'elles ; & nous en tirerons les valeurs des coèfficiens indéterminés b, c, e & g, dont la connoiſſance nous ſera néceſſaire plus tard pour parvenir à la formule générale (§ 5) de cette eſpèce d'équations. Mais afin d'avoir des réſultats qui ſoient applicables à toutes les éliminations pareilles que nous aurons à faire dans le cours de ce mémoire, nous prendrons deux équations ſymboliques au lieu de celles Φ'' & F'', conſervant les deux extrèmes Φ''' & F''' qui ſont très-ſimples, & qui reſtent invariablement les mêmes dans toutes nos opérations à venir.

Soient donc (T) ... $\mathrm{A} + \mathrm{gB} + \mathrm{eC} + \mathrm{cD} + \mathrm{bE} = 0$,

$$\mathrm{F} + \mathrm{gG} + \mathrm{eH} + \mathrm{cI} + \mathrm{bK} = 0,$$

$$n^2 + gmn + em^2 = 0,$$

$$q^2 + gpq + ep^2 = 0.$$

Nous déduirons de là, en faiſant encore $pn + qm = \varpi$ (§ 6), les quatre valeurs ſuivantes ... (U)

$$\mathrm{b} = \frac{(\mathrm{AI} - \mathrm{DF})\,mp - (\mathrm{BI} - \mathrm{DG})\,\varpi + (\mathrm{CI} - \mathrm{DH})\,nq}{(\mathrm{KD} - \mathrm{EI})\,mp}\ ;\ \mathrm{e} = \frac{nq}{mp};$$

$$\mathrm{c} = -\frac{(\mathrm{AK} - \mathrm{EF})\,mp - (\mathrm{BK} - \mathrm{EG})\,\varpi + (\mathrm{CK} - \mathrm{EH})\,nq}{(\mathrm{KD} - \mathrm{EI})\,mp}\ ;\ \mathrm{g} = -\frac{\varpi}{mp};$$

où il ne s'agira plus que de fubftituer aux coèfficiens indéterminés A, B, &c. des deux équations fymboliques, ceux des équations données, c'eft-à-dire, ici de ϕ''' & F''' (§ 6) en mettant dans cette dernière ς au lieu de ϑ.

Pour fimplifier les expreffions qui réfulteront, tant de cette opération que des opérations fubféquentes, nous ferons $mp\frac{d^2\varsigma}{dy^2} - \varpi\frac{d^2\varsigma}{dxdy} + nq\frac{d^2\varsigma}{dx^2} = (B)$; & de même $mp\frac{d^2\varepsilon}{dy^2}$ − &c. = (E); $mp\frac{d^2\eta}{dy^2}$ − &c. = (H); $mp\frac{d^2\gamma}{dy^2}$ − &c. = (Γ); $mp\frac{d^2\delta}{dy^2}$ − &c. = (Δ); &c. De plus, $mq - np$ fera $= \chi$, $hp - gq = \zeta$, $gn - hm = 7$; & nous aurons d'abord, en effectuant les fubftitutions indiquées,

$$b = \frac{-\varsigma q(E) + \varsigma n(H) - \chi(2gnq - h\varpi)}{\varsigma\chi mp};\ c = \frac{\varsigma p(E) - \varsigma m(H) - \chi(2hmp - g\varpi)}{\varsigma\chi mp}.$$

Mettant enfuite ces dernières valeurs fucceffivement dans les deux équations ϕ' & F' qui dans l'hypothèfe préfente fe réduifent à

$$\frac{d^2(\varsigma+\varepsilon)}{dy^2} + g\frac{d^2(\varsigma+\varepsilon)}{dxdy} + e\frac{d^2(\varsigma+\varepsilon)}{dx^2} + c\frac{d(\varsigma+\varepsilon)}{dy} + b\frac{d(\varsigma+\varepsilon)}{dx} = 0 \ldots \phi';$$

$$\frac{d^2(\varsigma+\eta)}{dy^2} + \&c. = 0 \ldots F',$$

nous parviendrons enfin au fyftème des deux équations de condition fimultanées .... (V)

$$\varsigma\chi(B) + \varsigma\zeta(E) + \varsigma 7(H) - \chi(2h^2mp + 2g^2nq - 2gh\varpi)\left\{\begin{array}{l} -\chi^2 7 = 0. \\ -\chi^2\zeta = 0. \end{array}\right.$$

En égalant d'abord entr'eux les derniers termes de ces deux équations, il vient ou $\chi = 0$; ou $7 - \zeta = 0$.

La première de ces deux racines eft $mq - np = 0$ ou $\frac{d\varepsilon}{dx}\frac{d\eta}{dy} - \frac{d\varepsilon}{dy}\frac{d\eta}{dx} = 0$, d'où $\varepsilon = F:\eta$; c'eft-à-dire, $\Pi = F:\Omega$. Cette valeur fatisfait à la vérité aux deux équations V; mais elle réduit la formule .. (W)

$$\Psi = \phi:\Pi + F\cdot\Omega + \epsilon(\phi':\Pi + F':\Omega)$$

à la formule ordinaire $\Psi = F:\Pi + \epsilon\phi:\Pi$.

La seconde donne $ph - qg + mh - ng = 0$; c'est-à-dire,

$$\frac{d\epsilon}{dy}\left(\frac{d\eta}{dx} + \frac{d\varepsilon}{dx}\right) - \frac{d\epsilon}{dx}\left(\frac{d\eta}{dy} + \frac{d\varepsilon}{dy}\right) = 0$$

dont on voit tout de suite que l'intégrale est $\epsilon = f(\eta + \varepsilon) = f(\Omega + \Pi)$. En substituant cette valeur de ϵ dans l'une ou l'autre des équations V, on parvient au résultat

$$2\overline{f'(\eta + \varepsilon)}^2 + f'(\eta + \varepsilon) - f(\eta + \varepsilon)f''(\eta + \varepsilon) = 0$$

auquel il faut satisfaire. Pour cela on fera $\eta + \varepsilon = x$ & $f(\eta + \varepsilon) = f:x = y$; d'où $dy = dx\,f':x$, $d^2y = dx^2 f'':x$ en supposant dx constant; & multipliant par dx^2 l'équation précédente, on la transformera en $yd^2y - 2dy^2 - dy\,dx = 0$, laquelle, multipliée de nouveau par $\frac{2y}{y^4}$ & intégrée, donne $\frac{2dy + dx}{y^2} = c^2 dx$, * dont l'intégrale ultérieure est $log.\ \frac{a(cy - 1)}{cy + 1} = cx$, & enfin, $y = f:x = \frac{a + e^{cx}}{c(a - e^{cx})}$; ce qui signifie que la fonction arbitraire $f(\Omega + \Pi)$ prend une forme déterminée, & que la valeur de ϵ se restreint à celle .... (X).

$$\epsilon = \frac{a + e^{c(\Omega + \Pi)}}{c[a - e^{c(\Omega + \Pi)}]}$$

Ainsi dans la formule générale W ci-dessus, Ω & Π peuvent être quelconques, pourvu que ϵ ait cette forme qui est la seule convenable.

* J'ai représenté la constante arbitraire par $+ c^2dx$. Si au-contraire je l'avois supposée $- c^2dx$, l'intégrale ultérieure eût été $a - cx = 2A.\ tang.\ cy$. On sait qu'en général les fonctions logarithmiques se transforment, au moyen des imaginaires, en fonctions aux *sin.*, *tang.*, &c. ou aux arcs mêmes de cercle.

18. Parmi le nombre infini de valeurs différentes qu'on peut ſuppoſer aux deux conſtantes a & c, il y a une certaine combinaiſon de deux de ces valeurs qui demande un examen particulier, en ce qu'elle change entièrement la forme de l'expreſſion de $\mathcal{E}$: c'eſt celle de $a = -1$ & $c = 0$, en vertu de laquelle $\mathcal{E}$ devient $= \frac{0}{0}$. On trouveroit aiſément par les règles ordinaires que cette expreſſion n'eſt autre que $-\frac{1}{2}(\varepsilon + \eta)$: mais pour lui donner toute l'étendue dont elle eſt réellement ſuſceptible, il faudra ajouter à cette grandeur une conſtante arbitraire, & faire $\mathcal{E} = a - \frac{1}{2}(\varepsilon + \eta)$. C'eſt de quoi il eſt facile de ſe convaincre en intégrant l'équation

$$2dy + dx - c^2y^2dx = 0$$

dans la même hypothèſe de $c = 0$, d'où réſulte évidemment $y = a - \frac{1}{2}x$; c'eſt-à-dire $\mathcal{E} = a - \frac{1}{2}(\varepsilon + \eta)$. Cette eſpèce de difficulté provient uniquement de ce qu'on ne peut déterminer ainſi $c = 0$, ſans qu'il s'enſuive néceſſairement en même tems $a = -1$, comme on voit par l'équation ci-deſſus $log. \frac{a(cy-1)}{(cy+1)} = cx$, que la ſuppoſition de $c = 0$ réduit à $l. -a = 0$, d'où $a = -1$. Ainſi l'expreſſion de $\mathcal{E}$ contenant eſſentiellement deux conſtantes arbitraires, & cette ſeule détermination de c les faiſant diſparoître toutes deux à-la-fois, il faut évidemment qu'il s'y introduiſe une nouvelle conſtante, d'une manière compatible avec la forme actuelle de cette expreſſion.

Nous diſtinguerons donc, dans ce premier cas d'une fonction coëfficiente unique $\mathcal{E}$, deux formes différentes dont elle eſt ſuſceptible; ſavoir,

$$\mathcal{E} = \frac{a + e^{c(\Omega + \Pi)}}{c\left(a - e^{c(\Omega+\Pi)}\right)}; \ \& \ \mathcal{E} = a - \tfrac{1}{2}(\Omega + \Pi);$$

Ω & Π étant quelconques. Mais avant de faire usage de ces déterminations, nous continuerons nos recherches sur la formule générale C2 de l'article 5, en nous bornant toujours à l'hypothèse présente de $\alpha = 1$, $\vartheta = \beta$, $\varkappa = \gamma$, &c.

19. Cette formule prend alors la forme .... (Y)

$$\Psi = (\phi:\varepsilon + F:\eta) + \beta(\phi':\varepsilon + F':\eta) + \gamma(\phi'':\varepsilon + F'':\eta) + \delta(\phi''':\varepsilon + F''':\eta) \ldots \ldots \ldots + \xi(\phi^{\nu}\varepsilon + F^{\nu}:\eta);$$

& on a, pour faire évanouir les fonctions arbitraires, le système d'équations Z, que le défaut d'espace m'oblige à rejeter à la page suivante, & dans lequel on observera

1°. Que ε & η représentent encore Π & Ω, les lettres $g, h, k, \ldots q$ conservant aussi la même signification que ci-dessus (§ 6);

2°. Que celles r & s désignent de plus, & dans le même ordre, les deux différences partielles $\frac{d\delta}{dx}$ & $\frac{d\delta}{dy}$;

3°. Et enfin que les astérisques indiquent les places qui restent vuides dans la paire d'équations qui se trouve au rang $\nu + 1$; c'est-à-dire, dans la pénultième paire, comme ici celle de ϕ^{IV}, F^{IV}, lorsque le nombre ν d'accens est égal à 3.

Equations (Z)

$$\Phi' \ldots \left(\frac{d^2\varepsilon}{dy^2}+\frac{d^2\beta}{dy^2}\right)+g\left(\frac{d^2\varepsilon}{dxdy}+\frac{d^2\beta}{dxdy}\right)+e\left(\frac{d^2\varepsilon}{dx^2}+\frac{d^2\beta}{dx^2}\right)+c(n+h)+b(m+g)=0$$

$$F' \ldots \left(\frac{d^2\eta}{dy^2}+\frac{d^2\beta}{dy^2}\right)+g\left(\frac{d^2\eta}{dxdy}+\frac{d^2\beta}{dxdy}\right)+e\left(\frac{d^2\eta}{dx^2}+\frac{d^2\beta}{dx^2}\right)+c(q+h)+b(p+g)=0$$

$$\Phi'' \ldots \left(2hn+\beta\frac{d^2\varepsilon}{dy^2}+\frac{d^2\gamma}{dy^2}\right)+g\left(gn+hm+\beta\frac{d^2\varepsilon}{dxdy}+\frac{d^2\gamma}{dxdy}\right)+e\left(2gm+\beta\frac{d^2\varepsilon}{dx^2}+\frac{d^2\gamma}{dx^2}\right)+c(\beta n+l)+b(\beta m+k)=0$$

$$F'' \ldots \left(2hq+\beta\frac{d^2\eta}{dy^2}+\frac{d^2\gamma}{dy^2}\right)+g\left(gq+hp+\beta\frac{d^2\eta}{dxdy}+\frac{d^2\gamma}{dxdy}\right)+e\left(2gp+\beta\frac{d^2\eta}{dx^2}+\frac{d^2\gamma}{dx^2}\right)+c(\beta q+l)+b(\beta p+k)=0$$

$$\Phi''' \ldots \left(2ln+\gamma\frac{d^2\varepsilon}{dy^2}+\frac{d^2\delta}{dy^2}\right)+g\left(kn+lm+\gamma\frac{d^2\varepsilon}{dxdy}+\frac{d^2\delta}{dxdy}\right)+e\left(2km+\gamma\frac{d^2\varepsilon}{dx^2}+\frac{d^2\delta}{dx^2}\right)+c(\gamma n+s)+b(\gamma m+r)=0$$

$$F''' \ldots \left(2lq+\gamma\frac{d^2\eta}{dy^2}+\frac{d^2\delta}{dy^2}\right)+g\left(kq+lp+\gamma\frac{d^2\eta}{dxdy}+\frac{d^2\delta}{dxdy}\right)+e\left(2kp+\gamma\frac{d^2\eta}{dx^2}+\frac{d^2\delta}{dx^2}\right)+c(\gamma q+s)+b(\gamma p+r)=0$$

$$\Phi^{IV} \ldots \left(2sn+\delta\frac{d^2\varepsilon}{dy^2}+*\right)+g\left(rn+sm+\delta\frac{d^2\varepsilon}{dxdy}+*\right)+e\left(2rm+\delta\frac{d^2\varepsilon}{dx^2}+*\right)+c(\delta n+*)+b(\delta m+*)=0$$

$$F^{IV} \ldots \left(2sq+\delta\frac{d^2\eta}{dy^2}+*\right)+g\left(rq+sp+\delta\frac{d^2\eta}{dxdy}+*\right)+e\left(2rp+\delta\frac{d^2\eta}{dx^2}+*\right)+c(\delta q+*)+b(\delta p+*)=0$$

&c.

&c.

$$\Phi^{\nu+2} \qquad n^2+gmn+em^2=0$$

$$F^{\nu+2} \qquad q^2+gpq+ep^2=0.$$

20. Nous commencerons par ſuppoſer que la formule générale Y ſe termine incluſivement au terme γ. Alors ν étant $= 2$, $\nu + 1$ ſera $= 3$; & la pénultième paire ſera celle ϕ''' & F''' où, δ étant zéro, les places occupées par les différences partielles de cette fonction reſteront vuides. Il faudroit donc ſubſtituer ces deux équations, ainſi modifiées par la condition de $\delta = 0$ & conſéquemment auſſi de r & $s = 0$, aux deux équations ſymboliques T (§ 17), & mettre enſuite, dans celles ϕ', F', ϕ'' & F'', les valeurs qu'on en auroit conclues pour b & c, ainſi que celles de e & g qui reſtent invariablement les mêmes dans tous les cas : mais on peut parvenir à la connoiſſance de ces valeurs d'une manière toute ſimple. En effet, il ſuffira de ſubſtituer γ à β & conſéquemment k & l à g & h dans celles que nous avons trouvées (§ 17) pour le cas précédent; puiſque la paire d'équations ϕ''' & F''' eſt préciſément la même, à la différence près des deux lettres γ & β, que celle ϕ'' & F'' que nous avons employée à l'endroit cité; ce qui aura également lieu dans tous les cas. Nous aurons par là

$$b = \frac{-\gamma q(E) + \gamma n(H) - \chi(2knq - l\varpi)}{\gamma\chi mp};$$

$$c = \frac{\gamma p.(E) - \gamma m(H) - \chi(2lmp - k\varpi)}{\gamma\chi mp};$$

& nous conclurons enfin, par la ſubſtitution de ces valeurs dans ϕ', F', ϕ'' & F'', dans le même ordre, les deux paires d'équations de condition ſuivantes, où j'ai fait, en outre, $\psi = pl - qk$, $\omega = kn - lm$; ſavoir, . . . (Aa)

$$\gamma\chi(B) + \gamma\zeta(E) + \gamma\eta(H) - \chi[2lmhp + 2kngq - (hk + gl)\varpi] \begin{cases} -\chi^2\omega = 0 \\ -\chi^2\psi = 0 \end{cases} \&$$

$$\gamma\chi(\Gamma)+\gamma\psi(E)+\gamma\omega(H)-\chi[2l^2mp+2k^2nq-2kl\varpi]\left\{\begin{array}{l}+\chi^2(7\gamma-\omega\beta)=0\\+\chi^2(\zeta\gamma-\psi\beta)=0.\end{array}\right.$$

En égalant, dans chacune de ces deux paires, les termes qui ne font pas communs aux deux équations qui la compofent, on trouve, outre la racine $\chi=0$ que nous avons déjà vu être inutile, & qui l'eft encore ici par la même raifon (§ 17), le fyftème des deux équations fimultanées $\psi-\omega=0$ & $\zeta-7=0$, d'où s'enfuit en intégrant,

$$\beta=\mathrm{f}(\eta+\varepsilon)=\mathrm{f}(\Omega+\Pi)\ \&\ \gamma=f(\eta+\varepsilon)=f(\Omega+\Pi).$$

Subftituant enfuite ces deux valeurs dans l'une ou l'autre des deux équations qui conftituent chaque paire, on aura les deux réfultats

$$f\mathrm{f}''-2f'\mathrm{f}'-f'=0\ \&$$
$$ff''-2f'^2+f\mathrm{f}'-f'\mathrm{f}=0,$$

auxquels il faut encore fatisfaire.

21. Soit donc $\eta+\varepsilon=x$, $\mathrm{f}(\eta+\varepsilon)=\mathrm{f}:x=y$; $f:x=z$; & les deux équations précédentes, en les multipliant par dx^2, fe changeront en . . . (Aa)

$$zd^2y-(2dy+dx)\,dz=0,$$
$$zd^2z-2dz^2-ydzdx+zdydx=0.$$

L'intégrale de la première eft $2dy+dx-c^2z^2dx=0$, où c eft une conftante arbitraire. Quant à l'autre, elle n'eft pas fufceptible d'intégration dans fon état actuel; & on s'en convaincra facilement en faifant $\frac{dz}{dx}=p$, & lui donnant la forme $zdp-2pdz+zdy-ydz=0$ qui ne fatisfait point à la condition d'intégrabilité des équations du premier ordre à trois variables p, z, y. Je multiplie donc la première des deux équations aa par le facteur indéterminé λ, & la feconde par celui μ; & prenant leur fomme, j'ai

$\mu z d^2z + \lambda z d^2y - 2\lambda dz dy - (\lambda + \mu y) dz dx - 2\mu dz^2 + \mu z dy dx = 0$ dont je suppose que l'intégrale soit $Adz + Bdy + Cdx = mdx$. Différentiant ensuite cette intégrale en faisant dx constante, & comparant terme à terme, je parviens aux huit équations

$$A = \mu z,\ B = \lambda z,\ \frac{dA}{dy} + \frac{dB}{dz} = -2\lambda,\ \frac{dA}{dx} + \frac{dC}{dz} = -\lambda - \mu y,\ \frac{dA}{dz} = -2\mu,$$
$$\frac{dB}{dy} = 0,\ \frac{dC}{dx} = 0,\ \frac{dB}{dx} + \frac{dC}{dy} = \mu z.$$

Les 6 & 7[me] de ces équations montrent d'abord que B ne contient point y ; ni C, x. On conclut ensuite,

des 1, 2 & 3, (ab) $z\frac{d\lambda}{dz} + z\frac{d\mu}{dy} + 3\lambda = 0$;

des 1 & 4[me], ... $\frac{dC}{dz} = -\lambda - \mu y - z\frac{d\mu}{dx}$;

& des 2 & 8[me], ... $\frac{dC}{dy} = \mu z - z\frac{d\lambda}{dx}$.

De plus les 1[re] & 5[me] donnent $z\frac{d\mu}{dz} + 3\mu = 0$; & enfin les 2 & 6[me] donnent $\frac{d\lambda}{dy} = 0$. En intégrant cette pénultième, on trouve $\mu = \frac{K}{z^3}$, K étant une fonction indéterminée de x & y; & substituant cette valeur dans l'équation ab, il en résulte $z^3\frac{d\lambda}{dz} + \frac{dK}{dy} + 3z^2\lambda = 0$ dont l'intègrale, en faisant attention que K, ni conséquemment $\frac{dK}{dy}$ ne contiennent z, est $z^3\lambda + z\frac{dK}{dy} = \phi(x, y) = G$. On a donc $\lambda = \frac{G - z\frac{dK}{dy}}{z^3}$, & par conséquent $A = \frac{K}{z^2}$, $B = \frac{G - z\frac{dK}{dy}}{z^2}$. De plus, on trouvera $dC = \frac{dC}{dy}dy + \frac{dC}{dz}dz$ (puisque C ne contient pas x) $=$

$$\frac{\left(Kz - z\frac{dG}{dx} + z^2\frac{d^2K}{dxdy}\right)dy - \left(G - z\frac{dK}{dy} + Ky + z\frac{dK}{dx}\right)dz}{z^3};$$

z, y, &c., x, fans mélange des rapports différentiels $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dy}{dx}$, &c, & m étant une conftante arbitraire.

22. Effayons maintenant d'intégrer ultérieurement le fyftème des deux équations ac dont aucune n'eft intégrable dans fon état actuel. Nous employerons pour cela la méthode du fecond mémoire du recueil précédent art. 6[me]; ce qui exige qu'on commence par éliminer de la feconde le terme dy. Cette opération transformera le fyftème en

$$2y\,dz + (y^2 - c^2z^3 + n^2z^2 - z)\,dx = 0,$$
$$2dy + (1 - c^2z^2)\,dx = 0;$$

n étant $= c^2 - m$; & la formule générale deviendra

$$(y^2 - c^2z^3 + n^2z^2 - z)\frac{dR}{dz} - 2y\frac{dR}{dx} + y(1 - c^2z^2)\frac{dR}{dy} = 0,$$

dont l'intégrale doit réfulter de l'expreffion

$$dR = py\,[(1 - c^2z^2)\,dx + 2dy] + r\,[(1 - c^2z^2)\,y\,dz - (y^2 - c^2z^3 + n^2z^2 - z)\,dy]:$$

On verra aifément, par l'efprit de cette méthode, qu'il ne s'agit plus que d'intégrer l'équation (ad) ... $(y - c^2z^2y)\,dz - (y^2 - c^2z^3 + n^2z^2 - z)\,dy = 0$ qui ne contient que deux variables, & d'en déduire la valeur de z en y, afin de la fubftituer dans l'autre équation $(1 - c^2z^2)\,dx + 2dy = 0$.

On auroit pu parvenir ici plus fimplement au même but, à caufe de l'abfence de la variable finie x. Il fuffifoit pour cela d'éliminer dx des deux propofées ac, ce qui donnoit ad; & d'éliminer enfuite de même, au moyen de l'intégrale de celle-ci, la variable z de la première des deux mêmes équations, qu'il feroit toujours facile d'intégrer, en la mettant fous la forme $dx = \frac{2dy}{c^2z^2 - 1}$; puifque z eft fuppofée donnée en y feule par l'équation ad.

La détermination de y & de z en x; c'eſt-à-dire, des deux fonctions coèfficientes β & γ en η & ε ou en Ω & Π (§ 20) dépend donc entièrement de cette équation. Il ſeroit très-intéreſſant de parvenir à en aſſigner l'intégrale; mais je doute qu'on ſoit en poſſeſſion d'une méthode convenable à des équations auſſi compliquées, & je me vois contraint de renoncer à cette opération pour continuer mes recherches.

23. Suppoſons maintenant que la formule générale Y (§ 19) contienne les trois coèfficiens β, γ, δ. Alors ν deviendra $= 3$, & les équations extrêmes qui doivent concourir à la détermination des facteurs b, c, e, g, ſont celles ϕ^{IV}, F^{IV}, ϕ^{V}, F^{V}. Ces deux dernières reſtant toujours les mêmes, & les deux autres ne différant de celles que nous avons employées dans le cas de l'article 20, qu'en ce qu'ici la lettre δ remplace celle γ; & conſéquemment auſſi les deux lettres r & s (§ 19) celles k & l, il ſuffira de faire les mêmes changemens dans les expreſſions de b & c, auxquelles nous ſommes parvenus à cet article; ce qui nous donnera, pour le cas préſent,

$$b = \frac{-\delta q\,(E) + \delta n\,(H) - \chi\,(2rnq - s\varpi)}{\delta\chi mp}, \qquad e = \frac{nq}{mp},$$

$$c = \frac{\delta p\,(E) + \delta m\,(H) - \chi\,(2smp - r\varpi)}{\delta\chi mp}, \qquad g = \frac{-\varpi}{mp}.$$

Subſtituant enſuite ces valeurs dans les ſix premières équations Z (§ 19), & faiſant $rn - sm = \vartheta$, $sp - rq = \varkappa$, on aura pour réſultat les trois paires d'équations ſuivantes

$$\delta\chi\,(B) + \delta\zeta\,(E) + \delta\eta\,(H) - \chi\,(2smhp + 2rngq - [hr + gs]\,\varpi) \begin{cases} -\chi^2\vartheta = 0, \\ -\chi^2\varkappa = 0, \end{cases}$$

$$\partial\chi(\Gamma)+\partial\psi(E)+\partial\omega(H)-\chi(2smlp+2mkq-[lr+ks]\varpi)\begin{cases}-\chi^2(\vartheta\beta-7\delta)=0,\\-\chi^2(\varkappa\beta-\zeta\delta)=0,\end{cases}$$

$$\partial\chi(\Delta)+\partial\varkappa(E)+\partial\vartheta(H)-\chi(2s^2mp+2r^2nq-2rs\varpi)\begin{cases}-\chi^2(\vartheta\gamma-\omega\delta)=0,\\-\chi^2(\varkappa\gamma-\psi\delta)=0,\end{cases}$$

d'où on conclura, comme ci-deſſus, $\varkappa-\vartheta=0$, $\zeta-7=0$ & $\psi-\omega=0$; c'eſt-à-dire, qu'on a d'abord $\beta=\mathrm{f}(\varepsilon+\eta)$, $\gamma=f(\varepsilon+\eta)$, $\delta=F(\varepsilon+\eta)$. Mettant enſuite ces valeurs dans une des deux équations qui conſtituent chaque paire, on aura les trois équations

$$F\mathrm{f}''-2F'\mathrm{f}'-F'=0,$$
$$Ff''-2F'f'+F\mathrm{f}'-F'\mathrm{f}=0,$$
$$FF''-2F'^2+Ff'-F'f=0.$$

Soit encore ici $\mathrm{f}=\mathrm{y}$, $f=\mathrm{z}$, $F=\mathrm{t}$; & multiplions chacune de ces trois équations par $d\mathrm{x}^2$ (§ 21). Elles ſe changeront en... (ae),

$$\mathrm{t}d^2\mathrm{y}-(2d\mathrm{y}+d\mathrm{x})d\mathrm{t}=0,$$
$$\mathrm{t}d^2\mathrm{z}-2d\mathrm{t}d\mathrm{z}+\mathrm{t}d\mathrm{x}d\mathrm{y}-\mathrm{y}d\mathrm{x}d\mathrm{t}=0,$$
$$\mathrm{t}d^2\mathrm{t}-2d\mathrm{t}^2+\mathrm{t}d\mathrm{x}d\mathrm{z}-\mathrm{z}d\mathrm{x}d\mathrm{t}=0.$$

24. J'eſſayerai d'appliquer à ce nouveau ſyſtème la méthode de l'article 21. Ayant donc multiplié la première équation par λ, la ſeconde par μ, & enfin la troiſième par ρ, j'en prens la ſomme; ſavoir ... (af)

$$\rho t d^2 t+\mu t d^2 z+\lambda t d^2 y-2\rho d t^2-2\mu d t d z-2\lambda d t d y-(\lambda-\mu y-\rho z)\,d t d x+\rho t d z d x+\mu t d y d x=0,$$

dont je ſuppoſe que l'intégrale eſt

$$A d\mathrm{t}+B d\mathrm{z}+C d\mathrm{y}+D d\mathrm{x}=\mathrm{m}\,d\mathrm{x}.$$

Différentiant enſuite cette formule & comparant le réſultat terme à terme avec af, j'ai les treize équations . . . (ag)

$A=\rho\mathrm{t}$, $B=\mu\mathrm{t}$, $C=\lambda\mathrm{t}$, $\frac{dA}{dt}=-2\rho$, $\frac{dB}{dz}=0$, $\frac{dC}{dy}=0$, $\frac{dD}{dx}=0$, $\frac{dA}{dz}$

$+\frac{dB}{dt}=-2\mu$, $\frac{dA}{dy}+\frac{dC}{dt}=-2\lambda$, $\frac{dA}{dx}+\frac{dD}{dt}=\rho z+\mu y-\lambda$, $\frac{dB}{dy}+\frac{dC}{dx}=o$, $\frac{dB}{dx}+\frac{dD}{dz}=\rho t$, $\frac{dC}{dx}+\frac{dD}{dy}=\mu t$;

& de la combinaiſon de celles-ci je conclus celles (ah); ſavoir,

des 1, 2 & 8 . . . $t\frac{d\rho}{dz}+t\frac{d\mu}{dt}+3\mu=o$,

des 1, 3 & 9 . . . $t\frac{d\rho}{dy}+t\frac{d\lambda}{dt}+3\lambda=o$,

des 2, 3 & 11 . . . $\frac{d\mu}{dy}+\frac{d\lambda}{dz}=o$,

des 1 & 4 . . . . . $t\frac{d\rho}{dt}+3\rho=o$,

des 1 & 10 . . . . . $\frac{dD}{dt}=\rho z+\mu y-\lambda-t\frac{d\rho}{dx}$,

des 2 & 12 . . . . . $\frac{dD}{dz}=\rho t-t\frac{d\mu}{dx}$, & enfin

des 3 & 13 . . . . . $\frac{dD}{dy}=\mu t-t\frac{d\lambda}{dx}$.

La 4^me^ de ces dernières donne d'abord $\rho=\frac{K}{t^3}$, K étant une fonction indéterminée de x, y & z : ce qui change la première en $t^3\frac{d\mu}{dt}+3t^2\mu+\frac{dK}{dz}=o$, dont l'intégrale, parce que K ne contient pas t, eſt $t^3\mu+t\frac{dK}{dz}=\phi(z, x, y)=G$; & la ſeconde en $t^3\frac{d\lambda}{dt}+3t^2\lambda+\frac{dK}{dy}=o$, dont l'intégrale ſe trouve pareillement $t^3\lambda+t\frac{dK}{dy}=f(z, x, y)=\Gamma$. Ainſi $\rho=\frac{K}{t^3}$, $\mu=\frac{G-t\frac{dK}{dz}}{t^3}$, $\lambda=\frac{\Gamma-t\frac{dK}{dy}}{t^3}$; & ces dernières valeurs transforment la troiſième des mêmes équations en (ai) . . . $\frac{d\Gamma}{dz}+\frac{dG}{dy}-2t\frac{d^2K}{dydz}=o$.

De

De plus, en vertu de la cinquième des équations ag, B & conséquemment μ ou $G - t\frac{dK}{dz}$ ne contient pas z ; on a donc

$$\frac{dG}{dz} - t\frac{d^2K}{dz^2} = 0$$

qui, parce que G ni K ne doivent renfermer t, donne nécessairement $\frac{dG}{dz} = 0$ & $\frac{d^2K}{dz^2} = 0$; c'est-à-dire, G fonction de x, y seulement ; & (ak) . . . $K = z\phi(x, y) + F(x, y)$.

De même, en vertu de la sixième des mêmes équations, C ne contient pas y, non plus que λ ou $\Gamma - t\frac{dK}{dy}$, on a donc, par une raison semblable, $\frac{d\Gamma}{dy} = 0$ & $\frac{d^2K}{dy^2} = 0$; c'est-à-dire, Γ fonction de z, x seulement ; & (al) . . . $K = y\mathit{f}(z, x) + f(z, x)$.

Différentiant d'abord ces deux valeurs de K par z, on déduira de l'égalité des deux résultats,

$$\phi(x, y) = y\frac{d.\mathit{f}(z,x)}{dz} + \frac{d.f(z,x)}{dz};$$

ce qui exige que $\frac{d.\mathit{f}(z,x)}{dz}$ & $\frac{d.f(z,x)}{dz}$ soient chacune en particulier fonction de x seule ; c'est-à-dire que $\mathit{f}(z, x) = zX$ & $f(z, x) = z\xi$. Ainsi par cette première considération, on auroit $K = yzX + z\xi$.

Différentiant de nouveau ces deux mêmes valeurs ak & al par y, on en conclura de la même manière, $K = zyX + y\xi$; & comme ces deux expressions ne peuvent coïncider qu'en supposant $\xi = 0$, on aura enfin, pour celle de K, $K = zyX$.

On tire ensuite des 5, 6 & 7^{me} des équations ah, en y substituant à λ, μ & ρ leurs valeurs, faisant de plus usage de celle que nous venons de trouver pour K, & représentant dX par $X'dx$; on tire, dis-je,

$$\frac{dD}{dt}=[(z^2y-ty^2+tz)X-tzyX'+yG-\Gamma]:t^3,$$

$$\frac{dD}{dz}=(tzyX+t^2yX'-t\frac{dG}{dx}):t^3,$$

$$\frac{dD}{dy}=(-t^2yX+t^2zX'+tG-t\frac{d\Gamma}{dx}):t^3,$$

d'où réſultent les trois équations de condition (am); ſavoir,

par les 1 & 2 . . . . $(4zy+t)X-2\frac{dG}{dx}-\frac{d\Gamma}{dz}=0$,

par les 1 & 3 . . . . $(z^2-3ty)X+y\frac{dG}{dy}+3G-2\frac{d\Gamma}{dx}=0$,

par les 2 & 3 . . . . $zX-\frac{d^2G}{dxdy}+\frac{d^2\Gamma}{dxdz}=0$;

à quoi nous ajouterons celle ai ci-deſſus qui n'a point encore été employée, & qui devient ici (an) . . . $\frac{d\Gamma}{dz}+\frac{dG}{dy}-2tX=0$. Cette dernière différentiée par x donnera, en la combinant avec la troiſième de celles am,

$$2\frac{d^2G}{dxdy}-zX-2tX'=0 \;\&\; 2\frac{d^2\Gamma}{dxdz}+zX-2tX'=0.$$

Or on a déjà vu que G ne contient ni t ni z; il faut donc que X & conſéquemment X' ſoient $=0$; d'où (ao) . . . $\frac{d^2G}{dxdy}=0$ & $\frac{d^2\Gamma}{dxdz}=0$.

Cette ſuppoſition de $X=0$ s'accorde encore avec la ſeptième des équations ag qui indique que D ne doit pas contenir x. En effet, il eſt évident que ſi la fonction X ne ſe réduiſoit pas du moins à une quantité conſtante, l'expreſſion de D ſeroit compliquée de cette variable. Il en ſeroit de même ſi l'une ou l'autre des deux fonctions G, Γ contenoit x : d'où il ſuit néceſſairement que $\frac{dG}{dx}$ & $\frac{d\Gamma}{dx}=0$, ce qui ſatisfait auſſi aux deux équations ao.

Il nous reste encore à réaliser les deux premières équations am qui sont déjà réduites à $\frac{d\Gamma}{dz} = o$ & $y \frac{dG}{dy} + 3G = o$; mais celle-ci se réduit encore à $G = o$, à cause de celle an qui devient $\frac{dG}{dy} = -\frac{d\Gamma}{dz} = o$. Ainsi $G = o$ & Γ, ne contenant ni z ni x qui sont les deux seules variables qu'elle puisse contenir, est conséquemment une constante = h.

On a donc en résumant, X & partant K, ρ & $A = o$: de même G, μ & $B = o$: ensuite $\Gamma = h$, d'où $C = \lambda t = \frac{h}{t^2}$: & on trouvera enfin $D = \int \frac{-h dt}{t^3} = \frac{h}{2t^2}$; c'est-à-dire, qu'il ne reste que l'intégrale de la première équation ae, savoir, $\frac{h}{t^2} dy + \frac{h}{2t^2} dx = m\, dx$ ou $2dy + dx - c^2 t^2 dx = o$; ce qui est analogue à la première équation ac de l'article 21.

25. On peut conclure de là que les deux autres équations qui, conjointement avec cette dernière doivent constituer l'intégrale du système ae ne sont point susceptibles d'une forme aussi simple : & il seroit conséquemment inutile d'étendre mes recherches à des cas plus compliqués. Si je n'ai pas entièrement atteint au but que je m'étois proposé, d'assigner, en termes finis & de la manière la plus complète; la nature de chacun des coëfficiens β, γ, $\delta \ldots \xi$, je suis du moins parvenu à ramener cette détermination aux difficultés connues du calcul intégral ordinaire. D'ailleurs un avantage essentiel qu'offre cette solution, même dans son état d'imperfection, est celui de pouvoir, au moyen des intégrales particulières, former des équations irrégulières pour servir d'exemples dans les différentes questions qui se présenteront.

Pour le cas d'un ſeul coëfficient β, j'ai déterminé en effet la forme la plus générale dont il ſoit ſuſceptible (§ 18). Mais lorſque ces coëfficiens ſont au nombre de deux, β & γ, je me trouve arrêté par une équation du premier ordre ad entre ces deux coëfficiens (§ 22). Ne connoiſſant point pour le préſent de méthode propre à ſurmonter cet obſtacle, je me bornerai à chercher du moins une intégrale particulière de cette même équation.

Pour cela je ſuppoſerai la conſtante $c = 0$, ce qui la changera en (ap) . . . $ydz - y^2dy + mz^2dy + zdy = 0$. Soit maintenant $zy = u$, & elle deviendra $du = -mu^2y^{-2}dy + y^2dy$, qui eſt un cas intégrable de l'équation de *Riccati*, dans laquelle on ſépareroit aiſément les variables, par les méthodes connues. * Mais on parviendra plus ſimplement ici au même but en faiſant, dans l'équation ap elle-même, $z + \frac{1}{m} = ty$. Par là cette équation ſe réduit à $dy = \frac{dt}{1 - h^2t^2}$, h^2 remplaçant, pour plus de facilité, la conſtante linéaire m. On trouvera par les règles ordinaires que l'intégrale de celle-ci eſt ** $2hy = log. \frac{1 + ht}{k(1 - ht)}$, k étant une nouvelle conſtante arbitraire; c'eſt-à-dire, en remettant pour t ſa valeur $\frac{h^2z + 1}{h^2y}$, $k e^{2hy} = \frac{hy + h^2z + 1}{hy - h^2z - 1}$, d'où il ſera aiſé de déduire celle de z en y. Et comme d'ailleurs la même ſuppoſition de $c = 0$ donne, en intégrant la première des deux équations a.c (§ 21), $y = a - \frac{1}{2}x$, on aura y & z en x; c'eſt-à-dire, qu'on connoîtra quelle fonction chacun des deux coëfficiens β & γ eſt de $\varepsilon + \eta$ ou de $\Pi + \Omega$

---

* Traité du calcul intégral par M. *de Bougainville*, ſeconde partie, page 84, art. CXVIII.

** Voyez la note à la fin de la page 133.

(§ 20, 21). L'expreſſion de β eſt à la vérité très-ſimple, $\beta = a - \frac{1}{2}(\Omega + \Pi)$, préciſément comme lorſque ce coëfficient eſt ſeul (§ 18), mais celle du ſecond coëfficient γ eſt très-compliquée; ſavoir, (aq).... $\gamma = \frac{(ke^{2hy} - 1)hy - (ke^{2hy} + 1)}{h^2(ke^{2hy} + 1)}$, où il ne faut plus que ſubſtituer à y la valeur que nous venons de trouver pour β. Il eſt aiſé de juger, d'après le réſultat que donne la ſuppoſition de $c = 0$, combien cette expreſſion eût été compliquée dans l'hypothèſe générale.

On peut obtenir une expreſſion de γ beaucoup plus ſimple, en ſuppoſant, dans l'équation ad (§ 22), non ſeulement c, mais encore m égal à zéro. Elle ſe réduit alors à $y\,dz + z\,dy - y^2\,dy = 0$, dont l'intégrale eſt $zy = k + \frac{1}{3}y^3$, y étant toujours donnée par $y = a - \frac{1}{2}x$; c'eſt-à-dire, qu'il réſultera, pour le cas de deux coëfficiens β & γ, $\beta = a - \frac{1}{2}(\Omega + \Pi)$, $\gamma = \frac{k + \beta^3}{3\beta}$.

Quant à celui de trois coëfficiens β, γ, δ, il s'agiroit d'intégrer le ſyſtème ae (§ 23), afin d'en déduire les expreſſions complètes de ces trois fonction. En ſe contentant encore ici de la valeur particulière de $y = a - \frac{1}{2}x$, on obtiendroit deux valeurs correſpondantes particulières de γ & δ; mais qui relativement à cette hypothèſe ſeroient complètes; & enfin on trouveroit ici, comme nous venons de faire dans le cas de deux coëfficiens ſeulement, une expreſſion particulière encore plus limitée de γ & δ.

26. Le tableau ſuivant préſentera un réſumé de ces différens réſultats, où on ſe ſouviendra que Ω & Π ſont la même choſe que η & ε.

I. *Pour un seul coèfficient* β.

Valeur complète,

$$\beta = \frac{a + e^{c(\Omega+\Pi)}}{c\left(a - e^{c(\Omega+\Pi)}\right)}.$$

Valeur particulière,

$$\beta = a - \frac{\Omega+\Pi}{2}.$$

II. *Pour deux coèfficiens* β, γ.

Valeurs complètes,

β *inconnue*, γ *inconnue.*

Valeurs particulières,

$$\beta = a - \frac{\Omega+\Pi}{2} \left\{ \begin{array}{l} \text{Valeur relat. complète... (ar)} \\ \gamma = \dfrac{k e^{2h\left(a - \frac{\Omega+\Pi}{2}\right)} \left(h\left[a - \frac{\Omega+\Pi}{2}\right] - 1\right) - h\left(a - \frac{\Omega+\Pi}{2}\right) - 1}{h^2 \left(k e^{2h\left(a - \frac{\Omega+\Pi}{2}\right)} + 1\right)} \\ \text{Valeur relat. particulière... (ar2)} \\ \gamma = \dfrac{k + \left(a - \frac{\Omega+\Pi}{2}\right)^3}{3\left(a - \frac{\Omega+\Pi}{2}\right)} \end{array} \right.$$

III. *Pour trois coèfficiens* β, γ, δ.

Valeurs complètes,

β *inconnue*, γ *inconnue*, δ *inconnue.*

Valeurs particulières,

$$\beta = a - \frac{\Omega+\Pi}{2} \left\{ \begin{array}{l} \text{Valeurs relat. complètes,} \\ \gamma \text{ inconnue, } \delta \text{ inconnue;} \\ \text{Valeurs relat. particulières,} \\ \gamma \text{ inconnue, } \delta \text{ inconnue.} \end{array} \right.$$

Je crois avoir suffisamment développé dans ces deux chapitres, tout ce qui concerne la formation des équations *irrégulières* & la nature des différentes fonctions qui constituent les formules finies dont elles dérivent. Je vais présentement m'occuper de la recherche des méthodes nécessaires pour parvenir à l'intégration de ce même genre d'équations.

CHAPITRE TROISIÈME.

Méthode d'intégration pour les équations irrégulières simples.

27. On a vu (§ 5) que la formule générale des équations irrégulières du second ordre entre trois variables est... (E2)

$$\frac{d^2\Psi}{dy^2} + g\frac{d^2\Psi}{dxdy} + e\frac{d^2\Psi}{dx^2} + c\frac{d\Psi}{dy} + b\frac{d\Psi}{dx} = 0,$$

Ψ étant une fonction quelconque de z, x & y. Soit donc $d\Psi = Adz + Bdx + Ddy$; c'est-à-dire, $\frac{d\Psi}{dx} = A\frac{dz}{dx} + B$, $\frac{d\Psi}{dy} = A\frac{dz}{dy} + D$. De plus A, B, D pouvant aussi contenir z, soient

$dA = Gdz + Hdx + Idy$; $\frac{dA}{dx} = G\frac{dz}{dx} + H$; $\frac{dA}{dy} = G\frac{dz}{dy} + I$;

$dB = Hdz + Kdx + Ldy$; $\frac{dB}{dx} = H\frac{dz}{dx} + K$; $\frac{dB}{dy} = H\frac{dz}{dy} + L$;

$dD = Idz + Ldx + Mdy$; $\frac{dD}{dx} = I\frac{dz}{dx} + L$; $\frac{dD}{dy} = I\frac{dz}{dy} + M$;

d'où
$$\frac{d^2\Psi}{dy^2} = A\frac{d^2z}{dy^2} + G\frac{dz^2}{dy} + 2I\frac{dz}{dy} + M,$$
$$\frac{d^2\Psi}{dxdy} = A\frac{d^2z}{dxdy} + G\frac{dz}{dx}\frac{dz}{dy} + H\frac{dz}{dy} + I\frac{dz}{dx} + L,$$
$$\frac{d^2\Psi}{dx^2} = A\frac{d^2z}{dx^2} + G\frac{dz^2}{dx} + 2H\frac{dz}{dx} + K.$$

La ſubſtitution de ces valeurs changera la formule ci-deſſus en . . . (ar)

$$A\frac{d^2z}{dy^2}+gA\frac{d^2z}{dxdy}+eA\frac{d^2z}{dx^2}+G\left(\frac{dz^2}{dy}+g\frac{dz}{dx}\frac{dz}{dy}+e\frac{dz^2}{dx}\right)+(2I+gH+cA)\frac{dz}{dy}+(gI+2eH+bA)\frac{dz}{dx}+M+gL+eK+cD+bB=o:$$

& c'eſt en la comparant terme à terme avec la propoſée qu'on en déterminera toutes les quantités inconnues. On ſent que cette comparaiſon exige que la propoſée ne renferme d'autres différences partielles du premier ordre que les $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$ contenues d'une manière viſible, dans cette formule. C'eſt cette reſtriction qui caractériſe ce que je nomme ici équations *ſimples*, par oppoſition à celles qui, contenant ces mêmes différences d'une manière quelconque, ne permettent plus de diſtinguer aucun des termes des ordres inférieurs. On verra aiſément que cette condition aura lieu toutes les fois que Ω & Π, ou ce qui eſt la même choſe, η & ε, auſſi bien que ϵ, γ, δ, &c. ne renfermeront point la variable principale z.

28. Nous prendrons, pour premier exemple, l'équation

$$(1-e^{2x})zy\frac{d^2z}{dy^2}-2(1-e^{2x})zy\frac{d^2z}{dx^2}+(1-e^{2x})y\left(\frac{dz^2}{dy}-2\frac{dz^2}{dx}\right)+(1-e^{2x})2z\frac{dz}{dy}+8e^{x}zy\frac{dz}{dx}-6x(1-e^{2x})+12x^2e^{x}=o.$$

L'ayant multipliée par le facteur indéterminé ω, nous aurons $A= \omega(1-e^{2x})zy$; $g=\frac{gA}{A}=o$; $e=\frac{eA}{A}=-2$: & au moyen de ces déterminations nous conclurons; ſoit des valeurs générales de g & e (§ 17); ſoit des équations $\phi^{\nu+2}$, $F^{\nu+2}$ elles-mêmes (§ 19),

$$\varepsilon=\phi(x\pm y\sqrt{2});\ \eta=F(x\pm y\sqrt{2});$$

c'eſt-à-dire, $\eta=x+y\sqrt{2}$, $\varepsilon=x-y\sqrt{2}$. De là $m=1$, $n=-\sqrt{2}$, $p=1$,

$p = 1$, $q = \sqrt{2}$. Nous avons de plus $G = \omega(1 - e^{2x})y = \frac{dA}{dz}$ $= \omega(1 - e^{2x})y + zy(1 - e^{2x})\frac{d\omega}{dz}$: ainsi $\frac{d\omega}{dz} = 0$, & ω eſt une fonction de x & y ſeulement. Mettant enſuite dans (E), (H) (§ 17) les valeurs de ε & η, ces expreſſions ſe réduiſent toutes les deux à zéro : & par la même opération χ devient $= 2\sqrt{2}$, $\varpi = 0$, & enfin $b = \frac{16ace^{2cx}}{a^2 - e^{4cx}}$ & $c = 0$ (§ 17) ; car il eſt naturel de faire le premier eſſai ſur la formule la plus ſimple, celle qui ne contient qu'un ſeul coèfficient $\mathfrak{C} = \frac{a + e^{c(\Omega+\Pi)}}{c(a - e^{c(\Omega+\Pi)})}$ (§ 26). La comparaiſon du terme $\frac{dz}{dy}$ donne encore

$$I = \omega(1 - e^{2x})z = \frac{dA}{dy} = \omega(1 - e^{2x})z + (1 - e^{2x})yz\frac{d\omega}{dy};$$

d'où $\frac{d\omega}{dy} = 0$, & ω ſe réduit à une fonction X de x ſeule. Quant au terme $\frac{dz}{dx}$, il nous fournit, en mettant pour A ſa valeur ci-deſſus, l'expreſſion de H ou $\frac{dA}{dx}$; & au moyen de celles $\frac{dA}{dz}$ & $\frac{dA}{dy}$ que nous avons déjà trouvées, nous conclurons enfin

$$dA = X\left(\overline{1 - e^{2x}}[ydz + zdy] + \left[\frac{4ace^{2cx}(1 - e^{2x})zy}{a^2 - e^{4cx}} - 2e^x zy\right]dx\right).$$

Cette fonction différentielle à trois variables ſatisfait à la vérité à la condition d'intégrabilité, & on voit tout de ſuite qu'il ſuffit, pour l'intégrer, de la diviſer par $(1 - e^{2x})zy$. Mais comme le facteur X ne doit contenir ici ni z ni y, on verra auſſi qu'on ne peut ſe conformer à cette reſtriction, qu'en rendant le coèfficient de dx

égal à zéro, X étant alors $= \frac{const.}{1-e^{2x}}$. Nous ferons donc $a^2 - e^{4cx} = 1 - e^{2x}$ & $4ace^{2cx} = 2e^x$, ce qui exige que $a = 1$ & $c = \frac{1}{2}$. Cette valeur du facteur ω, en prenant la constante arbitraire $= 2$, nous donne enfin, pour celle de A, $A = 2zy$. Ainsi $\Psi = \int A dz + G$ (G est une fonction inconnue de x & y) sera $= \int 2zy dz + G = z^2 y + G$. On aura aussi, pour le coèfficient $\mathcal{E}$ (§. 17), $\mathcal{E} = \frac{2+2e^x}{1-e^x}$: ainsi on connoît tout excepté la fonction G, & c'est par le terme sans différence partielle qu'on doit parvenir à la connoître.

Remarquons d'abord pour cela, que Ψ étant $= z^2 y + G$, on a

$$\frac{d\Psi}{dx} = B = \frac{dG}{dx};\ \frac{d\Psi}{dy} = D = z^2 + \frac{dG}{dy};$$

& conséquemment $M = \frac{dD}{dy} = \frac{d^2G}{dy^2}$, $K = \frac{d^2G}{dx^2}$, $L = \frac{d^2G}{dxdy}$; de sorte que le terme sans différence partielle, à cause de $g = 0$, $e = -2$, $c = 0$ & $b = \frac{8e^x}{1-e^{2x}}$, & parce que d'ailleurs on a multiplié la proposée par le facteur $\omega = \frac{2}{1-e^{2x}}$, donnera, pour déterminer G, l'équation

$$\frac{d^2G}{dy^2} - 2\frac{d^2G}{dx^2} + \frac{8e^x}{1-e^{2x}}\frac{dG}{dx} - \frac{24x^2e^x}{1-e^{2x}} + 12x = 0,$$

à laquelle il suffit de satisfaire. Le moyen qui se présente le plus naturellement est d'égaler entr'eux les 3^{me} & 4^{me} termes, d'où on conclut $\frac{dG}{dx} = 3x^2$: & comme il résulteroit ultérieurement de là $-2\frac{d^2G}{dx^2} + 12x = 0$ & $\frac{d^2G}{dy^2} = 0$, on est sûr que $G = x^3$ est la véritable valeur de G. On a donc enfin, pour l'intégrale demandée,

$$z^2 y + x^3 = \phi(x - y\sqrt{2}) + F(x + y\sqrt{2}) + \frac{2 + 2e^x}{1 - e^x}\left(\phi'(x - y\sqrt{2}) + F'(x + y\sqrt{2})\right).$$

29. Si la propofée étoit

$$(2 - x)zy\frac{d^2z}{dy^2} - (2 - x)2zy\frac{d^2z}{dx^2} + (2 - x)y\left(\frac{dz^2}{dy} - 2\frac{dz^2}{dx}\right) + (2 - x)2z\frac{dz}{dy} - 4zy\frac{dz}{dx} - 12x = 0,$$

on trouveroit $A = (2 - x)\omega zy$, $g = 0$, $e = -2$, $G = (2 - x)\omega y$; & on concluroit encore $\frac{d\omega}{dz} = 0$ & $\omega = F(x, y)$. Quant aux fonctions ε & η; elles feroient les mêmes que dans l'art. précédent, auffi-bien que m, n, p, q, b & c. On auroit de plus $I = \frac{dA}{dy} = (2 - x)z\omega$, ce qui donneroit de nouveau $\frac{d\omega}{dy} = 0$, & $\omega = X$. Enfin la valeur de $H = \frac{dA}{dx}$ feroit $\left(\frac{4ace^{2cx}(2 - x)}{a^2 - e^{4cx}} + 1\right)zyX$: & comme, par la même raifon que ci-deffus, ce coëfficient de dx dans la valeur de dA doit s'anéantir, on feroit $4ace^{2cx}(2 - x) + a^2 - e^{4cx} = 0$; ce qui ne peut avoir lieu qu'autant que $c = 0$ & $a^2 = 1$. Mais il réfultera de la fubftitution de ces valeurs dans b, $b = \frac{0}{0}$: & β fe change en $\beta = \infty$ ou $\beta = \frac{0}{0}$, felon qu'on prendra $a = +1$ ou $a = -1$. C'eft donc ici le cas d'employer la valeur particulière $\beta = a - \frac{1}{2}(\Omega + \Pi) = a - x$, ce qui donnera $b = \frac{-4}{a - x}$ & $c = 0$. Alors $\frac{dA}{dx}$ fera $= \left(1 - \frac{2 - x}{a - x}\right)zyX$, que la fuppofition de $a = 2$ rend évidemment égal à zéro. On aura donc enfin ici, pour valeur de β, $\beta = 2 - x$; & l'intégrale de cette feconde propofée ne différera de la précédente que par cette fonction coëfficiente.

30. Suppofons maintenant qu'on ait à intégrer . . . (a s)

$$(xy-1)\left(x^2y^2\frac{d^2z}{dy^2}-2x^3y\frac{d^2z}{dxdy}+(x^2-1)x^2\frac{d^2z}{dx^2}\right)+2(x^4y+2x^2y-x^3-x)\frac{dz}{dx}+2z(1-2xy)=0.$$

On trouve d'abord $A=(xy-1)x^2y^2\omega$; $g=-\frac{2x}{y}$, $e=\frac{x^2-1}{y^2}$. Donc ε & $\eta=f(xy\pm y)$; c'est-à-dire, ε ou $\Pi=xy+y$, η ou $\Omega=xy-y$: d'où $m=y$, $n=x+1$, $p=y$, $q=x-1$. De plus $G=0=\frac{dA}{dz}$ qui, en différentiant en effet A par z, donne $\frac{d\omega}{dz}=0$ & ω égale à une fonction de x & y feulement. On a aussi (E) = (H) $=-\varpi$ (§ 17) $=-2xy$; $\chi=-2y$; & enfin, en effectuant les substitutions indiquées dans les expressions de b & c du même article, ou pour plus de facilité, dans les suivantes où j'ai mis, à la place de ϵ, sa valeur générale complète $\frac{a+e^{c(\Omega+\Pi)}}{c[a-e^{c(\Omega+\Pi)}]}$; savoir, ... (at)

$$b=\frac{[a^2-e^{2c(\Omega+\Pi)}][n(H)-q(E)]-2ac\chi^2(n-q)e^{c(\Omega+\Pi)}}{mp\chi[a^2-e^{2c(\Omega+\Pi)}]},$$

$$c=\frac{[a^2-e^{2c(\Omega+\Pi)}][p(E)-m(H)]-2ac\chi^2(p-m)e^{c(\Omega+\Pi)}}{mp\chi[a^2-e^{2c(\Omega+\Pi)}]},$$

on conclura $b=\frac{2x(a^2-e^{4cxy})+8acye^{2cxy}}{y^2(a^2-e^{4cxy})}$ & $c=0$.

La comparaison des termes $\frac{dz}{dy}$ donne ensuite $y\frac{dA}{dy}-x\frac{dA}{dx}=0$, d'où A & conséquemment $\omega=f(xy)$. D'un autre côté celle des termes $\frac{dz}{dx}$ donne

$$(x^2-1)\frac{dA}{dx}-xy\frac{dA}{dy}+\frac{x(a^2-e^{4cxy})+4acye^{2cxy}}{a^2-e^{4cxy}}A=\omega xy^2(x^3y+2xy-x^2-1);$$

De ces deux dernières équations, en mettant pour A ſa valeur ci-deſſus, nous déduirons celles de $\frac{dA}{dx}$ & $\frac{dA}{dy}$: & parce que $\frac{dA}{dz} = 0$, nous conclurons enfin, pour l'expreſſion de dA,

$$dA = (ydx + xdy)\left(xy - 2x^2y^2 + \frac{4acye^{2cxy}}{a^2 - e^{4cxy}}\right)\omega.$$

Il eſt évident que, pour rendre cette expreſſion une différentielle exacte, il faut d'abord faire en ſorte que toute la quantité compriſe entre les parenthèſes devienne une fonction de xy ſeulement; puiſque, d'après ce que nous avons vu un peu plus haut, ω doit être auſſi une pareille fonction. Or cette condition ne peut avoir lieu qu'autant que c ſeroit $= 0$, a ayant toute autre valeur que ± 1, ſans quoi l'expreſſion deviendroit indéterminée & $= \frac{0}{0}$. Mais comme cette ſuppoſition de $c = 0$ rend β infinie, on peut être sûr que l'intégrale de la propoſée n'eſt point ſuſceptible d'une pareille forme.

31. Nous eſſayerons donc d'y appliquer la formule ſuivante (§ 26); c'eſt-à-dire, celle qui contient deux coëfficiens β, γ. Mais n'étant pas parvenus à déterminer les valeurs complètes de ces coëfficiens, nous ne pourrons qu'employer leurs valeurs particulières. Dans cette vue, nous reprendrons la ſolution précédente, jusqu'à l'endroit de la détermination des expreſſions b & c, que nous ne déduirons plus des formules de l'art. 17 relatives au cas de β ſeul, mais de celles de l'art. 20 qui ſe rapportent au cas préſent de deux pareils coëfficiens β, γ. Nous avons ici $\frac{1}{2}(\Omega + \Pi) = xy$: afin de ſimplifier l'expreſſion de γ provenant de cette ſubſtitution dans la formule ar, ſoit $a - xy = \rho$, & nous en conclurons

$$d\gamma = \frac{k^2 e^{4h\rho} + 4hke^{2h\rho}\rho - 1}{h(ke^{2h\rho}+1)^2} d\rho.$$

Repréſentons ce coèfficient de $d\rho$ par W; nous aurons, à cauſe de $\frac{d\rho}{dx} = -y$ & de $\frac{d\rho}{dy} = -x$, $\frac{d\gamma}{dx} = k$ (§ 6) $= -Wy$; $\frac{d\gamma}{dy} = l = -Wx$. Ainſi $kx = ly$; $2knq - l\varpi$ (§ 20) $= -2k$; & parce que

$$\gamma = \frac{(ke^{2h\rho}-1)h\rho - (ke^{2h\rho}+1)}{h^2(ke^{2h\rho}+1)},$$

on parviendra enfin aux valeurs $c = 0$, &

$$b = 2\frac{\left([k^2e^{4h\rho}-1]h\rho - [ke^{2h\rho}+1]^2\right)x - \left(hk^2e^{4h\rho} + 4h^2k\rho e^{2h\rho} - h\right)y}{\left([k^2e^{4h\rho}-1]h\rho - (ke^{2h\rho}+1)^2\right)y^2}.$$

De la comparaiſon des termes $\frac{dz}{dy}$ il réſulte encore ici $y\frac{dA}{dy} - x\frac{dA}{dx} = 0$, d'où $\omega = f(xy)$. Celle des termes $\frac{dz}{dx}$, en nommant $\frac{2V}{y^2}$ cette valeur de b, donne

$$(x^2-1)\frac{dA}{dx} - xy\frac{dA}{dy} + V(xy-1)x^2y^2\omega = (x^4y^3 + 2x^2y^3 - x^3y^2 - xy^2)\omega.$$

Enfin de ces deux équations, & de ce que $\frac{dA}{dz} = 0$, on conclut

$$dA = (ydx + xdy)[V(x^2y - x) - x^3y - 2xy + x^2 + 1]\omega xy.$$

Nous avons vu que ω doit être une fonction de xy ſeulement: ainſi cette expreſſion de dA ne peut être une différentielle exacte, qu'autant que $V(x^2y - x) - x^3y - 2xy + x^2 + 1$ ſera une pareille fonction; ou plus ſimplement, que $V(x^2y - x) - x^3y + x^2 = f(xy)$. Si on fait $f(xy) = 0$, il en réſultera $V = x$, $b = \frac{2x}{y^2}$; donc $h = 0$ & γ ſera $= \frac{-1}{0^2} = -\infty^2$, ce qui eſt abſurde. Mais en faiſant $f(xy) = xy$, on aura

$$V = \frac{x^2y+y-x}{xy-1} \;\&\; b = 2\,\frac{x^2y+y-x}{xy^3-y^2};$$

ce qui exige que $k=0$, & $ha+1=h$, $a=\frac{h-1}{h}$. On aura de plus $dA=\omega xy\,(1-xy)\,(ydx+xdy)$, expreffion qui fera toujours intègrable, pourvu que ω foit une fonction de xy. Faifons $xy=\vartheta$, elle devient $dA=\omega\vartheta d\vartheta-\omega\vartheta^2 d\vartheta$. Maintenant afin de déterminer la feule véritable valeur de ω, prenons celle de A en y faifant la même fubftitution de $xy=\vartheta$. Elle fe changera en $A=(\vartheta^3-\vartheta^2)\,\omega$, & par la différentiation nous en déduirons $dA=(3\vartheta^2-2\vartheta)\,\omega d\vartheta+(\vartheta^3-\vartheta^2)\,d\omega$. Comparant donc ces deux valeurs de dA, réduifant & multipliant enfuite par ϑ, nous aurons enfin $4\omega\vartheta^3 d\vartheta-3\omega\vartheta^2 d\vartheta+(\vartheta^4-\vartheta^3)\,d\omega=0$ dont l'intégrale eft $(\vartheta^4-\vartheta^3)\,\omega=$ *conft.*; c'eft-à-dire, que $\omega=\frac{1}{(xy-1)x^3y^3}$ Il fuit de là que $A=\frac{1}{xy}$, $\Psi=\int A dz+G$ (§ 28) $=\frac{1}{xy}+G$, & en faifant les mêmes raifonnemens qu'à l'article que je viens de citer, on parviendra, par la comparaifon des deux termes fans différence partielle, à l'équation

$$\frac{d^2G}{dy^2}-\frac{2x}{y}\frac{d^2G}{dxdy}+\frac{x^2-1}{y^2}\frac{d^2G}{dx^2}+2\,\frac{x^2y+y-x}{xy^3-y^2}\frac{dG}{dx}=0$$

à laquelle il fuffit de fatisfaire; ce qui fe réduit ici à faire $G=$ *conft.*, ou plutôt $=0$. On a enfuite $\gamma=\frac{xy-1}{h}$, $\epsilon=\frac{h-1}{h}-xy$, & enfin l'intégrale de la propofée eft

$$\frac{1}{xy}=\Phi(xy+y)+F(xy-y)+\left(\frac{h-1}{h}-xy\right)(\Phi'+F')+\left(\frac{xy-1}{h}\right)(\Phi''+F'').$$

32. Au lieu de recourir immédiatement à la formule qui contient deux coëfficiens ϵ, γ, peut-être aurions nous dû effayer d'abord la valeur particulière de ϵ qui devient ici $a-xy$. Nous allons donc

reprendre cette opération dont le résultat nous fera appercevoir une singularité qui au premier aspect pourroit paroître embarrassante. Nous avons, par notre nouvelle supposition, $g = -y$, $h = -x$, & les formules de l'article 17 deviennent $b = 2\,\frac{ax - x^2y - y}{(a - xy)y^2}$, & $c = 0$. On conclut ensuite ultérieurement $dA = \omega xy(ydx + xdy)$ $\frac{x^2y^2 - 2axy + a}{a - xy}$; & comparant cette valeur à celle qui dérive de la différentiation de $A = (xy - 1)\,x^2y^2\omega$, on parviendra au résultat $(\vartheta^3 - [a + 1]\,\vartheta^2 + a\vartheta)\,d\omega - (5a\vartheta - 4\vartheta^2 + 2\vartheta - 3a)\,\omega d\vartheta = 0$, où j'ai fait $xy = \vartheta$, & qui multiplié par $\frac{\vartheta^3 - \vartheta^2}{(\vartheta - a)^2}$ & intégré donne $\omega = \frac{(a - xy)\,C}{(xy - 1)^2 x^3 y^3}$. On a donc $A = \frac{(a - xy)\,C}{(xy - 1)xy}$ & $\Psi = \int A dz + G = \frac{(a - xy)\,Cz}{(xy - 1)\,xy} + G$, G étant toujours fonction de x & y seulement. Prenant ensuite de là les valeurs de B, D, K, L, M, on a, par la comparaison des termes sans différence partielle, en se souvenant que toute la proposée a été multipliée par ω,

$$y^2\frac{d^2G}{dy^2} - 2xy\frac{d^2G}{dxdy} + (x^2 - 1)\frac{d^2G}{dx^2} + 2\,\frac{ax - x^2y - y}{a - xy}\,\frac{dG}{dx} + 2Czy^2\,\frac{2axy - 2xy - a^2 + 1}{(xy - 1)^3(a - xy)\,xy} = 0.$$

On voit aussitôt que, G ne contenant pas z, cette équation est absurde tant que le dernier terme, où cette variable se trouve, n'est pas égal à zéro. Or il peut devenir tel de deux manières ; 1°. en faisant $C = 0$; & 2°. en faisant $a = 1$.

Le premier cas réduiroit le facteur ω à zéro, & conséquemment ne nous apprend rien.

Le second change l'équation précédente en une transformée à laquelle on satisfait évidemment en supposant $G = 0$. On a donc ici,

ici, pour intégrale complète de la proposée as (§ 30), en faisant, ce qui est parfaitement arbitraire, la constante $C = -1$, on a, dis-je,

$$\frac{1}{xy} = \phi(xy + y) + F(xy - y) + (1 - xy)(\phi' + F'),$$

intégrale bien différente en apparence de celle que nous avons trouvée précédemment pour la même équation.

33. Pour parvenir à découvrir la raison d'un résultat aussi peu attendu, examinons avec attention la formule E2 (§ 27) qui s'étend généralement à toutes les équations irrégulières. Nous y voyons d'abord les différences partielles de la fonction principale Ψ, & de plus, les quatre coèfficiens b, c, e, g, dont les deux derniers n'ont de rapport qu'avec les fonctions secondaires ε & η ou Π & Ω. Quant aux deux premiers, ils dépendent en partie des fonctions coèfficientes β, γ, δ, &c.; ou du moins de la dernière de ces fonctions contenue dans l'intégrale d'où ils sont déduits. Ainsi, lorsque cette intégrale ne renferme que β, les coèfficiens b & c sont compliqués de cette seule fonction aussi-bien que de ses différences partielles du premier ordre; lorsqu'elle en renferme deux β & γ, b & c conservent exactement leur même forme, hors que γ remplace par-tout β; & ainsi de suite. Conséquemment toutes les fois que les expressions de b & c en β seront les mêmes que celles en γ, on obtiendra, tant de l'intégrale à un seul coèfficient β, que de celle à deux coèfficiens β, γ, une seule & même équation aux différences partielles; c'est-à-dire que l'équation, qui dérive de l'une ou de l'autre, aura deux intégrales différentes comme nous venons de voir dans l'article précédent.

Mais dans quelles circonstances ces différentes expressions de b

& de c viendront-elles à coïncider ? Il est évident qu'il suffit pour cela que $\frac{k}{\gamma} = \frac{g}{\epsilon}$ & $\frac{l}{\gamma} = \frac{h}{\epsilon}$; c'est-à-dire, que $\gamma \frac{d\epsilon}{dx} - \epsilon \frac{d\gamma}{dx} = o$ & $\gamma \frac{d\epsilon}{dy} - \epsilon \frac{d\gamma}{dy} = o$; & conséquemment, en multipliant la première de ces deux équations par dx, la seconde par dy, & prenant leur somme, que $\gamma d\epsilon - \epsilon d\gamma = o$, & enfin en intégrant que $\frac{\epsilon}{\gamma} = const.$ Il suit de là que, toutes les fois que dans une intégrale à deux coëfficiens ϵ, γ, ce dernier pourra être proportionnel au coëfficient unique ϵ d'une autre intégrale, Ψ, ϵ & η étant les mêmes, ces deux intégrales appartiendront simultanément à une même proposée.

Il nous reste à examiner si la forme que nous avons assignée à ces différens coëfficiens est effectivement compatible avec cette proportionnalité. Pour cela, considérons le tableau de l'art. 26, Nous y voyons que la valeur relativement complète ar de γ, k étant zéro, se réduit à $-\left(\frac{1 + h\alpha - \frac{1}{2} h (\Omega + \Pi)}{h^2}\right)$. D'un autre côté la valeur particulière de ϵ, dans le cas d'un seul coëfficient, est $a - \frac{1}{2}(\Omega + \Pi)$ où je mets a au-lieu de α, parce que ces deux constantes, appartenant à deux formules différentes, sont indépendantes l'une de l'autre. Or pour rendre ces deux valeurs proportionnelles, il suffit de faire $\frac{1}{h} + \alpha = a$, puisqu'elles deviendront alors ; la première $\gamma = -\frac{1}{h}\left(\frac{1}{h} + \alpha - \frac{1}{2}[\Omega + \Pi]\right)$; & la seconde $\epsilon = \frac{1}{h} + \alpha - \frac{1}{2}(\Omega + \Pi)$, qui sont entr'elles dans la raison de $-1 : h$. Ainsi, lorsque quelque proposée aura une intégrale à un seul coëfficient contenu dans cette formule de ϵ, elle en aura nécessairement une seconde à deux coëfficiens ϵ, γ, dont le dernier sera également

compris dans la formule de γ, le premier l'étant dans celle $\beta = a - \frac{1}{2}(\Omega + \Pi)$; & réciproquement, lorsqu'une proposée aura une intégrale à deux coèfficiens β & γ, dont le dernier soit de la forme $\gamma = -\frac{1}{h}\left(\frac{1}{h} + a - \frac{1}{2}[\Omega + \Pi]\right)$, elle en aura nécessairement une autre à un seul coèfficient représenté par $\beta = \frac{1}{h} + a - \frac{1}{2}(\Omega + \Pi)$.

Dans notre exemple (§ 32) nous avons $\beta = 1 - xy$, ce qui est un cas particulier de l'expression générale $\beta = \frac{1}{h} + a - \frac{1}{2}(\Omega + \Pi)$, en y faisant $a = \frac{h-1}{h}$ & $\frac{1}{2}(\Omega + \Pi) = xy$. Ainsi, dans l'intégrale à deux coèfficiens, on doit avoir $\gamma = \frac{xy-1}{h}$, $\beta = \frac{h-1}{h} - xy$; précisément comme nous l'avons trouvé (§ 31).

Si au contraire on a commencé par déterminer l'intégrale à deux coèfficiens (§ 31) où $\beta = \frac{h-1}{h} - xy$ & $\gamma = \frac{xy-1}{h}$, on aura une seconde intégrale à un seul coèfficient $\beta = 1 - xy$, puisque β doit être à γ comme h : −1.

De même, on sait que l'équation *à la propagation du son*

$$x^2 \frac{d^2 z}{dy^2} - 2b^2 x^2 \frac{d^2 z}{dx^2} - 4b^2 x \frac{dz}{dx} + 4b^2 z = 0$$

a pour intégrale complète

$$zx^2 = \phi(x + by\sqrt{2}) + F(x - by\sqrt{2}) - x(\phi' + F')\ *.$$

β est ici $= -x$; donc $\frac{1}{h} + a = 0$ ou $a = -\frac{1}{h}$; & cette même équation aura une seconde intégrale à deux coèfficiens $\gamma = \frac{x}{h}$ & $\beta = -\frac{1}{h} - x$.

* Voyez leçons de calcul différ. & intég. par M. *Cousin*, tome 2, page 696, édit. de 1777 ; ou art. 519 de l'édit. in-4°.

34. Il n'eſt pas vraiſemblable que cette multiplicité d'intégrales appartienne excluſivement à quelques cas ſinguliers : du moins l'analogie nous autoriſe à penſer le contraire. Mais il ſemble juſqu'ici que nous ne pourrions avoir quelque certitude à cet égard, qu'en connoiſſant toutes les formes de chacun des coëfficiens de β, γ, δ . . . ξ. Nous voyons, par exemple, que la valeur particulière de β dans la première formule (§ 26) a toujours ſa co-proportionnelle dans la valeur particulière ar de γ, en faiſant dans celle-ci k = o. N'eſt-ce pas une induction bien naturelle que de ſuppoſer que, ſi nous étions parvenus à déterminer les valeurs complètes de γ, nous y trouverions également des co-proportionnelles à la valeur complète de β de la première formule ? Dès-lors la propriété d'avoir pluſieurs intégrales appartiendroit également à toutes les équations irrégulières qui en auroient déjà une à un ſeul coëfficient β. Pareillement nous trouverions peut-être que les valeurs, tant complète que relativement complète & relativement particulière de γ dans la ſeconde des mêmes formules, ont leurs co-proportionnelles renfermées dans les valeurs analogues de δ, qui appartiennent à la troiſième. Alors toute équation irrégulière, ayant une intégrale complète à deux coëfficiens β, γ, en auroit une ſeconde à trois coëfficiens β, γ, δ ; & ainſi de-ſuite. Nous n'avons même aucune raiſon de borner à deux le nombre de ces intégrales ; puiſque chaque valeur de β, par exemple, pourroit avoir d'autres co-proportionnelles dans les coëfficiens δ . . . ξ.

Une queſtion eſſentielle qui nous reſte encore à examiner, c'eſt de ſavoir ſi ces intégrales ſont réellement différentes, ou ſi ce ne ſont que des formes différentes d'une même intégrale ; c'eſt-à-dire,

ſi par exemple, (§ 33)

$$\Psi = \phi : \varepsilon + \mathrm{F} : \eta + \left(\frac{1}{h} + a - \frac{\varepsilon + \eta}{2}\right)(\phi' + F');$$

& $\Psi = \mathrm{F} : \varepsilon + \mathrm{f} : \eta + \left(a - \frac{\varepsilon + \eta}{2}\right)(\mathrm{F}' + \mathrm{f}') - \frac{1}{h}\left(\frac{1}{h} + a - \frac{\varepsilon + \eta}{2}\right)(\mathrm{F}'' + \mathrm{f}'');$

où j'employe les deux nouveaux ſymboles F & f pour déſigner que ces fonctions ſont indépendantes de celles ϕ & F de la première valeur; ſi, dis-je, ces deux expreſſions de Ψ ſont réellement des intégrales diſtinctes, ou ſi elles ne diffèrent entr'elles que par la forme. Dans cette dernière hypothèſe, toutes les valeurs particulières qu'on pourroit déduire de l'une devroient être également contenues dans l'autre; & conſéquemment, en égalant entr'elles ces deux expreſſions de Ψ, on feroit aſſuré que, pour chaque détermination des fonctions F & f, par exemple, on trouveroit une forme correſpondante pour chacune de celles ϕ & F, telle qu'il en réſultât en effet l'égalité ſuppoſée, ou ce qui eſt la même choſe, telle que cette équation devînt identique.

35. Cette queſtion appartient à un genre de problèmes que je crois aſſez neuf pour m'y arrêter un inſtant; ſavoir, ε, η, &c. étant des fonctions connues de x & y, déterminer dans quelles circonſtances un ſyſtème donné des fonctions indéterminées $\phi : \varepsilon$, $\phi' : \varepsilon$, &c.; $F : \eta$, $F' : \eta$, &c.; &c.; & des variables x, y ſatisfera à une certaine condition. Qu'on demande, par exemple, ſi le ſyſtème $\phi : \frac{x}{y^2} + F : \frac{x^2}{y}$ pour devenir une fonction de $\frac{x}{y}$; c'eſt-à-dire, ſi l'équation $\phi : \frac{x}{y^2} + F : \frac{x^2}{y} = f : \frac{x}{y}$ peut avoir lieu? Je commencerai par ſuppoſer $\frac{x}{y} = z$, d'où $x = zy$; ce qui change l'équation précé-

dente en $\phi:\frac{z}{y} + F:z^2y = f:z$. Je différentie celle-ci par y seule, ce qui donne $\phi':\frac{z}{y} - zy^2F':z^2y = 0$. Soit maintenant $\frac{z}{y} = u$, d'où $z = uy$ & (av) . . . $\phi':u - uy^3F':u^2y_3 = 0$: j'aurai, en différentiant de nouveau cette transformée par y seule,

$$F':u^2y^3 + u^2y^3F'':u^2y^3 = 0$$

qui, en faisant $u^2y^3 = \eta$, devient $F':\eta + \eta F'':\eta = 0$. Multipliant donc cette dernière par $d\eta$ & intégrant, on parviendra enfin au résultat $\eta F':\eta =$ const., ou $F':\eta = \frac{c}{\eta}$ qui multiplié de nouveau par $d\eta$ & intégré donne $F:\eta = c\,\mathrm{l}.\eta + \mathrm{l}.a = \mathrm{l}.a\eta^c$. Substituons maintenant cette valeur dans l'équation av, & elle se changera en

$$\phi':u = uy^3\frac{c}{u^2y^3} = \frac{c}{u}, \text{ d'où } \phi:u = \mathrm{l}.bu^c.$$

Il suit de là que $\phi:\frac{x}{y^2}$ doit être $= \log. a\left(\frac{x}{y^2}\right)^c$, & de même $F:\frac{x^2}{y} = \log. b\left(\frac{x^2}{y}\right)^c$, dont la somme est $\log. ab\left(\frac{x^3}{y^3}\right)^c$ qui est en effet une fonction de $\frac{x}{y}$.

Prenons, pour second exemple, l'équation plus compliquée

$$\phi(x+y) - \frac{y^2}{x+y}\phi'(x+y) + xF(x-y) = 2x^2 + xy - y^2.$$

Nous ferons d'abord $x+y = z$, $x = z-y$, $x-y = z-2y$; ce qui change la proposée en . . . . (au)

$$\phi:z - \frac{y^2}{z}\phi':z + (z-y)F(z-2y) = 2z^2 - 3zy$$

que nous différentierons par y seule, & nous aurons . . . (aw)

$$\phi':z = \frac{3z^2 - zF(z-2y) - 2(z^2-zy)F'(z-2y)}{2y},$$

qui différentiée de nouveau par y donnera

$$4y(z-y)F''(z-2y) + 2(z+y)F'(z-2y) + F(z-2y) - 3z = 0.$$

Faisons de plus $z - 2y = u$; la transformée sera

$$4y(u+y)F'':u + 2(u+3y)F':u + F:u - 3(u+2y) = 0;$$

& l'ayant encore différentiée deux fois successivement par y, nous aurons d'abord $(2u + 4y)F'':u + 3F':u - 3 = 0$, & ensuite $F''':u = 0$. Ainsi $F':u = 1$ & $F:u = u$; c'est-à-dire, $F(z - 2y) = z - 2y$, $F'(z - 2y) = 1$, & substituant ces valeurs dans au, on la changera en $\phi':z = 2z$, d'où $\phi:z = z^2$. On a donc enfin $\phi(x+y) = (x+y)^2$, $\phi'(x+y) = 2(x+y)$, $F(x-y) = x-y$; & par ces substitutions la proposée devient en effet identique.

On peut, au moyen de la même méthode, résoudre le problème suivant, savoir; trouver le solide engendré par la révolution d'une courbe autour de son axe vertical, dont la propriété soit telle, que de quelque manière qu'on la coupe par un plan aussi vertical, il en résulte constamment, pour section de la surface, une même courbe. Nommons z la co-ordonnée verticale, x & y les deux co-ordonnées horizontales. Nous aurons d'abord, pour équation générale à la surface de ce solide, $z = \phi(x^2 + y^2)$ qui est celle de tous les solides de révolution. De plus toutes les sections faites par des plans verticaux étant une même courbe, il s'ensuit qu'on peut encore considérer cette surface comme produite par le mouvement d'une courbe tracée sur le plan des z & x, laquelle, toujours parallèlement à elle-même, & conservant son axe vertical dans le plan des z & y, s'avance en suivant la direction d'une courbe tracée sur ce dernier plan; c'est-à-dire, que son équation sera comprise dans la formule $z = F:x + f:y$. Il ne s'agit plus que de déterminer les trois fonctions ϕ, F & f par la condition $\phi(x^2 + y^2) = F:x + f:y$. Pour cela, je différentie d'abord cette équation par y & puis le résultat par x;

ce qui me donne $2y\phi' = f'$, & enſuite $4xy\phi'' = 0$, ou ſimplement $\phi'' = 0$; c'eſt-à-dire, $\phi'(x^2 + y^2) = \text{conſt.} = \frac{1}{a}$ ou

$$(2x\,dx + 2y\,dy)\,\phi'(x^2 + y^2) = \frac{1}{a}\,(2x\,dx + 2y\,dy),$$

dont l'intégrale eſt $\phi(x^2 + y^2) = \frac{1}{a}\,(x^2 + y^2)$. Subſtituant la valeur de ϕ' dans la première, j'en conclus $f':y = \frac{2y}{a}$ & $f:y = \frac{y^2}{a}$: & je trouve enfin, au moyen de l'équation finie, en y remettant pour ϕ & f leurs valeurs, $F:x = \frac{x^2}{a}$ comme cela doit être. Ainſi la ſurface du ſolide cherché eſt donnée par l'équation $z = \frac{x^2 + y^2}{a}$ qui eſt au ſolide de révolution engendré par une parabole quelconque autour de ſon axe.

36. C'eſt en ſuivant cette même méthode que je vais démontrer que les deux intégrales générales de l'article 34 ne ſont que la même ſous différentes formes. Pour cela je commence par ſuppoſer en effet l'égalité de deux valeurs de Ψ; & je différentie d'abord cette équation par ε ſeule, ce qui me donne... (ax)

$$\frac{1}{2}\,\phi':\varepsilon - \frac{1}{2}\,F':\eta + \left(\frac{1}{h} + a - \frac{\varepsilon+\eta}{2}\right)\phi'':\varepsilon = \frac{1}{2}\,F':\varepsilon - \frac{1}{2}\,f':\eta + \left(a - \frac{\varepsilon+\eta}{2}\right)$$
$$F'':\varepsilon + \frac{1}{2h}\,(F'':\varepsilon + f'':\eta) - \frac{1}{h}\left(\frac{1}{h} + a - \frac{\varepsilon+\eta}{2}\right)F''':\varepsilon.$$

Je différentie de nouveau ce réſultat par η, d'où je tire... (ay)

$$-\frac{1}{2}\,F'':\eta - \frac{1}{2}\,\phi'':\varepsilon = -\frac{1}{2}\,f'':\eta - \frac{1}{2}\,F'':\varepsilon + \frac{1}{2h}\,f''':\eta + \frac{1}{2h}F''':\varepsilon;$$

& ſéparant les fonctions η de celles ε, je conclus, de cette dernière équation,

$$F':\eta = f':\eta - \frac{1}{h}\,f'':\eta,\quad F:\eta = f:\eta - \frac{1}{h}\,f':\eta, \text{ \&}$$

$$\phi':\varepsilon = F':\varepsilon - \frac{1}{h}\,F'':\varepsilon,\quad \phi:\varepsilon = F:\varepsilon - \frac{1}{h}\,F':\varepsilon.$$

Subſti-

Subſtituant enſuite ces valeurs dans a x, je vois qu'elle devient identique ; & enfin la même ſubſtitution dans la première des deux valeurs de Ψ la rend en effet parfaitement conforme à la ſeconde.

Il ſuit de là que la ſeconde des deux intégrales ci-deſſus à deux fonctions coëfficientes, n'eſt que la première à une ſeule pareille fonction, dans laquelle on a mis $F:\varepsilon - \frac{1}{h} F':\varepsilon$ pour $\phi:\varepsilon$, & $f:\eta - \frac{1}{h} f':\eta$ pour $F:\eta$. Or comme ces deux expreſſions binomes ne ſont réellement elles-mêmes que des fonctions quelconques ; l'une de ε & l'autre de η, on voit évidemment que ces deux intégrales ne ſont qu'une même choſe exprimée de deux manières différentes. Ceci ſuffit pour confirmer toutes nos conjectures (§ 34) ſur la multiplicité indéfinie de formes diverſes qu'on peut donner à ces intégrales, en augmentant de plus en plus le nombre des fonctions coëfficientes.

On auroit pu préſenter la méthode que nous venons d'employer d'une manière un peu différente & qui paroîtra même plus claire, en obſervant que, ſi les deux valeurs de Ψ ſont égales, la même égalité ſubſiſtera entre les deux valeurs de $\frac{d^2\Psi}{d\varepsilon\, d\eta}$, & réciproquement. Or de l'égalité de ces deux dernières réſulte l'équation a y ci-deſſus & conſéquemment la détermination des fonctions F & ϕ ; donc cette même détermination établira l'égalité entre les deux expreſſions de Ψ.

37. Je n'ai point donné d'exemple qui ait rapport à la valeur relativement particulière a r 2 de γ. J'y reviendrai dans l'examen que je vais faire de l'équation générale *aux cordes vibrantes ;* ſa-

voir * $\frac{d^2 z}{dy^2} - X^2 \frac{d^2 z}{dx^2} = 0$. En multipliant cette équation par le facteur indéterminé ω, on a (§ 27) $A = \omega$, $g = 0$, $e = -X^2$, $G = 0$. Donc $\varepsilon = \int \frac{dx}{X} + y$, $\eta = \int \frac{dx}{X} - y$; & $m = p = \frac{1}{X}$, $n = -q = 1$, $\Omega + \Pi = \eta + \varepsilon = 2 \int \frac{dx}{X}$. Ensuite $\pi = 0$, $\chi = -\frac{2}{X}$; & enfin $(E) = (H) = \frac{X'}{X^2}$. Nous commencerons par le cas où $\mathfrak{E}$ est le seul coëfficient, en lui laissant sa valeur complète (§ 17) qui devient ici

$$\mathfrak{E} = \frac{a + e^{2c \int \frac{dx}{X}}}{c\left[a - e^{2c \int \frac{dx}{X}}\right]},$$

ou en désignant, pour simplifier, $\int \frac{dx}{X}$ par le symbole Ξ,

$$b = \frac{a + e^{2c\Xi}}{c(a - e^{2c\Xi})}.$$

Faisant donc dans les expressions de b & c (§ 30) les substitutions nécessaires, nous trouverons

$$b = \frac{8acXe^{2c\Xi} - XX'(a^2 - e^{4c\Xi})}{a^2 - e^{4c\Xi}}, \; c = 0.$$

Maintenant la comparaison des coëfficiens de $\frac{dz}{dy}$ donne $I = \frac{dA}{dy} = \frac{d\omega}{dy} = 0$, & à cause de $G = \frac{dA}{dz} = \frac{d\omega}{dz} = 0$, $\omega = f:x$. De plus, comme $H = \frac{dA}{dx} = \frac{d\omega}{dx}$, & que ω est fonction de x seule, du coëfficient de $\frac{dz}{dx}$ il résultera $2X^2 d\omega - b\omega dx = 0$, dont l'intégrale est

* Voyez calcul différ. & intég. de M. Cousin édit. de 1777, seconde partie, page 986 ou art. 517 de l'édit. in-4°.

$$\omega = \frac{b(a + e^{2c\Xi})}{\surd X (a - e^{2c\Xi})} = A.$$

Ainsi $\Psi = \int A\,dz + G = Az + G = \frac{bz\,(a + e^{2c\Xi})}{\surd X (a - e^{2c\Xi})} + G.$

Enfin le terme sans différence partielle se réduit à $M + eK + bB = o$, d'où, à cause de $B = \frac{d\Psi}{dx} = z\frac{dA}{dx} + \frac{dG}{dx}$; de $K = \frac{dB}{dx} = z\frac{d^2A}{dx^2} + \frac{d^2G}{dx^2}$; & de $M = \frac{d^2G}{dy^2}$, ... (b a)

$$\frac{d^2G}{dy^2} + e\frac{d^2G}{dx^2} + b\frac{dG}{dx} + \left(e\frac{d^2A}{dx^2} + b\frac{dA}{dx}\right) z = o.$$

Remarquons maintenant que e & b sont des fonctions de x seule, & que d'ailleurs, par hypothèse, G ne renferme pas z. Il faut donc que le coèfficient de cette variable dans le terme sans différence partielle s'anéantisse; & dès-lors la supposition de $G = o$ satisfera au reste de l'équation.

Cette condition a évidemment lieu toutes les fois que $A = 1$; c'est-à-dire, que Ψ se réduit à z. On a alors $b(a + e^{2c\Xi}) = \surd X (a - e^{2c\Xi})$, d'où il s'ensuit $c\,dx = \frac{b\,dX\,\surd X}{2(X^2 - b^2)}$, & en intégrant, $cx + m = b\surd X + \frac{1}{2} b^2 \log. \frac{\surd X - b}{\surd X + b}$, dont il est impossible de déduire une valeur finie de X.

Pour parvenir à l'expression générale des valeurs de X propres à annuller le coèfficient de z, faisons $\frac{dA}{dx} = \Gamma$, & nous aurons $e\frac{d\Gamma}{dx} + b\Gamma = o$, ou parce que A & conséquemment aussi Γ sont des fonctions de x seule, $e\,d\Gamma + b\Gamma\,dx = o$, c'est-à-dire, en substituant à e & b leurs valeurs & intégrant,

$$\Gamma = \frac{dA}{dx} = \frac{g(a+e^{2c\Xi})^2}{X(a-e^{2c\Xi})^2},$$

où g eſt une nouvelle conſtante. Or d'un autre côté, en vertu de la valeur de A, nous avons

$$\frac{dA}{dx} = \frac{8abce^{2c\Xi} - (a^2 - e^{4c\Xi})bX'}{2X\sqrt{X}(a-e^{2c\Xi})^2}.$$

Il ne faut donc plus qu'égaler entr'elles ces deux valeurs ; d'où (a z)

$$2g\sqrt{X}(a+e^{2c\Xi})^2 = 8abce^{2c\Xi} - (a^2 - e^{4c\Xi})bX'.$$

Un moyen bien ſimple de ſatisfaire cette équation feroit, après l'avoir ordonnée par la quantité exponentielle, d'en égaler chaque coëfficient à zéro ; ce qui donneroit $2g\sqrt{X} - bX' = 0$, $2g\sqrt{X} + bX' = 0$, $g\sqrt{X} - 2bc = 0$. Mais cette ſuppoſition ne nous apprendroit rien, puiſqu'il n'en réſulte que $X = 0$ & b ou $c = 0$.

Quant à la ſolution générale, la méthode la plus abrégée pour y parvenir feroit de chercher la valeur de $e^{2c\Xi}$ qui ſoit $= \xi$. Après cette première ſubſtitution, il faudroit faire diſparoître le radical $\sqrt{X}$, & enſuite ſubſtituer de nouveau à X ſa valeur $\frac{2c\xi}{\xi'}$ & à X' la ſienne $\frac{2c\xi'^2 - 2c\xi\xi''}{\xi'^2}$ (où $\xi' = \frac{d\xi}{dx}$ & $\xi'' = \frac{d^2\xi}{dx^2} = \frac{d\xi'}{dx}$). Mais le réſultat de toutes ces opérations feroit encore une équation du ſecond ordre & du ſecond degré ſi compliquée, que nous nous voyons obligés de l'abandonner, pour paſſer à l'examen des valeurs de X qui appartiennent à la forme $\mathfrak{G} = a - \frac{1}{2}(\varepsilon + \eta)$; c'eſt-à-dire ici $\mathfrak{G} = a - \Xi$, ce coëfficient étant ſeul.

38. Le changement à faire, pour cette ſeconde hypothèſe, conſiſte d'abord à ſubſtituer à $\mathfrak{G}$ cette nouvelle valeur dans les formules de b & c (§ 17) qui par là deviendront

$$b = -\frac{XX'(a-\Xi)+2X}{a-\Xi} \ \& \ c = 0.$$

On a enfuite, comme ci-deffus, en vertu du coëfficient de $\frac{d\zeta}{dy}$, $\omega = f:x$; & celui de $\frac{d\zeta}{dx}$ donne $\omega = \frac{b(a-\Xi)}{\sqrt{X}} = A$, d'où $\Psi = A\zeta + G$. Enfin par les mêmes raifonnemens que dans l'art. précédent, nous conclurons, du terme fans différence partielle, que la détermination de X eft renfermée dans l'équation $e d\Gamma + b\Gamma dx = 0$ qui, dans le cas préfent, devient $(a-\Xi)(Xd\Gamma + \Gamma dX) + 2\Gamma dx = 0$, & dont l'intégrale eft $\Gamma = \frac{g(a-\Xi)^2}{X} = \frac{dA}{dx}$. Or, en déduifant directement $\frac{dA}{dx}$ de la valeur de A ci-deffus, on trouve

$$\frac{dA}{dx} = -b\frac{(a-\Xi)X'+2}{2X\sqrt{X}}:$$

égalant donc entr'elles ces deux expreffions, on aura

$$2g\sqrt{X}(a-\Xi)^2 + b(a-\Xi)X' + 2b = 0$$

qui, en repréfentant $a-\Xi$ par ξ, faifant difparoître le radical $\sqrt{X}$, fubftituant à X & à X' leurs valeurs; favoir, $-\frac{1}{\xi'}$ & $\frac{\xi''}{\xi'^2}$, & enfin multipliant par dx^4, fe change en . . . . (bb)

$$b^2(\xi d^2\xi + 2d\xi^2)^2 + 4g^2\xi^4 d\xi^3 dx = 0$$

que nous n'entreprendrons point d'intégrer dans fa généralité. Nous nous contenterons d'en faire une application particulière à un des cas de la formule $\zeta = \mathfrak{E}\Pi + \vartheta\Pi'$ donnée par M. *Coufin* *; favoir, celui de $\mathfrak{E} = 1$. Ce cas fe rapporte ici à celui où Ψ feroit $= \zeta$, $A = 1$, & conféquemment, $-2bdx = dX\sqrt{X}$, d'où $k - 2bx = \frac{2}{3}X^{\frac{3}{2}}$, $\sqrt{X} = \sqrt[3]{(\frac{3}{2}k - 3bx)}$, & enfin $\Xi = -\frac{1}{b}\sqrt[3]{(\frac{3}{2}k - 3bx)} + l$. On

* Leçons de calcul différ, & intég. page 690, ligne 18, édit, de 1777; ou art. 517, édit. in-4°.

à $\bar{\epsilon}$ dans les formules de b & c de l'art. 20. Nous avons ici

$$\gamma = \frac{k + (a - \Xi)^3}{3(a - \Xi)},$$

d'où $\frac{d\gamma}{dx} = k = \frac{k - 2(a - \Xi)^3}{3X(a - \Xi)^2}$, & $\frac{d\gamma}{dy} = l = 0$. Il résulte de là, pour les valeurs de b & c,

$$b = \frac{2X[k - 2(a - \Xi)^3] - XX'(a - \Xi)[k + (a - \Xi)^3]}{(a - \Xi)[k + (a - \Xi)^3]}, \quad c = 0.$$

De plus, le coëfficient de $\frac{dz}{dy}$ donne $\omega = f : x$; & celui de $\frac{dz}{dx}$ détermine cette fonction; favoir . . . (bc)

$$\omega = \frac{b\sqrt{X}(a - \Xi)}{k + (a - \Xi)^3} = A,$$

d'où il s'enfuit, comme (§ 37), $\Psi = Az + G$. On trouveroit enfuite de nouveau, au moyen du terme fans différence partielle, l'équation ba (§ 37) : & en confidérant que le coëfficient de z doit encore ici être nul, & que la valeur de $\frac{dA}{dx}$ qui en réfulte doit coïncider avec celle que fournit l'expreffion de A ci-deffus, on parviendroit à une formule générale de toutes les valeurs convenables de X, analogue à celle bb (§ 38).

Sans nous arrêter à tous ces détails qui ne préfentent aucune difficulté, examinons encore feulement le cas de $\frac{dA}{dx} = 0$ ou $A = 1$, en fuppofant même, pour plus de fimplicité, $k = 0$. La valeur bc de A nous donne, pour ce cas, $b\sqrt{X} = (a - \Xi)^2$, d'où $-\frac{dx}{X} = \frac{1}{4}\sqrt{b}\,X^{-\frac{3}{4}}\,dX$; & enfin $X = \left(\frac{\frac{5}{4}g\sqrt{b} - 5x}{\sqrt{b}}\right)^{\frac{4}{5}}$, ou fimplement, puifque g eft une conftante arbitraire, $X = \left(\frac{g - 5x}{\sqrt{b}}\right)^{\frac{4}{5}}$. Donc $\Xi =$

$h - b^{\frac{2}{5}}(g-5x)^{\frac{1}{5}}$; & $A = 1 = \frac{b\sqrt{X}}{(a-Z)^2}$ (*équat.* bc) $=$

$$\frac{b^{\frac{1}{5}}(g-5x)^{\frac{1}{5}}}{[a-h+b^{\frac{2}{5}}(g-5x)^{\frac{1}{5}}]^2};$$

ce qui exige que la nouvelle conſtante $h = a$. Ainſi

$$a - Z = b^{\frac{2}{5}}(g-5x)^{\frac{1}{5}}; \text{ \& enſuite}$$

$$y = \frac{1}{3}(a-Z)^2 = \frac{1}{3}\, b^{\frac{4}{5}}(g-5x)^{\frac{2}{5}}, \text{ \&}$$

$$\varepsilon = a - Z\,(\S\ 26) = a - \int\frac{dx}{X}\,(\S\ 37) = b^{\frac{2}{5}}(g-5x)^{\frac{1}{5}};$$

ce qui s'accorde parfaitement avec la fonction X & les coèfficiens ε & δ de M. *Couſin* pour le même cas *, en faiſant dans ceux-ci $3\sqrt{c} = b'$ & $\frac{b}{a} = -\frac{g}{5}$, où b' déſigne la lettre b de mes formules.

40. Je joindrai encore ici un autre exemple bien ſimple, mais dont le réſultat nous conduira à une obſervation importante, faute de laquelle on feroit ſouvent expoſé à conclure fauſſement qu'une équation donnée n'eſt point intégrable par cette méthode. Soit

$$y\frac{d^2z}{dy^2} - 2y\frac{d^2z}{dx^2} - 2\frac{dz}{dy} = 0.$$

On a $A = \omega y$, $g = 0$, $e = -2$, $n = \pm m\sqrt{2}$, $\frac{d\varepsilon}{dy} \mp \frac{d\varepsilon}{dx}\sqrt{2} = 0$, $\varepsilon = \phi(x \pm y\sqrt{2})$. Ainſi on concluroit, comme nous avons fait jusqu'ici, $\varepsilon = x + y\sqrt{2}$, $\eta = x - y\sqrt{2}$; & enſuite, $m = 1$, $n = \sqrt{2}$, $p = 1$, $q = -\sqrt{2}$, $\varpi = 0$, $\chi = -2\sqrt{2}$. De plus, en

* Voyez l'ouvrage cité page 692 lignes 13 & 14; édit. de 1777; ou art. 518, page 201, ligne 10 édit. in-4°.

ſuppoſant

ſuppoſant qu'il n'y ait qu'un coëfficient $\mathfrak{C}$, & prenant ſa valeur particulière (§ 26), on auroit $\mathfrak{C} = a - x$; d'où $g = -1$, $h = 0$. Ces ſubſtitutions changeroient l'expreſſion de b (§ 17) en $b = \frac{-4}{a-x}$ & c deviendroit $= 0$. On trouveroit enſuite $2\frac{dA}{dy} = -2\omega$ ou $2\omega + y\frac{d\omega}{dy} = 0$; c'eſt-à-dire, à cauſe de $G = 0$, $\omega y^2 = f:x$ ou $\omega = \frac{X}{y^2}$. Le coëfficient de $\frac{dz}{dx}$ donneroit encore $(a-x)H + \omega y = 0$; c'eſt-à-dire, à cauſe de $A = \omega y = \frac{X}{y}$, $(a-x)X' + X = 0$, ou $(a-x)\,dX + X\,dx = 0$ dont l'intégrale eſt $X = c(a-x)$. Ainſi $A = \frac{c(a-x)}{y}$; $\Psi = \frac{c(a-x)z}{y} + G[= f(x, y)]$; $M = \frac{d^2G}{dy^2} - \frac{c(a-x)z}{y^2}$; $B = \frac{dG}{dx} - \frac{cz}{y}$; $K = \frac{d^2G}{dx^2}$;

& on déduiroit enfin, du terme ſans différence partielle,

$$\frac{d^2G}{dy^2} - 2\frac{d^2G}{dx^2} - \frac{4}{a-x}\frac{dG}{dx} - \frac{c(a-x)z}{y^2} + \frac{4cz}{(a-x)y} = 0.$$

Or, par hypothèſe, G ne contient pas z; il faut donc, puiſque c ne peut devenir égal à zéro, que ce ſoit $\frac{4}{a-x} = \frac{a-x}{y}$; ce qui eſt abſurde.

Quoique ce réſultat ſemble ne permettre aucun doute ſur l'impoſſibilité d'intégrer la propoſée par la méthode préſente, on va voir combien une pareille concluſion ſeroit quelquefois hazardée. Nous avons trouvé ci-deſſus $\varepsilon = \phi(x \pm y\sqrt{2})$, & de là nous avons déduit $\varepsilon = x + y\sqrt{2}$, $\eta = x - y\sqrt{2}$. Mais cette formule ne peut-elle pas auſſi s'écrire de cette autre manière $\varepsilon = \phi(y\sqrt{2} \pm x)$, en multipliant la quantité *fonctionnée* par ± 1 ? Dès-lors on a $\varepsilon = y\sqrt{2} + x$, $\eta = y\sqrt{2} - x$, $m = 1$, $n = \sqrt{2}$, $p = -1$, $q = \sqrt{2}$, $\varpi = 0$, $\chi = 2\sqrt{2}$; $\mathfrak{C} = a - y\sqrt{2}$, $g = 0$, $h = -\sqrt{2}$. Donc $b = 0$

& c $= \frac{2\sqrt{2}}{a - y\sqrt{2}}$. Ensuite le coëfficient de $\frac{dz}{dy}$ donne, en mettant pour A sa valeur ωy, $(ay - y^2\sqrt{2})\frac{d\omega}{dy} + (2a - y\sqrt{2})\,\omega = 0$, dont l'intégrale est $\omega = \frac{a - y\sqrt{2}}{cy^2}$, puisque, en vertu du terme $\frac{dz}{dx}$, $H = \frac{dA}{dx} = 0$, & que conséquemment $\frac{d\omega}{dx}$ est aussi $= 0$. On a donc

$$A = \frac{a - y\sqrt{2}}{cy};\ \Psi = \frac{(a - y\sqrt{2})z}{cy} + G\,[= f(x, y)],$$

& on conclura enfin du dernier terme,

$$\frac{d^2G}{dy^2} - 2\frac{d^2G}{dx^2} + \frac{2\sqrt{2}}{a - y\sqrt{2}}\frac{dG}{dy} + \frac{2az}{cy^3} - \frac{2az\sqrt{2}}{cy^2(a - y\sqrt{2})} = 0$$

qui, parce que G est fonction de x & y seulement, donne nécessairement $a = 0$ & $G = 0$. Ainsi $\Psi = \frac{-z\sqrt{2}}{c}$ ou simplement $\Psi = z$, en faisant $c = -\sqrt{2}$; $\mathcal{E} = -y\sqrt{2}$; & enfin l'intégrale cherchée est

$$z = \phi(y\sqrt{2} + x) + F(y\sqrt{2} - x) - y\sqrt{2}\,(\phi' + F').$$

Il est facile d'appercevoir la raison de cette ambiguité. En effet, représentons en général par $\phi(\Gamma \pm \Lambda)$ l'expression de l'une ou de l'autre des deux fonctions ε ou η, par exemple, de ε; & concluons de là $\varepsilon = \Gamma + \Lambda$, $\eta = \Gamma - \Lambda$. Maintenant si nous multiplions la quantité *fonctionnée* $\Gamma \pm \Lambda$ par ± 1, il n'en résultera d'autre effet que celui de changer les signes de la racine négative $\Gamma - \Lambda$; c'est-à-dire, de rendre négatifs η & ses dérivés p & q; ce qui n'occasionne aucune variation dans les valeurs des deux coëfficiens e & g (§ 17), ni conséquemment dans les équations $\phi^{\nu+2}$, $F^{\nu+2}$ (§ 19) qui servent à déterminer ε & η. Ainsi cette détermination ne peut en aucune manière faire connoître laquelle des deux formes convient de préférence à l'intégrale de la proposée. Il n'en est pas de même des deux autres coëfficiens b & c qui

contiennent néceſſairement une des fonctions coëfficientes $\mathcal{E}$, ou &c.; & ſes dérivés g, h, ou &c. En effet, celles-ci étant toujours des fonctions de $\varepsilon + \eta$ (§ 26) ne peuvent manquer d'éprouver une variation conſidérable par ce changement de η en $-\eta$. Mais comme b & c ne ſe rencontrent que dans les termes du premier ordre, ce ne ſera qu'à la fin de l'opération qu'on pourra juger laquelle des deux formes en queſtion eſt la véritable. Ainſi, dans tous les cas, il faudra faire ce double eſſai avant de prononcer définitivement qu'une propoſée n'eſt point intégrable de cette manière.

41. Si dans la formule générale Y (§ 19) on ſuppoſe tous les coëfficiens $\mathcal{E}$, γ ... ξ conſtans, elle ſe réduira à la formule ſimple $\Psi = \phi : \varepsilon + F : \eta$. Ainſi, en nous bornant au cas d'un ſeul coëfficient $\mathcal{E}$, on réuſſiroit à intégrer, par la même méthode, une claſſe d'équations régulières aux différences partielles. Je dis une claſſe, parce qu'il faut en excepter toutes celles dont l'intégrale eſt de la forme (§ 16) $\Psi = \alpha\phi : \Pi + F : \Pi$; mais dans ce cas on devroit employer la valeur complète de $\mathcal{E}$ (§ 26) qui devient en effet conſtante lorſque $a = 0$; ſavoir $\mathcal{E} = \frac{-1}{c}$; ce qui ne pourroit avoir lieu dans ſa valeur particulière, que par la ſuppoſition de a & conſéquemment de $\mathcal{E} = \infty$.

CHAPITRE QUATRIÈME.

Méthode d'intégration pour les équations irrégulières plus compliquées.

42. LA méthode que nous avons ſuivie jusqu'ici porte ſur l'hypothèſe que la fonction principale Ψ ſoit la ſeule affectée de z.

Nous allons maintenant traiter le même ſujet dans ſa plus grande étendue, en ſuppoſant que tant les fonctions ſecondaires Π & Ω ou ε & η, que les fonctions coëfficientes β, γ ... ξ renferment cette même variable. Cette nouvelle circonſtance exige un changement conſidérable à la méthode précédente, & nous force à reprendre cette queſtion depuis ſon origine, en remontant à l'équation primitive E 2 (§ 27).

Nommons en général ξ le dernier des coëfficiens β, γ, &c d'une formule intégrale quelconque; & ſoit $\frac{d\xi}{dx} = t$, $\frac{d\xi}{dy} = u$. L'expreſſion de b & de c applicable à tous les cas ſera (§ 23) . . . (bd)

$$\text{b} = \frac{n\xi(\text{H}) - q\xi(\text{E}) - \chi(2nqt - \varpi u)}{mp\xi\chi},$$

$$\text{c} = \frac{p\xi(\text{E}) - m\xi(\text{H}) - \chi(2mpu - \varpi t)}{mp\xi\chi};$$

e & g reſtant invariablement les mêmes. Mais les fonctions ε & η pouvant déſormais contenir z, les ſymboles (E), (H) doivent être conſidérés comme renfermant les différences partielles des deux premiers ordres; & les lettres m, n, p, q (§ 6.) comme renfermant celles du premier ordre ſeulement de cette même variable. Quant aux coëfficiens β, ou γ, ou &c., dont le dernier dans chaque formule eſt toujours déſigné ici par ξ, de même que ſes dérivés g, h ou k, l, ou &c. le ſont par t, u; comme dans chaque cas particulier, ce coëfficient extrême eſt donné en Π & Ω; c'eſt-à-dire en ε & η (§ 26), il rentre naturellement dans la même catégorie par la ſubſtitution de cette valeur. Il faudra donc développer entièrement les expreſſions de b, c, e & g, & former une nouvelle équation fondamentale de comparaiſon, comme eſt celle a r (§ 27),

dans laquelle ces quatre coëfficiens ne paroîtront plus ; ce qui remet en notre pouvoir ces quatre lettres dont nous allons faire un usage différent.

Soient donc encore $d\Psi$, dA, dB, dD représentées comme (§ 27) : & exprimons de même les coëfficiens analogues de ε par $\mathcal{A}, \mathcal{B} \ldots \mathcal{M}$; & ceux de η par a, b, ... m. D'après ces nouvelles dénominations, $\mathrm{m} = \frac{d\varepsilon}{dx}$ deviendra $= \mathcal{A}\frac{d\zeta}{dx} + \mathcal{B}$; $n = \frac{d\varepsilon}{dy} = \mathcal{A}\frac{d\zeta}{dy} + \mathcal{D}$; & de même $p = \mathrm{a}\frac{d\zeta}{dx} + \mathrm{b}$; $q = \mathrm{a}\frac{d\zeta}{dy} + \mathrm{d}$: Et il ne restera dans l'équation fondamentale, des lettres de cette espèce, que t & u pour recevoir, dans chaque cas particulier, la substitution des valeurs de $\frac{d\xi}{dx}$ & $\frac{d\xi}{dy}$. Maintenant si dans l'équation primitive E2 (§ 27) on substitue les expressions de b, c, e & g ; qu'on la multiplie par $mp\xi\chi$; & qu'on fasse $\frac{d\zeta}{dx} = \mathrm{p}$, $\frac{d\zeta}{dy} = \mathrm{q}$, elle se transformera en ... (be)

$$\xi\left(\mathrm{A}(\mathcal{B}\mathrm{d} - \mathcal{D}\mathrm{b}) + \mathcal{A}(\mathrm{bD} - \mathrm{dB}) + \mathrm{a}(\mathrm{B}\mathcal{D} - \mathrm{D}\mathcal{B})\right)\left(mp\frac{d^2\zeta}{dy^2} - \varpi\frac{d^2\zeta}{dxdy} + nq\frac{d^2\zeta}{dx^2}\right) + \xi(\chi\mathrm{G} + \vartheta\mathcal{G} + \lambda\mathrm{g})[\mathrm{Z}] + \xi\Big([(2mp\mathrm{I} - \varpi\mathrm{H})\chi + (2mp\mathcal{I} - \varpi\mathcal{H})\vartheta + (2mp\mathrm{i} - \varpi\mathrm{h})\lambda]\mathrm{q} + [(2nq\mathrm{H} - \varpi\mathrm{I})\chi + (2nq\mathcal{H} - \varpi\mathcal{I})\vartheta + (2nq\mathrm{h} - \varpi\mathrm{i})\lambda]\mathrm{p} + mp(\chi\mathrm{M} + \vartheta\mathcal{M} + \lambda\mathrm{m}) - \varpi(\chi\mathrm{L} + \vartheta\mathcal{L} + \lambda\mathrm{l}) + nq(\chi\mathrm{K} + \vartheta\mathcal{K} + \lambda\mathrm{k})\Big) + \chi\left(\varpi\frac{d\Psi}{dy} - 2nq\frac{d\Psi}{dx}\right)t + \chi\left(\varpi\frac{d\Psi}{dx} - 2mp\frac{d\Psi}{dy}\right)u = 0,$$

qui est l'équation fondamentale de comparaison dans laquelle

$$[\mathrm{Z}] = mp\mathrm{q}^2 - \varpi\mathrm{pq} + nq\mathrm{p}^2,$$

$\vartheta = p\frac{d\Psi}{dy} - q\ \frac{d\Psi}{dx} = (Ab - Ba)q + (aD - dA)p + bD - dB,$

$\lambda = n\frac{d\Psi}{dx} - m\ \frac{d\Psi}{dy} = (\mathcal{A}B - \mathit{B}A)q + (A\mathit{D} - D\mathcal{A})p + B\mathit{D} - D\mathit{B};$

& où j'ai laiſſé, pour plus de ſimplicité, les lettres m, n, p, q; ainſi que celles ϖ & χ qui en dépendent uniquement.

43. Prenons pour exemple l'équation

$$(x+y)(p+p^2)\frac{d^2\zeta}{dy^2} + (x+y)(1+p-q-2pq)\frac{d^2\zeta}{dxdy} - (x+y)(q-q^2)\frac{d^2\zeta}{dx^2} - (1+p-q)^2(p+q) = 0.$$

Après l'avoir multipliée par ω, on en comparera les trois termes du ſecond ordre, qui ſont les ſeuls qu'on puiſſe y reconnoître individuellement, avec les termes correſpondans de la formule générale be, dont je répréſente le facteur commun par ξP. Je déduis par cette opération, d'abord $mp\xi P = \omega(x+y)(p+p^2)$; enſuite $\frac{-\varpi\xi P}{mp\xi P}$ ou $\frac{-\varpi}{mp} = g$ (§ 19) $= \frac{1+p-q-2pq}{p+p^2}$; & enfin $\frac{nq}{mp} =$ e (§ 19) $= \frac{q^2-q}{p+p^2}$; ce qui donne $\frac{n}{m} = \frac{\pm(1+p-q)-(1+p-q-2pq)}{2(p+p^2)}$; c'eſt-à-dire, ou $\frac{n}{m} = \frac{q}{1+p}$, ou $\frac{n}{m} = \frac{q-1}{p}$ d'où, en mettant pour m & n leurs valeurs $\frac{d\varepsilon}{dx}$, $\frac{d\varepsilon}{dy}$, réſultent les deux équations

$$\frac{d\zeta}{dx}\frac{d\varepsilon}{dy} - \frac{d\zeta}{dy}\frac{d\varepsilon}{dx} + \frac{d\varepsilon}{dy} = 0,\quad \frac{d\zeta}{dx}\frac{d\varepsilon}{dy} - \frac{d\zeta}{dy}\frac{d\varepsilon}{dx} + \frac{d\varepsilon}{dx} = 0,$$

qui ſont de la claſſe de celles que j'ai intégrées dans le premier recueil de ces mélanges (mémoire 1 § 58), ε remplaçant ici s. On trouveroit en effet, en ſuivant le même procédé, $\varepsilon = \phi(\zeta + x)$, & $\varepsilon = F(\zeta - y)$; d'où conformément à ce que je viens de dire dans le chapitre précédent (§ 40), on concluroit $\varepsilon = \zeta + x$ & η

$=\pm(\zeta-y)$. Commençons par la valeur $\eta=y-\zeta$ qui eſt la plus ſimple, puiſqu'elle fait diſparoître la variable principale ζ de la quantité $\varepsilon+\eta$. On tire de là $m=1+\text{p}$, $n=\text{q}$, $p=-\text{p}$, $q=1-\text{q}$, $mp=-\text{p}(1+\text{p})$, $nq=\text{q}(1-\text{q})$, $\varpi=1+\text{p}-\text{q}-2\text{pq}$, $\chi=1+\text{p}-\text{q}$. Enſuite $A=1$, $B=1$, $D=0$, $G,\ldots M=0$; $\text{a}=-1$, $\text{b}=0$, $\text{d}=1$, $\text{g},\ldots\text{m}=0$: Et en ſuppoſant que l'intégrale ne contienne qu'un coëfficient $\epsilon=a-\frac{1}{2}(\varepsilon+\eta)$, on a $\xi=\epsilon=a-\frac{1}{2}(x+y)$, $t=u=-\frac{1}{2}$; ce qui change P en $\text{A}-\text{B}+\text{D}$. Ainſi en vertu du coëfficient de $\frac{d^2\zeta}{dy^2}$, il réſulte $(\text{A}-\text{B}+\text{D})\left(a-\frac{x+y}{2}\right)+\omega(x+y)=0$, pour déterminer la valeur de ω. Faiſant enſuite, dans le terme ſans différences partielles du ſecond ordre, toutes les ſubſtitutions néceſſaires; & l'égalant au terme correſpondant de la propoſée, après avoir mis dans celui-ci, au lieu de ω, la valeur que nous venons de lui aſſigner, on parviendra à l'équation

$$\xi\text{p}(1+\text{p})\frac{d^2\Psi}{dy^2}+\xi(1+\text{p}-\text{q}-2\text{pq})\frac{d^2\Psi}{dxdy}-\xi\text{q}(1-\text{q})\frac{d^2\Psi}{dx^2}+\xi\text{p}(1+\text{p}+\text{q})\frac{d^2\Psi}{d\zeta dy}-\xi\text{q}(\text{p}+\text{q}-1)\frac{d^2\Psi}{d\zeta dx}+\xi\text{pq}\frac{d^2\Psi}{d\zeta^2}+\tfrac{1}{2}(1+3\text{p}-\text{q}-2\text{pq}+2\text{p}^2)\frac{d\Psi}{dy}+\tfrac{1}{2}(1+\text{p}-3\text{q}-2\text{pq}+2\text{q}^2)\frac{d\Psi}{dx}+\tfrac{1}{2}(\text{q}-\text{q}^2+\text{p}+\text{p}^2)\frac{d\Psi}{d\zeta}=(1+\text{p}-\text{q})(\text{p}+\text{q})(B-\text{A}+\text{D})\frac{2a-x-y}{2(x+y)},$$

qui eſt à la vérité très-compliquée, mais à laquelle il ſuffit de ſatisfaire. On verra aiſément qu'il ne s'agit ici pour cela que de faire $a=0$, $\text{A}=\frac{d\Psi}{d\zeta}=1$, $\text{B}=\frac{d\Psi}{dx}=0$, $\text{D}=\frac{d\Psi}{dy}=0$; & on aura enfin, pour l'intégrale cherchée, $\zeta=\Phi(x+\zeta)+F(y-\zeta)-\frac{x+y}{2}(\Phi'+F')$.

44. C'eſt toujours au moyen de l'une ou de l'autre des deux équations $\Phi^{\nu+2}$, $F^{\nu+2}$ (§ 19) qu'on détermine les deux fonctions

fecondaires ϵ & η, en paffant par l'expreffion $\frac{n}{m}$ ou $\frac{q}{p} = -\frac{1}{2}g \pm \sqrt{(\frac{1}{4}g^2 - e)}$. D'ailleurs on peut voir, à l'endroit du premier recueil que je viens de citer, que dans les cas où g & e contiennent p & q; c'eft-à-dire, où ϵ & η font affectées de z, on ne réuffira à conclure ultérieurement de cette expreffion une valeur finie de ces deux fonctions, qu'autant que p & q y foient fous une forme linéaire feulement, & dégagées de tout figne radical. Ainfi une première condition qui doit alors effentiellement avoir lieu, pour qu'une propofée foit intégrable par cette méthode, eft que $\frac{1}{4}g^2 - e$ foit un quarré, comme dans l'exemple précédent.

Je n'entreprendrai point d'étendre cette théorie aux équations des ordres ultérieurs. Il n'y a plus que des longueurs de calcul à furmonter; & on s'en épargnera même la partie la plus difficile, fi on obferve, d'après ce qui a été dit (§ 17), que la forme générale, à laquelle il faut fe borner pour les formules intégrales d'un ordre quelconque, eft $\Psi = \phi : \Pi + F : \Omega + f : \mathrm{F} +$ &c. $+ \epsilon (\phi' + F' : + f' +$ &c.$) + \gamma (\phi'' + F'' + f'' +$ &c.$) +$ &c., en prenant autant de fonctions différentes que l'expofant de cet ordre contient d'unités.

Je crois avoir fuffifamment développé, tant dans les trois mémoires précédens, que dans le premier mémoire du premier recueil, tout ce qui concerne l'intégration des équations aux différences partielles, dont la première intégrale poffible eft exprimée par une feule équation; foit que cette première intégrale foit celle de l'ordre immédiatement inférieur, comme dans les équations *ré-*

gulières;

gulières; ſoit que, comme dans les équations *irrégulières*, l'expoſant de ſon ordre ſoit inférieur de pluſieurs unités à celui de l'ordre de la propoſée. Il reſte encore aux analyſtes une vaſte carrière à parcourir; c'eſt celle des équations dont la première intégrale poſſible n'eſt donnée que par un ſyſtème de *n* équations ſimultanées entre les variables de la propoſée & un certain nombre de fonctions implicites de ces mêmes variables, que la différentiation fait entièrement diſparoître. Nous avons vu (§ 102) une pareille fonction *w* ſe reproduire dans l'intégrale d'une propoſée *régulière* dans laquelle on n'en appercevoit aucune trace; & on peut multiplier ces exemples à l'infini, en obſervant que la ſeconde des équations qui compoſent ce ſyſtème n'eſt que la différentielle du premier membre de la première, priſe par rapport à la fonction *w* ſeule, & égalée à zéro. Mais M. Monge * a donné dans l'intégrale de l'équation aux ſurfaces courbes qui ont un *minimum* d'étendue entre des limites données, l'exemple d'une pareille intégrale à deux fonctions indéterminées *a*, *b*, provenant d'une équation de la claſſe de celles qui n'admettent pas d'intégration ſucceſſive, & que j'ai nommées *irrégulières*. C'eſt de ce genre d'équations qu'il feroit encore important d'avoir une théorie complète. Elle ſeule peut donner la ſolution de pluſieurs problèmes phyſico-mathématiques très-curieux. Tel eſt celui de déterminer les oſcillations finies ou plus généralement les mouvemens quelconques finis d'une chaîne parfaitement flexible, peſante ou non peſante, lequel dépend de l'intégration d'une équation du quatrième ordre & du premier degré, dont la forme ſemble annoncer qu'elle ſe rapporte à cette théorie.

* Voyez traité du calc. diff. & du calc. intég. par S. F. La Croix tome 2 page 607.

QUATRIEME MÉMOIRE.

Sur l'intégration des équations & systèmes d'équations différentielles d'un ordre quelconque, quels que soient leur nombre & celui de leurs variables.

CHAPITRE PREMIER.

Sur l'intégration des équations différentielles du premier ordre entre un nombre quelconque de variables.

1. L'INTEGRATION des équations différentielles du premier ordre entre un nombre quelconque de variables peut, au moyen de la méthode que j'ai donnée dans le premier recueil de ces mélanges * pour un systême d'équations simultanées aux différences partielles, se ramener à celle des équations du premier ordre entre deux variables seulement; c'est-à-dire, qu'elle ne présentera d'autre difficulté que celle de trouver le facteur d'une équation $Adx + Bdy = 0$.

Soit proposée l'équation à trois variables $adx + bdy + cdu = 0$. Je supposerai que le premier membre, étant multiplié par son facteur μ, devienne $= d\sigma$. J'aurai donc

* Voyez le Ier. recueil pages 104, 142, 189, 220; & dans le suppl. la note ad pag. 107. Voyez aussi le Ier. mémoire de ce recueil art. 139.

$$\frac{d\sigma}{dx} = \mu a, \frac{d\sigma}{dy} = \mu b, \frac{d\sigma}{du} = \mu c;$$

& en éliminant μ, il me reſte trois équations . . . (G)

$$a\frac{d\sigma}{dy} - b\frac{d\sigma}{dx} = 0; b\frac{d\sigma}{du} - c\frac{d\sigma}{dy} = 0; a\frac{d\sigma}{du} - c\frac{d\sigma}{dx} = 0;$$

dont j'intégrerai l'une; & les deux autres ſerviront d'équations de comparaiſon.

Soit par exemple $g\sqrt{2}dx + (u\sqrt{2} + 2y - 2x) dy - gdu = 0$. J'ai $a = g\sqrt{2}$, $b = u\sqrt{2} + 2y - 2x$, $c = -g$. Ainſi les trois équations deviennent $g\sqrt{2}\frac{d\sigma}{dy} - (u\sqrt{2} + 2y - 2x)\frac{d\sigma}{dx} = 0$; $(u\sqrt{2} + 2y - 2x)\frac{d\sigma}{du} + g\frac{d\sigma}{dy} = 0$; $\sqrt{2}\frac{d\sigma}{du} + \frac{d\sigma}{dx} = 0$. J'intègre la ſeconde de ces équations où x eſt conſtante, & je trouve $\sigma = \phi : s$, ds étant $= \mu(gdu - (u\sqrt{2} + 2y - 2x)dy)$ dont il faut chercher le facteur μ. Or cette fonction différentielle peut ſe rapporter à la formule $gdu + Pgudy - gQdy$ *, en faiſant $Pg = -\sqrt{2}$, & $Qg = 2y - 2x$; & on ſait que le facteur de cette formule eſt $e^{\int Pdy} = e^{\frac{-y\sqrt{2}}{g}}$; ainſi $ds = e^{\frac{-y\sqrt{2}}{g}}(gdu - (u\sqrt{2} + 2y - 2x) dy)$, $s = e^{\frac{-y\sqrt{2}}{g}} g(u - x\sqrt{2} + y\sqrt{2} + g)$; ce qui donne $\sigma = \phi(P \cdot e^{\frac{-y\sqrt{2}}{g}}(u - x\sqrt{2} + y\sqrt{2} + g) + Q)$; P & Q étant des fonctions de x ſeule. Soit $dP = P'dx$, $dQ = Q'dx$: en différentiant par u & x on aura

* Calcul différ, & intég. par M. *Couſin* page 202 de la première édition, & N°. 274 de la ſeconde.

$$\left(P'e^{\frac{-y\sqrt{2}}{g}}(u - x\sqrt{2} + y\sqrt{2} + g) + Q' - Pe^{\frac{-y\sqrt{2}}{g}}\sqrt{2}\right)\frac{d\sigma}{du} - Pe^{\frac{-y\sqrt{2}}{g}}\frac{d\sigma}{dx} = 0\,;$$

& en comparant ce résultat avec la troisième des équations ci-dessus où σ n'a aussi varié que par u & x, après avoir multiplié celle-ci par le facteur indéterminé ω, le terme $\frac{d\sigma}{dx}$ donnera $Pe^{\frac{-y\sqrt{2}}{g}} = -\omega$. Mettons cette valeur dans le coèfficient de $\frac{d\sigma}{du}$, & comparant ce dernier avec celui $\omega\sqrt{2}$ de la même équation, il résultera

$$P'e^{\frac{-y\sqrt{2}}{g}}(u - x\sqrt{2} + y\sqrt{2} + g) + Q' = 0.$$

Or P & Q ne peuvent contenir que x; il faut donc que P' & Q' soient $= 0$; d'où P & Q sont constans; c'est-à-dire, $P = 1$, & $Q = 0$. On a donc enfin

$$\sigma = \phi\left(e^{\frac{-y\sqrt{2}}{g}}(u - x\sqrt{2} + y\sqrt{2} + g)\right);$$

& conséquemment l'intégrale cherchée est

$$e^{\frac{-y\sqrt{2}}{g}}(u - x\sqrt{2} + y\sqrt{2} + g) = const.$$

2. Soit maintenant l'équation à quatre variables

$$adx + bdy + cdu + gdt = 0.$$

L'ayant encore multipliée par μ, & supposant le premier membre dans ce nouvel état $= d\sigma$, je conclurai comme ci-dessus, les six équations suivantes, dont j'intégrerai l'une, & deux autres quelconques me serviront d'équations de comparaison pour déterminer les fonctions P & Q qui, dans ce cas-ci, contiendront deux des quatre variables. Ces six équations sont... (G)

$a\frac{d\sigma}{dy} - b\frac{d\sigma}{dx} = 0$; $a\frac{d\sigma}{du} - c\frac{d\sigma}{dx} = 0$; $a\frac{d\sigma}{dt} - g\frac{d\sigma}{dx} = 0$; $b\frac{d\sigma}{du} - c\frac{d\sigma}{dy} = 0$; $b\frac{d\sigma}{dt} - g\frac{d\sigma}{dy} = 0$; $c\frac{d\sigma}{dt} - g\frac{d\sigma}{du} = 0$.

Qu'on ſe propoſe, par exemple, de trouver le facteur * B de ... (E)

$$dx + \frac{(y+x-p-q-xy)\ dy + 2dp + 2dq}{y+x+p+q+xy},$$

que je n'avois pu parvenir à déterminer. Il ſuffit évidemment pour cela d'intégrer l'équation ... (F)

$$(y+x+t+u+xy)\,dx + (y+x-t-u-xy)\,dy + 2dt + 2du = 0;$$

où j'ai ſubſtitué t & u à p & q, afin d'avoir les mêmes lettres que dans les formules. On a donc ici $a = y+x+t+u+xy$; $b = y+x-t-u-xy$; $c = 2$, $g = 2$. J'intègre la ſeconde des équations ci-deſſus, ſavoir $(y+x+t+u+xy)\frac{d\sigma}{du} - 2\frac{d\sigma}{dx} = 0$; & je trouve $\sigma = f:s$, ds étant $= \mu[(y+x+t+u+xy)\,dx + 2du]$, dont il faut chercher le facteur μ, en ne regardant que x & u comme variables. Pour faciliter cette opération, je fais d'abord $y+t = h$ & $y+1 = m$; ce qui transforme cette expreſſion en $(h+u+mx)\,dx + 2du$. Soit encore $h+mx = mz$, d'où $dx = dz$; elle deviendra $(u+mz)\,dz + 2du$, dont le facteur eſt $e^{\frac{z}{2}}$. Ainſi

$$s = 2e^{\frac{z}{2}}u + \int me^{\frac{z}{2}}z\,dz = 2e^{\frac{h+mx}{2m}}(u+h+mx-2m);$$

& enfin $s = 2e^{\frac{y+t+x+xy}{2(y+1)}}(u+t-y+xy+x-2)$. Je ferai donc

$$\text{(H)} \ldots \sigma = F\left(P.e^{\frac{xy+x+y+t}{2(y+1)}}(xy+x-y+t+u-2) + Q\right),$$

* Voyez 1er recueil page 193.

en obſervant qu'ici P & Q ſont fonctions des deux variables y & t qui ont été traitées comme conſtantes dans l'équation que j'ai employée ; c'eſt-à-dire, que j'aurai $dP = P'dy + p'dt$, $dQ = Q'dy + q'dt$. Maintenant ſi de l'équation H on fait diſparoître la fonction arbitraire, en différentiant par t & u, & qu'on compare le réſultat avec l'équation analogue qui eſt la dernière de celles G, on en déduira

$$(\mathrm{I}) \ldots e^{\frac{xy+x+y+t}{2(y+1)}} (xy + x - y + t + u - 2) \left(\frac{P}{2(y+1)} + p' \right) + q' = 0 ;$$

& de même, en différentiant encore H par u & y, & en comparant le réſultat avec ſon analogue dans les mêmes équations, qui eſt la quatrième, après avoir multiplié celle-ci par un facteur indéterminé ω, on aura les deux équations ſuivantes, dans leſquelles j'ai repréſenté celle H par $\sigma = F[Pe^{k}(R) + Q]$; ſavoir,

$(\mathrm{K}) \ldots 2\omega = Pe^{k}$, &

$$\omega(y + x - t - u - xy) = Pe^{k}(x - 1) + P(R)e^{k} \frac{1-t}{2(y+1)^2} + e^{k}(R)P' + Q'.$$

Maintenant celle I donne évidemment $q' = 0$ & $\frac{P}{2(y+1)} + p' = 0$, puiſque P & Q ne peuvent contenir que y & t. Donc $Q = \phi : y$; & enſuite $\frac{P}{2(y+1)} + \frac{dP}{dt} = 0$ qui, étant multipliée par $e^{\frac{t}{2(y+1)}} dt$ & intégrée, donne $e^{\frac{t}{2(y+1)}} P = F : y$ & $P = \frac{F : y}{e^{\frac{t}{2(y+1)}}}$.

Il ne s'agit donc plus que de connoître $\phi : y$ & $F : y$; & pour cela nous avons les deux équations K qui, par l'élimination de ω, ſe réduiſent à

$$Pe^{k}\left(2x-2+(R)\frac{1-t}{(y+1)^2}-(y+x-t-u-xy)\right)+2e^{k}P'(R)+2Q'=0;$$

& qu'on peut mettre ſous la forme...(L)

$$Pe^{k}(R)\left(1+\frac{1-t}{(y+1)^2}\right)+2e^{k}P'(R)+2Q'=0.$$

Or P & Q ne doivent contenir aucune des deux variables u & x qui ſe trouvent dans k & dans (R); Donc on ne peut ſatisfaire à l'équation L, qu'en faiſant $Q'=0$ & $P\left(1+\frac{1-t}{(y+1)^2}\right)+2P'=0$. On conclut de la première, $\frac{dQ}{dy}=0$ & $Q=\phi:y=$ *conſt.* ou $=0$. Enſuite $P[(y+1)^2+1-t]+2(y+1)^2\frac{dP}{dy}=0$ donne par l'intégration,

$$\log. P=\text{f}:t+\frac{1-t-(y+1)^2}{2(y+1)} \text{ ou } P=f:t\times e^{\frac{1-t-(y+1)^2}{2(y+1)}}.$$

Mais nous avons trouvé précédemment $P=\dfrac{F:y}{e^{\frac{t}{2(y+1)}}}$; égalant donc entr'elles ces deux expreſſions, nous aurons

$$F:y=f:t\times e^{\frac{-2y-y^2}{2(y+1)}},$$

expreſſion abſurde, à moins que $f:t$ ne ſoit une conſtante, ou ce qui eſt plus ſimple, l'unité. On aura donc

$$F:y=e^{\frac{-2y-y^2}{2(y+1)}} \;\&\; P=e^{\frac{1-t-(y+1)^2}{2(y+1)}}.$$

D'ailleurs nous avons trouvé plus haut $Q=0$; ainſi tout eſt déterminé & l'intégrale complète de l'équation H devient, après les réductions,

$$\sigma=F\left(e^{\frac{1}{2}(x-y)}(xy+x-y+t+u-2)\right).$$

On a donc enfin, pour celle de F, en remettant p & q au lieu de t & u,

ſeuls ſe rapporte le ſigne $\int$, on auroit $dc = \frac{da}{du} dx + \frac{db}{du} dy$; c'eſt-à-dire $\frac{dc}{dx} = \frac{da}{du}$ & $\frac{dc}{dy} = \frac{db}{du}$; ce qui joint à la première $\frac{da}{dy} = \frac{d}{dx}$, forme les trois équations ordinaires pour ce cas.

Lorſque la fonction contient quatre variables, comme $adx + bdy + cdu + gdt$, on commencera de même par dire que trois quelconques de ces quatre termes doivent être une différentielle exacte à trois variables, en regardant la quatrième comme conſtante. On aura donc encore

$$g = \frac{d \cdot \int (adx + bdy + cdu)}{dt} = \int \frac{d(adx + bdy + cdu)}{dt},$$

d'où résultera $\frac{dg}{dx} = \frac{da}{dt}$, $\frac{dg}{dy} = \frac{db}{dt}$, $\frac{dg}{du} = \frac{dc}{dt}$; & ainſi de ſuite, à meſure que le nombre des variables augmentera.

On a regardé long-tems les équations qui ne ſatisfont point aux formules d'intégrabilité, comme des réſultats abſurdes. La conſéquence eût été juſte, ſi l'intégrale d'une équation différentielle entre pluſieurs variables n'eût pu être donnée que par une ſeule équation de l'ordre immédiatement inférieur. Mais on s'eſt enfin apperçu que ces équations réputées non intégrables, ont une intégrale exprimée par un ſyſtème de pluſieurs équations ſimultanées. * Ce ſujet me paroît mériter encore toute l'attention des gèomètres.

4. Quant à la formule $Adx + Bdy$ qui ſert de baſe à cette méthode, tous les analyſtes s'accordent à admettre qu'il exiſte toujours un facteur propre à la rendre une différentielle exacte. Il faut cependant convenir qu'on n'en a pas la démonſtration. Il eſt vrai que

* Voyez calc. diff. & calc. intég. par S. F. *Lacroix* tome 2 art. 798, & le Ier. recueil de ces mélanges page 211.

lorsqu'on cherche l'expression de ce facteur, on aboutit à une seule équation aux différences partielles, sans aucune équation de condition accessoire. Aussi peut-on dire avec certitude qu'à cet égard la formule $Adx + Bdy$ est toujours, par sa propre nature, dans les mêmes circonstances que les formules de trois ou plusieurs variables qui satisfont aux équations de condition à l'intégrabilité *médiate* (j'entends par-là la propriété de devenir une différentielle exacte au moyen d'un facteur, par opposition à l'intégrabilité *immédiate* qui n'appartient qu'aux formules qui dans leur état actuel se trouvent être de pareilles différentielles). Ainsi toute formule $Adx + Bdy$ est, par sa nature même, propre à recevoir ce facteur. Mais celui-ci existe-t-il toujours? L'équation aux différences partielles qui, comme nous venons de dire, renferme son expression, laisse cette question tout-à-fait indécise; puisque son intégration dépend elle-même de ce facteur.

On démontre à la vérité * qu'on peut toujours construire l'équation $Adx + Bdy = 0$; mais il reste encore à prouver que toute pareille équation construite; c'est-à-dire, toute courbe décrite dans un même plan selon ce procédé a nécessairement une équation finie, entre deux variables, algébrique ou transcendante, propre à la représenter. Car on pourroit alors regarder comme démontré que la formule $Adx + Bdy$ a toujours un facteur convenable réellement existant. En effet par quelque moyen qu'on soit parvenu d'une équation différentielle $Adx + Bdy = 0$ à une équation finie $K = c$ qui en est l'intégrale, la première deviendra toujours une

* Voyez traité du calcul intég. par M. De Bougainville, seconde partie page 27.

différentielle exacte au moyen d'un facteur ; puisque si on différentie l'intégrale trouvée $K = c$, il est évident que $dK = 0$ ne peut différer de $Adx + Bdy = 0$ que par un facteur ; sans quoi ces deux équations ne seroient plus la même.

Quant à l'unité d'équation & au nombre de deux variables, la manière dont M. *De Bougainville* conçoit la construction de cette courbe suffit pour prouver que, s'il existe un moyen de définir analytiquement sa nature, ce ne peut être que par une seule équation entre x & y. En effet (*fig.* Z) ayant tiré dans l'espace deux lignes qui se coupent à angle droit au point A, il fixe arbitrairement une longueur Aa pour une des abscisses x dont il place l'origine en a ; & celle Ab pour l'ordonnée correspondante y. Prenant ensuite une ligne infiniment petite pour $dx =$ Ac, il conclut, de l'équation $Adx + Bdy = 0$, la valeur de 6d. Ayant ainsi déterminé une seconde ordonnée cd, il part de celle-ci pour construire de même la troisième ; & ainsi de suite. Il est donc évident par ce procédé, que la loi qui règne entre les co-ordonnées, ne dépend absolument que de x & y ; & conséquemment qu'aucune autre variable ne doit concourir à la définition analytique de cette courbe.

Toute la difficulté se réduiroit donc à savoir s'il existe toujours une expression analytique propre à représenter un système de rapports tous dépendans d'une même loi uniforme. Mais j'abandonne cette question qui finiroit par appartenir à la métaphysique ; & je termine cette digression par une observation importante sur le procédé ci-dessus ; savoir, qu'il est également applicable aux équations entre deux variables d'un ordre quelconque.

5. En effet, soit l'équation du second ordre $d^2y = mdx^2$ où

m contient x, y & $p = \frac{dy}{dx}$. Ayant pris à volonté a A $= x$, A B $= y$, A c $= dx$, ϐd $= dy$, on aura d^2y déterminé; c'eſt-à-dire, i f; & conſéquemment γf, & enfin ef. De même de ac $= x$, cd $= y$, ce $=$ Ac $= dx$, & γf $= dy$ qui ſont tous déterminés par l'opération précédente, on déduira oh, & conſéquemment δh & gh; & ainſi de ſuite, pour tous les points dont cette courbe eſt le lieu. L'unique différence qu'il y ait entre ce cas-ci & le premier eſt, qu'au-lieu d'un ſeul point arbitraire b, on en a ici deux b & d; ce qui s'accorde parfaitement avec les deux conſtantes qu'une équation du ſecond ordre admet dans ſon intégrale finie. L'application ultérieure de ce procédé aux ordres ſuivans eſt trop évidente pour m'y arrêter; & je reviens à mon ſujet.

6. Il me reſte à faire voir que cette méthode réuſſira également, quel que ſoit le nombre *n* des variables x, y, u, t, z, ... w. Soit donc

$$adx + bdy + cdu + gdt + hdz + \ldots\ldots rdw = 0.$$

J'en déduirai $\frac{1}{2} n (n - 1)$ équations G comme ci-deſſus, parmi leſquelles j'en choiſirai une à volonté, que je nomme l'équation *principale*, pour l'intégrer; & les autres me fourniront les équations de comparaiſon néceſſaires pour déterminer P & Q qui contiendront en général les $n - 2$ variables qui ont été traitées comme conſtantes dans l'équation principale. Suppoſons qu'on ait pris pour telle celle où x & u varient; ſavoir, $a\frac{d\sigma}{du} - c\frac{d\sigma}{dx} = 0$. J'en conclûrai d'abord

$$\sigma = \phi[\int\mu(adx + cdu)] \text{ qui ſoit } = \phi:\Pi.$$

La valeur complète de σ ſera donc $\sigma = \phi(P\Pi + Q)$. Maintenant

pour déterminer P & Q, je différentie cette formule ſucceſſivement par chacune des variables qui ont été traitées comme conſtantes, combinée avec l'une de celles x & u qui ont varié dans l'équation principale, afin d'en comparer reſpectivement chacun des réſultats avec celle des formules G qui lui eſt analogue. Si je choiſis de préférence cette combinaiſon d'une variable contenue dans P & Q avec une de celles qui ne le ſont point, ce n'eſt que pour obtenir des réſultats plus ſimples, comme il eſt aiſé de s'en appercevoir. J'aurai donc en différentiant ſucceſſivement la formule par u & y, par u & t, par u & z, &c. & ſuppoſant

$$dP = p\,dy + p'dt + p''dz \ldots\ldots + p^{n-3}\,dw,$$
$$dQ = q\,dy + q'dt + q''dz \ldots\ldots + q^{n-3}\,dw;$$

j'aurai, dis-je,

$$\left(P\frac{d\Pi}{dy} + \Pi p + q\right)\frac{d\sigma}{du} - P\,\frac{d\Pi}{du}\,\frac{d\sigma}{dy} = 0,$$
$$\left(P\frac{d\Pi}{dt} + \Pi p' + q'\right)\frac{d\sigma}{du} - P\,\frac{d\Pi}{du}\,\frac{d\sigma}{dt} = 0,$$
$$\left(P\frac{d\Pi}{dz} + \Pi p'' + q''\right)\frac{d\sigma}{du} - P\,\frac{d\Pi}{du}\,\frac{d\sigma}{dz} = 0,$$

&c.,

que je comparerai reſpectivement avec les équations analogues G, après avoir multiplié celles-ci, chacune par un facteur indéterminé ω, θ, ξ, &c.; ſavoir,

$$\omega b\,\frac{d\sigma}{du} - \omega c\,\frac{d\sigma}{dy} = 0;\ \theta c\,\frac{d\sigma}{dt} - \theta g\,\frac{d\sigma}{du} = 0;\ \xi c\,\frac{d\sigma}{dz} - \xi h\,\frac{d\sigma}{du} = 0;\ \&c.$$

La comparaiſon terme à terme des deux premières me donne, en éliminant ω,

$$c\left(P\frac{d\Pi}{dy} + \Pi p + q\right) = bP\frac{d\Pi}{du};$$ ou en réduisant,

$$\left(c\frac{d\Pi}{dy} - b\frac{d\Pi}{du}\right)P + c\Pi p + cq = 0;$$

& je trouve de même, par la comparaison des autres,

$$\left(c\frac{d\Pi}{dt} - g\frac{d\Pi}{du}\right)P + c\Pi p' + cq' = 0$$

$$\left(c\frac{d\Pi}{dz} - h\frac{d\Pi}{du}\right)P + c\Pi p'' + cq'' = 0,$$

&c.

Or les coëfficiens de P, p, p', p'', &c., q, q', q'', &c. contiennent en général les lettres u, x, qui ne doivent se trouver ni dans P ni dans Q; donc ces équations ne pourront avoir lieu, qu'autant qu'elles seront susceptibles d'être partagées, chacune en deux autres, dont la première établisse respectivement un rapport entre P & p, entre P & p', entre P & p'', &c.; & dont la seconde en établisse pareillement un entre P & q, entre P & q', entre P & q'', &c.; ces deux portions étant déterminées par la condition que les deux lettres qui ne doivent pas compliquer les valeurs de P & de Q, ne se rencontrent plus que sous la forme d'un facteur commun à tous les termes de ces portions, de manière qu'elles en disparoissent entièrement par la division. Si on avoit, par exemple, l'équation

$$(y + x + t + u + ty)\,P - 2\,(x + u)\,p - 2q = 0,$$

on voit qu'on pourroit la partager en deux autres;

$(x + u)\,P - 2\,(x + u)\,p = 0$; & $(y + t + ty)\,P - 2q = 0$.

Cela posé, la première $P - 2\frac{dP}{dy} = 0$ détermineroit P en y; & de même les équations suivantes acheveroient de la déterminer com-

plètement par rapport aux autres variables. P étant une fois connue, les équations entre P & q, q', q'', &c. donneront auffi l'expreffion de Q. Ainfi le nombre des variables ne fera jamais un obftacle à la réuffite de cette méthode.

CHAPITRE SECOND.

Sur l'intégration d'un fyftème de n *équations du premier ordre entre* n + 1 *variables.*

7. J'AI commencé à développer cette théorie dans le fecond mémoire du recueil précédent. Je la reprens ici en fon entier, afin de raffembler tout ce que j'ai à dire fur cette matière. Soit d'abord un fyftème de deux équations (A) . . . . $\alpha dz + \beta dx = 0$, $\zeta dy + \eta dx = 0$. J'ai fait voir (*mem. cité* § 6) que l'intégrale d'un pareil fyftème eft néceffairement donnée par deux équations $A =$ *conft.*, $B =$ *conft.*, A & B contenant z, y & x. Je conclus donc, en différentiant ces dernières, . . . (B)

$$\frac{dA}{dz}dz + \frac{dA}{dy}dy + \frac{dA}{dx}dx = 0,$$

$$\frac{dB}{dz}dz + \frac{dB}{dy}dy + \frac{dB}{dx}dx = 0.$$

J'élimine enfuite fucceffivement dy & dz, afin d'avoir les deux équations . . . (C)

$$\left(\frac{dA}{dz}\frac{dB}{dy} - \frac{dA}{dy}\frac{dB}{dz}\right)dz + \left(\frac{dA}{dx}\frac{dB}{dy} - \frac{dA}{dy}\frac{dB}{dx}\right)dx = 0,$$

$$\left(\frac{dA}{dz}\frac{dB}{dy} - \frac{dA}{dy}\frac{dB}{dz}\right)dy + \left(\frac{dA}{dz}\frac{dB}{dx} - \frac{dA}{dx}\frac{dB}{dz}\right)dx = 0,$$

que je compare terme [redacted] propofées A, après

avoir multiplié celles-ci, chacune par un facteur indéterminé g, h ; & j'en déduis les deux paires d'équations... (D)

$$1^o.\ \frac{dA}{d\zeta}\frac{dB}{dy}-\frac{dA}{dy}\frac{dB}{d\zeta}=g\alpha;\quad 1^o.\ \frac{dA}{d\zeta}\frac{dB}{dy}-\frac{dA}{dy}\frac{dB}{d\zeta}=h\zeta;$$

$$2^o.\ \frac{dA}{dx}\frac{dB}{dy}-\frac{dA}{dy}\frac{dB}{dx}=g\epsilon;\quad 2^o.\ \frac{dA}{d\zeta}\frac{dB}{dx}-\frac{dA}{dx}\frac{dB}{d\zeta}=h\eta.$$

Des deux n°. 1°. résulte d'abord $g\alpha - h\zeta = 0$; & éliminant ensuite des deux n°. 2°. $\frac{dA}{dx}$, j'ai

$$\left(\frac{dA}{d\zeta}\frac{dB}{dy}-\frac{dA}{dy}\frac{dB}{d\zeta}\right)\frac{dB}{dx}=g\epsilon\frac{dB}{d\zeta}+h\eta\frac{dB}{dy};$$

d'où, mettant pour le coëfficient du premier membre sa valeur $g\alpha$ tirée de la première équation D, & multipliant le résultat par ζ; substituant de plus $g\alpha$ à $h\zeta$, & divisant enfin par g, j'obtiens celle (E)... $\epsilon\zeta\frac{dB}{d\zeta}+\alpha\eta\frac{dB}{dy}-\alpha\zeta\frac{dB}{dx}=0$, qu'il ne faut plus qu'intégrer. Et comme cette intégrale sera de la forme $B=f(\Pi,\Omega)$, & que A est donnée par une équation tout-à-fait semblable, il s'ensuit que l'intégrale des deux proposées sera $(\Pi,\Omega)=$ *const.*, & $[\Pi,\Omega]=$ *const.*; ces deux expressions désignant des fonctions quelconques déterminées de Π & Ω; ou simplement $\Pi=$ *const.* & $\Omega=$ *const.* J'ai donné à l'art. 7 du mémoire cité une application à un exemple auquel je renvoye le lecteur.

8. Supposons présentement que le système à intégrer contienne trois équations entre les quatre variables ζ, y, u & x; savoir, (F)... $\alpha d\zeta+\epsilon dx=0$, $\zeta dy+\eta dx=0$, $\lambda du+\mu dx=0$; & que l'intégrale soit donnée par les trois équations $A=$ *const.*, $B=$ *const.*, $C=$ *const.*, A, B & C étant fonctions des quatre variables ci-

dessus

dessus. Je commencerai encore par les différentier; ce qui me donnera...(G)

$$\frac{dA}{dz}\,dz + \frac{dA}{dy}\,dy + \frac{dA}{du}\,du + \frac{dA}{dx}\,dx = 0,$$

Et de même pour B & C.

Eliminant ensuite successivement, de ces trois dernières équations, dy & du; dz & du; & enfin dz & dy, j'en aurai trois nouvelles (H) de la même forme que les proposées F.

Pour opérer plus facilement cette élimination, j'employe la méthode de Bézout, & les trois résultats auxquels je parviens sont, aux lettres près, les mêmes que ceux du tableau G du mémoire cité, après avoir fait dans ceux-ci les réductions nécessaires, & les avoir dégagés de leurs facteurs inutiles. Je compare ensuite ces résultats H terme à terme avec les trois proposées que je multiplie d'abord, chacune par un des facteurs g, h, l; ce qui me fournit les trois paires d'équations suivantes (I), dont les trois n°. 1°. peuvent s'exprimer par la formule *triforme*

$$\frac{dA}{dz}\overset{\text{c}}{\left(\frac{dB}{dy}\frac{dC}{du}-\frac{dB}{du}\frac{dC}{dy}\right)}+\frac{dA}{dy}\overset{-\text{e}}{\left(\frac{dB}{du}\frac{dC}{dz}-\frac{dB}{dz}\frac{dC}{du}\right)}+\frac{dA}{du}\overset{\text{f}}{\left(\frac{dB}{dz}\frac{dC}{dy}-\frac{dB}{dy}\frac{dC}{dz}\right)}=\begin{cases}+g\alpha\\-h\zeta\\+l\lambda\end{cases}$$

& ensuite n°. 2°.

$$\frac{dA}{dy}\overset{\text{a}}{\left(\frac{dB}{du}\frac{dC}{dx}-\frac{dB}{dx}\frac{dC}{du}\right)}+\frac{dA}{du}\overset{\text{b}}{\left(\frac{dB}{dx}\frac{dC}{dy}-\frac{dB}{dy}\frac{dC}{dx}\right)}+\frac{dA}{dx}\overset{\text{c}}{\left(\frac{dB}{dy}\frac{dC}{du}-\frac{dB}{du}\frac{dC}{dy}\right)}=g\varepsilon,$$

$$\frac{dA}{dz}\overset{\text{a}}{\left(\frac{dB}{du}\frac{dC}{dx}-\frac{dB}{dx}\frac{dC}{du}\right)}+\frac{dA}{du}\overset{\text{d}}{\left(\frac{dB}{dx}\frac{dC}{dz}-\frac{dB}{dz}\frac{dC}{dx}\right)}+\frac{dA}{dx}\overset{\text{e}}{\left(\frac{dB}{dz}\frac{dC}{du}-\frac{dB}{du}\frac{dC}{dz}\right)}=h\eta,$$

$$\frac{dA}{dz}\overset{-\text{b}}{\left(\frac{dB}{dy}\frac{dC}{dx}-\frac{dB}{dx}\frac{dC}{dy}\right)}+\frac{dA}{dy}\overset{\text{d}}{\left(\frac{dB}{dx}\frac{dC}{dz}-\frac{dB}{dz}\frac{dC}{dx}\right)}+\frac{dA}{dx}\overset{\text{f}}{\left(\frac{dB}{dz}\frac{dC}{dy}-\frac{dB}{dy}\frac{dC}{dz}\right)}=l\mu,$$

chacun des petits caractères *romains* qui sont au-dessus des coëf-

ficiens binomes, étant destiné à représenter ce même binome dans les calculs suivans, afin de les simplifier. On aura donc, en vertu des trois équations n°. 2°.,... (K)

$$\mathrm{a}\,\frac{dA}{dy}+\mathrm{b}\,\frac{dA}{du}+\mathrm{c}\,\frac{dA}{dx}=g\beta,$$
$$\mathrm{a}\,\frac{dA}{dz}+\mathrm{d}\,\frac{dA}{du}+\mathrm{e}\,\frac{dA}{dx}=h\eta,$$
$$-\mathrm{b}\,\frac{dA}{dz}+\mathrm{d}\,\frac{dA}{dy}+\mathrm{f}\,\frac{dA}{dx}=l\mu;$$

d'où combinant la première avec la seconde, & puis celle-ci avec la troisième, afin d'éliminer $\frac{dA}{dx}$, & observant que $\mathrm{be}-\mathrm{cd}=-\mathrm{af}$, & conséquemment aussi $\mathrm{af}+\mathrm{be}=\mathrm{cd}$, on conclura... (L)

$$\mathrm{e}g\beta-\mathrm{c}h\eta+\mathrm{a}\left(\mathrm{c}\,\frac{dA}{dz}-\mathrm{e}\frac{dA}{dy}+\mathrm{f}\frac{dA}{du}\right)=0,\ \&$$
$$\mathrm{f}h\eta-\mathrm{e}l\mu-\mathrm{d}\left(\mathrm{c}\,\frac{dA}{dz}-\mathrm{e}\frac{dA}{dy}+\mathrm{f}\frac{dA}{du}\right)=0.$$

Mettant ensuite, pour ce trinome qui est le premier membre du n°. 1°. des équations I, une de ses trois valeurs; & faisant disparoître les indéterminées g, h, l, par la permutation de ces mêmes valeurs entr'elles, on parviendra enfin aux deux équations... (M)

$$\beta\zeta\mathrm{e}+\eta\alpha\mathrm{c}+\alpha\zeta\mathrm{a}=0,$$
$$\eta\lambda\mathrm{f}+\mu\zeta\mathrm{e}+\zeta\lambda\mathrm{d}=0,$$

qui ne renferment plus la lettre A. Maintenant pour éliminer encore une des autres lettres, par exemple C, on remettra, au-lieu de a, c, d, e, f, leurs expressions, & on verra aisément qu'on peut ordonner ces deux équations de la manière suivante... (N)

$$\beta\zeta\frac{dB}{du}\frac{dC}{dz}+\eta\alpha\frac{dB}{du}\frac{dC}{dy}+\left(\alpha\zeta\frac{dB}{dx}-\eta\alpha\frac{dB}{dy}-\beta\zeta\frac{dB}{dz}\right)\frac{dC}{du}-\alpha\zeta\frac{dB}{du}\frac{dC}{dx}=0,$$
$$\left(\eta\lambda\frac{dB}{dy}+\mu\zeta\frac{dB}{du}-\lambda\zeta\frac{dB}{dx}\right)\frac{dC}{dz}-\eta\lambda\frac{dB}{dz}\frac{dC}{dy}-\mu\zeta\frac{dB}{dz}\frac{dC}{du}+\lambda\zeta\frac{dB}{dz}\frac{dC}{dx}=0;$$

dont on multipliera la première par $\lambda \frac{dB}{dz}$, & la feconde par $\alpha \frac{dB}{du}$: les additionnant enfuite & divifant leur fomme par $\frac{dC}{dz}\frac{dB}{du} - \frac{dC}{du}\frac{dB}{dz}$, on obtiendra enfin l'équation finale . . . (O)

$$\epsilon\lambda\zeta \frac{dB}{dz} + \alpha\lambda\eta \frac{dB}{dy} + \alpha\mu\zeta \frac{dB}{du} - \alpha\lambda\zeta \frac{dB}{dx} = 0.$$

La route que je viens de fuivre eft plus directe que celle que j'avois prife dans le mémoire cité (§ 13), mais les deux réfultats font les mêmes. C'eft ici le lieu de convenir franchement de l'inadvertance qui m'eft échappée en cet endroit. * J'ai été trompé par la complication apparente de l'équation M, dont avec un peu d'attention il eût cependant été facile de démêler la véritable forme. Il ne falloit en effet que multiplier tous les termes par C ; fubftituer enfuite $-gA$ à nC (*équat.* H) ; & enfin divifer cette transformée par $mgE \frac{dK}{du} + g^2A \frac{dK}{dz}$, pour en conclure l'équation

$$BCE \frac{dK}{dz} + ADE \frac{dK}{dy} + ACG \frac{dK}{du} - ACE \frac{dK}{dx} = 0$$

qui coïncide abfolument avec celle O ci-deffus, & qui eft entièrement conforme au réfultat que j'avois annoncé (*mém. cité* § 12).

9. Il fuffit de comparer la multiplicité d'opérations qu'a exigées cette dernière intégration, avec la fimplicité de celle de l'art. 6 qui contenoit une variable de moins, pour juger de la complication qu'introduira, dans les calculs, l'augmentation ultérieure d'une variable. Mais en examinant l'équation finale de l'article cité &

* Croyant d'après les indices, que les calculs alloient fe compliquer confidérablement, je m'étois contenté d'indiquer la route qui menoit au réfultat final. Ce ne fut que pendant le cours de l'impreffion, & au moment même de livter cette feuille au compofiteur, que je me déterminai à développer entièrement l'opération.

nant la variable principale B) de la forme

$$\mathrm{A}\,\frac{dB}{dz}+\mathrm{B}\,\frac{dB}{dy}+\mathrm{C}\,\frac{dB}{du}+\mathrm{D}\,\frac{dB}{dw}\ldots\ldots+\mathrm{L}\,\frac{dB}{dx}=0,$$

dont les coëfficiens A, B, &c. fe détermineront d'après la règle donnée ci-deffus (§ 9), en fe rappellant bien la différence que nous avons établie entre x & les autres variables.

12. J'ai fuppofé jufqu'ici que le nombre des variables ne furpaffoit que d'une unité celui des équations ; mais il peut arriver que cette différence r foit de 2, 3 &c. unités. Commençons par l'hypothèfe de $r=2$; c'eft-à-dire de deux équations...(P)

$$\alpha\,dz+\gamma\,dt+\epsilon\,dx=0,\quad \zeta\,dy+\vartheta\,dt+\eta\,dx=0,$$

entre les quatre variables z, y, t & x : car il eft évident qu'on pourra toujours ramener à cette forme deux pareilles équations. Je repréfente l'intégrale de ce fyftème par celui $A=conft.$, $B=conft.$, A & B étant fonctions des quatre variables ci-deffus ; & j'en conclus, par la différentiation,

$$\frac{dA}{dz}\,dz+\frac{dA}{dy}\,dy+\frac{dA}{dt}\,dt+\frac{dA}{dx}\,dx=0$$

& de même pour B.

Éliminant enfuite fucceffivement dy & dz, je parviens aux deux réfultats

$$\left(\frac{dA}{dz}\frac{dB}{dy}-\frac{dA}{dy}\frac{dB}{dz}\right)dz+\left(\frac{dA}{dt}\frac{dB}{dy}-\frac{dA}{dy}\frac{dB}{dt}\right)dt+\left(\frac{dA}{dx}\frac{dB}{dy}-\frac{dA}{dy}\frac{dB}{dx}\right)dx=0$$

$$\left(\frac{dA}{dz}\frac{dB}{dy}-\frac{dA}{dy}\frac{dB}{dz}\right)dy+\left(\frac{dA}{dz}\frac{dB}{dt}-\frac{dA}{dt}\frac{dB}{dz}\right)dt+\left(\frac{dA}{dz}\frac{dB}{dx}-\frac{dA}{dx}\frac{dB}{dz}\right)dx=0$$

qui font de la même forme que les deux propofées ; & avec lefquelles je compare celles-ci terme à terme, après les avoir multipliées chacune par un des deux facteurs indéterminés g, h. Cette comparaifon me fournit les deux féries fuivantes.....(Q)

$$1^o.\ \frac{dA}{dz}\frac{dB}{dy}-\frac{dA}{dy}\frac{dB}{dz}=g\alpha \qquad 1^o.\ \frac{dA}{dz}\frac{dB}{dy}-\frac{dA}{dy}\frac{dB}{dz}=h\zeta$$

$$2^o.\ \frac{dA}{dt}\frac{dB}{dy}-\frac{dA}{dy}\frac{dB}{dt}=g\gamma \qquad 2^o.\ \frac{dA}{dz}\frac{dB}{dt}-\frac{dA}{dt}\frac{dB}{dz}=h\vartheta$$

$$3^o.\ \frac{dA}{dx}\frac{dB}{dy}-\frac{dA}{dy}\frac{dB}{dx}=g\epsilon \qquad 3^o.\ \frac{dA}{dz}\frac{dB}{dx}-\frac{dA}{dx}\frac{dB}{dz}=h\eta,$$

dont les deux paires n^os^ 1°. & 3°. ſont exactement les mêmes que celles n^os^ 1°. & 2°. du ſyſtème D (§ 7). Le réſultat de leur combinaiſon ſera donc auſſi le même que celui E; & comme la paire n°. 2°. ne diffère de celle n°. 3°., qu'en ce que, dans la première, la variable x eſt remplacée par celle t, & que les coèfficiens ϵ, η le ſont par ceux γ, ϑ, on aura enfin, pour réſultat complet de ces ſix équations, . . . (R)

$$\gamma\zeta\frac{dB}{dz}+\alpha\vartheta\frac{dB}{dy}-\alpha\zeta\frac{dB}{dt}=0,\quad \epsilon\zeta\frac{dB}{dz}+\alpha\eta\frac{dB}{dy}-\alpha\zeta\frac{dB}{dx}=0.$$

13. La formation des coèfficiens de chacune de ces deux équations en particulier eſt évidemment la même que celle que j'ai expoſée (§ 9) pour le cas d'une ſeule équation. L'unique obſervation à ajouter ici, eſt que pour former la première d'entr'elles, on ſuppoſera les coèfficiens ϵ & η de dx égaux à zéro, en regardant t comme la ſeule variable *commune*; & au contraire, lorſqu'il s'agira de la ſeconde, on traitera x ſeule comme variable *commune*, en ſuppoſant nuls les coèfficiens γ & ϑ de dt.

Quant au ſyſtème R, il eſt du même genre que ceux que j'ai enſeigné à intégrer dans le premier mémoire du premier recueil de ces Mélanges (§ 59 . . . 63, 104). Ainſi ayant intégré l'une de ces deux équations, par exemple la première où x eſt conſtante, & ayant donné à ſon intégrale la forme indéterminée la plus éten-

due dont elle ſoit ſuſceptible, on la différentiera de nouveau par z, y & x; & en comparant le réſultat avec la ſeconde équation R, on déterminera les indéterminées.

14. Si nous paſſons maintenant au cas de trois équations entre les cinq variables z, y, u, t & x, ſavoir . . . (S)

$$\alpha dz + \gamma dt + \beta dx = 0,\ \zeta dy + \vartheta dt + \eta dx = 0,\ \lambda du + \nu dt + \mu dx = 0,$$

dont l'intégrale ſoit donnée par le ſyſtème $A = conſt.$, $B = conſt.$, $C = conſt.$, A, B & C contenant toutes ces variables, nous parviendrons par la comparaiſon terme à terme, après avoir multiplié les trois propoſées reſpectivement par les trois facteurs indéterminés g, h, l, à trois ſéries conſiſtant chacune en trois équations, & dont les nos. 1°. & 3°. ſeront entièrement conformes à ceux 1°. & 2°. du ſyſtème I (§ 8). Quant aux équations n°. 2°., elles ne différeront de celles n°. 3°., qu'en ce que la variable t y remplacera celle x, & les coëfficiens γ, ϑ, ν ceux β, η, μ. On aura donc encore ici, en vertu des nos. 1°. & 2°., les deux réſultats M; & enſuite deux autres réſultats qui ne différeront des précédens que par les deux caractères que nous venons d'aſſigner. Ainſi en faiſant a' & d' ce que deviennent a & d lorſqu'on y ſubſtitue t à x, le réſultat complet ſera . . . (T)

$$\gamma\zeta e + \vartheta\alpha c + \alpha\zeta a' = 0,$$
$$\vartheta\lambda f + \nu\zeta e + \zeta\lambda d' = 0,$$
$$\beta\zeta e + \eta\alpha c + \alpha\zeta a = 0,$$
$$\eta\lambda f + \mu\zeta e + \zeta\lambda d = 0;$$

& il ne s'agira plus que d'en éliminer une ſeconde lettre, par exemple C, comme nous avons fait (§ 8). Par cette opération on déduira néceſſairement des deux dernières équations T, le même

réſultat

réfultat final que celui O de l'article cité. De forte que la fonction B fera donnée par le fyftème des deux équations . . . (U)

$$\gamma\lambda\zeta \frac{dB}{dz} + \alpha\lambda\vartheta \frac{dB}{dy} + \alpha\nu\zeta \frac{dB}{du} - \alpha\lambda\zeta \frac{dB}{dt} = 0$$

$$\beta\lambda\zeta \frac{dB}{dz} + \alpha\lambda\eta \frac{dB}{dy} + \alpha\mu\zeta \frac{dB}{du} - \alpha\lambda\zeta \frac{dB}{dx} = 0$$

auxquelles on peut appliquer les obfervations de l'art. 13, tant relativement à la formation de leurs coèfficiens, que relativement à leur intégration.

15. Maintenant fi d'après ce que nous avons pratiqué à l'art. 10, nous fuppofons que la troifième des équations S n'exifte pas ; ce que nous exprimerons en faifant $\frac{dB}{du} = 0$ dans le fyftème U, il fe réduira à celui R (§ 12) ; & conféquemment celui S à celui P. Si nous fuppofons ultérieurement que la feconde des équations P s'anéantiffe, ou ce qui eft la même chofe, que dans le fyftème R on faffe $\frac{dB}{dy} = 0$, il fe réduira à celui

$$\gamma \frac{dB}{dz} - \alpha \frac{dB}{dt} = 0, \; \& \; \beta \frac{dB}{dz} - \alpha \frac{dB}{dx} = 0$$

qui (§ 1) appartient à une feule équation entre trois variables $\alpha dz + \gamma dt + \beta dx = 0$, & dans les coèfficiens duquel on retrouvera la formation indiquée (§ 10), en l'écrivant de la manière fuivante

$$\gamma\alpha \frac{dB}{dz} - \alpha\alpha \frac{dB}{dt} = 0, \; \& \; \beta\alpha \frac{dB}{dz} - \alpha\alpha \frac{dB}{dx} = 0,$$

où $\gamma\alpha$ eft le produit du coèfficient α de la différentielle dz par le feul coèfficient exiftant γ de la différentielle dt de la variable *commune* t ; & $\alpha\alpha$ le produit par lui-même du coèfficient α de la différentielle dz de la feule variable *particulière* exiftante z. Il en eft de même des deux autres coèfficiens $\beta\alpha$ & $\alpha\alpha$.

Nous conclurons de là, comme nous avons fait (§ 11), que la gradation que nous venons d'obſerver dans la formation des coëfficiens du réſultat final de ces trois hypothèſes les plus ſimples, devant avoir lieu ſucceſſivement pour toutes les hypothèſes ultérieures, la formation des coëfficiens ſera conſtamment conforme à celle que nous avons indiquée (§ 9) ; & que, quel que ſoit le nombre n des équations, & conſéquemment celui $n + 2$ des variables, les fonctions A, B, C, &c. ſeront toujours données par deux équations de la forme . . . . (V)

$$A' \frac{dB}{dz} + B' \frac{dB}{dy} + C' \frac{dB}{du} + D' \frac{dB}{dw} \ldots\ldots + L' \frac{dB}{dt} = 0,$$

$$A \frac{dB}{dz} + B \frac{dB}{dy} + C \frac{dB}{du} + D \frac{dB}{dw} \ldots\ldots + L \frac{dB}{dx} = 0,$$

dont les coëfficiens ſe formeront comme nous venons de dire, en y ajoutant l'obſervation particulière de l'art. 13.

16. Il ſeroit inutile de pouſſer plus loin ces recherches détaillées ſur les réſultats qu'on obtiendroit des différentes valeurs ſucceſſives de r (§ 12). Ce que nous avons dit juſqu'ici ſuffit pour nous mettre en état d'enviſager la queſtion dans ſa généralité. Au reſte on trouvera dans le ſecond mémoire du recueil précédent (§ 8), un exemple relatif au cas de deux équations entre cinq variables ; c'eſt-à-dire de $r = 3$. Suppoſons donc qu'on ait en général n équations différentielles du premier ordre entre $n + r$ variables ; & conſéquemment auſſi n équations finies $A = conſt.$, $B = conſt.$; $C = conſt.$; &c. On pourra toujours réduire chacune, tant des n propoſées, que des n équations de comparaiſon qu'on déduira des n équations finies, à contenir $n - 1$ différentielles de moins que leur totalité $n + r$; ce qui fixera, pour chacune d'elles,

le nombre de ces différentielles & conféquemment celui des termes à $r+1$. Il fuit auffi de là que de ces $r+1$ différentielles, une feule fera *particulière* à chacune des équations, & les autres feront *communes* à tout le fyftème. Maintenant fi on effectue la comparaifon terme à terme, chaque propofée fournira une férie de ce même nombre $r+1$ d'équations, & on aura conféquemment n pareilles féries. Combinant donc fucceffivement avec les n équations n°. 1°., toutes celles n°. 2°.; toutes celles n°. 3°.; &c., & éliminant par ce moyen toutes les fonctions A, B, C, &c. excepté une, par exemple B, on parviendra à un réfultat de $r+1-1$ ou r équations (c'eft-à-dire autant qu'il y a de variables de plus que d'équations) de la même forme que celles V ci-deffus, & dont les coëfficiens fe détermineront de la même manière, en obfervant toujours de bien diftinguer les variables *particulières* des variables *communes*, & conformément à ce qu'on a vu (§ 13), de ne confidérer dans chaque équation qu'une feule de ces dernières, en fuppofant pour cet inftant les coëfficiens de toutes les autres égaux à zéro.

Nous pouvons donc conclure généralement, en terminant ce chapitre, que quels que foient & le nombre n des équations différentielles du premier ordre qui compofent un fyftème, & celui $n+r$ des variables, l'intégration de ce fyftème ne préfentera d'autre difficulté, que celle d'intégrer une équation aux différences partielles auffi du premier ordre, entre $n+r+1$ variables, y compris la variable principale B; puifque les opérations ultérieures ne confiftent qu'en différentiations, & en opérations ordinaires d'algèbre (§ 13).*

* Voyez auffi l'exemple du fecond mém. du rec. préc. art. 10.

CHAPITRE TROISIÈME.

Sur l'intégration d'un ſyſtème de n *équations différentielles des ordres ſupérieurs entre* n + 1 *variables.*

17. CE ſujet eſt encore un de ceux qui ſont partie du ſecond mémoire du recueil précédent. Mais on a dû remarquer que le cas, auquel ſeul convient la méthode que j'y donne, eſt tellement limité, qu'on peut plutôt le conſidérer comme un exemple de deux équations entre les cinq variables finies p, q, z, x & y. N'oſant alors me livrer à l'eſpoir d'un ſuccès plus complet, je me propoſois uniquement de faire entrevoir la poſſibilité de ramener l'intégration générale des ſyſtèmes d'équations différentielles ſimultanées, à celle des équations aux différences partielles du premier ordre. Aujourd'hui j'entreprens de traiter cette matière à fond, & d'en développer ſucceſſivement toutes les parties.

Soit d'abord entre les deux variables z & x, $\frac{dz}{dx}$ étant $= p$, * l'équation unique du ſecond ordre $\zeta\, dp + \eta\, dx = 0$. Ces deux coëfficiens ſeront des fonctions des trois variables p, z & x, & nous aurons en même tems, par hypothèſe, la ſeconde équation $dz - pdx = 0$. Ainſi il ne s'agit que de combiner entr'elles ces deux

* Ce mémoire étoit déjà compoſé depuis long-tems, lorſque parut le ſecond tome du traité de calcul différ. & de calc. intég. par S. F. la Croix. En voyant dans une note additionnelle à ce ſavant ouvrage, page 726, cette même méthode d'intégration pour les équations différentielles des ordres ſupérieurs, je me décidai d'abord à la ſupprimer ici. Mais je me raviſai, lorſque je m'apperçus que cette ſuppreſſion détruiroit entièrement l'enſemble qui fait le principal mérite de cette petite théorie. Au reſte on trouvera ici quelques réflexions ultérieures ſur la forme de ces intégrales, en faveur deſquelles on me pardonnera peut-être de n'avoir pas ſuivi ma première idée.

équations, suivant les règles que nous avons données dans le chapitre précédent. Nous avons ici (§ 7), en prenant p pour y, $\alpha = 1$, $\beta = -p$; & l'équation E devient $\eta \frac{dB}{dp} - \zeta p \frac{dB}{dz} - \zeta \frac{dB}{dx} = 0$. Les deux fonctions Π, Ω qui constituent son intégrale $B = F(\Pi, \Omega)$, renfermant p, z & x, les équations $\Pi = a$, $\Omega = b$ seront les deux intégrales premières de la proposée; d'où éliminant p, on obtiendra l'intégrale finie.

Prenons pour exemple $z^2 dx d^2 z - 2x dz^3 + 2z dz^2 dx = 0$. Je fais $\frac{dz}{dx} = p$, ce qui change cette proposée en $z^2 dp + 2(p^2 z - p^3 x)$ $dx = 0$. J'ai donc ici $\zeta = z^2$, $\eta = 2(p^2 z - p^3 x)$ &

$$2(p^2 z - p^3 x)\frac{dB}{dp} - pz^2 \frac{dB}{dz} - z^2 \frac{dB}{dx} = 0$$

dont l'intégrale est $B = F\left(\frac{2pzx - z^2}{z - px}, \frac{pz^2}{z - px}\right)$. Ainsi $\frac{2pzx - z^2}{z - px} = a$ & $\frac{pz^2}{z - px} = b$, sont les deux intégrales premières, d'où éliminant p, je trouverai pour l'intégrale finie de la proposée,

$$z^2 + az - bx = 0.$$

18. Si l'équation proposée est du troisième ordre, & que $\frac{dp}{dx}$ étant $= \varpi$, on ait $\zeta d\varpi + \eta dx = 0$, ζ & η contenant ϖ, p, z & x; comme on a en même tems $dz - p dx = 0$, $dp - \varpi dx = 0$, on aura à combiner entr'elles ces trois équations; & l'art. 8 nous en donne tout de suite la solution. En effet en faisant dans l'équation O, $\alpha = 1$, $\beta = -p$, $\lambda = 1$, $\mu = -\varpi$, & prenant ϖ pour y & p pour u, elle se change en

$$\eta \frac{dB}{d\varpi} - \varpi\zeta \frac{dB}{dp} - p\zeta \frac{dB}{dz} - \zeta \frac{dB}{dx} = 0.$$

Et comme l'intégrale de cette équation sera de la forme $B =$

$F(\Pi, \Omega, \Gamma)$, ces trois fonctions renfermant ϖ, p, z & x, $\Pi = a$, $\Omega = b$, $\Gamma = c$ feront les trois intégrales premières. Si on élimine ϖ de ces trois équations, en les combinant deux à deux, il en résultera trois nouvelles entre p, z & x, contenant chacune deux des trois constantes arbitraires a, b, c; & qui feront conséquemment trois intégrales secondes. Mais si au moyen des trois premières, on élimine tout d'un coup ϖ & p, on obtiendra l'intégrale finie entre les deux variables z, x & les trois constantes arbitraires a, b, c.

Sans aller plus loin, nous concluons en général que l'intégration des équations d'un ordre quelconque n entre deux variables, se réduit à celle d'un système de $n + 1$ équations entre $n + 2$ variables z, x, p, ϖ, &c. : & conséquemment elle n'exige d'autre méthode que celle qui est développée dans le chapitre précédent, jusqu'à l'article 13 inclusivement.

19. Nous supposerons maintenant que les variables étant au nombre de trois, on ait à intégrer les deux équations simultanées du second ordre $\alpha dp + \mathcal{E} dx = 0$, $\zeta dq + \eta dx = 0$, ces quatre coëfficiens contenant les cinq variables z, x, y, p $\left(= \frac{dz}{dx}\right)$ & $q\left(= \frac{dy}{dx}\right)$. Nous aurons donc en même tems les deux équations $dz - pdx = 0$, $dy - qdx = 0$; desorte que le problème consiste à intégrer le système . . . (W)

$$\alpha dp + \mathcal{E} dx = 0; \ \zeta dq + \eta dx = 0; \ dz - pdx = 0; \ dy - qdx = 0;$$

& la formule générale de l'article 11 nous fournira tout de suite le résultat (X)

$$\mathcal{E}\zeta \frac{dB}{dp} + \alpha\eta \frac{dB}{dq} - \alpha\zeta p \frac{dB}{dz} - \alpha\zeta q \frac{dB}{dy} - \alpha\zeta \frac{dB}{dx} = 0.$$

Ainſi B ſera de la forme $B = F(\Pi, \Omega, \Gamma, \Delta)$; & conſéquemment l'intégrale du ſyſtème W ſera donnée par les quatre équations

$$A = \mathit{conſt.},\ B = \mathit{conſt.},\ C = \mathit{conſt.},\ D = \mathit{conſt.}$$

Si nous appliquons ceci à l'exemple de l'art. 21 du troiſième mémoire de ce recueil, nous aurons $\alpha = \zeta = z$, $\beta = qz - py - 2p^2$, $\gamma = -(2pq + p)$. Le réſultat X ſe changera par ces ſubſtitutions en . . . (Y)

$$(qz - py - 2p^2)\frac{dB}{dp} - (2pq + p)\frac{dB}{dq} - pz\frac{dB}{dz} - qz\frac{dB}{dy} - z\frac{dB}{dx} = 0,$$

dont en vertu des deux équations a c (*art. cité*), on connoît les deux valeurs particulières

$$B = \frac{2q + 1}{z^2},\ B = \frac{2py + 2(1 - z)q + y^2 - 2z + 1}{z^2},$$

qui ſatisfont en effet. Mais la difficulté eſt de trouver les deux autres ; & d'après ce qu'on a vu dans le premier mémoire du recueil précédent, ſur les équations aux différences partielles entre un nombre de variables plus grand que trois, on ne peut guères eſpérer de parvenir à intégrer celle-ci.

Cet exemple ſuffit pour montrer que, lorſqu'on aura à intégrer un ſyſtème de n équations différentielles du ſecond ordre entre $n + 1$ variables, ce ſyſtème après les transformations, & en y comprenant les nouvelles équations acceſſoires qui indiquent ces mêmes transformations, en contiendra $2n$ entre $2n + 1$ variables. Ainſi le réſultat préſentera une équation aux différences partielles du premier ordre à $2n + 2$ variables, en comptant la variable principale B. Il ſuit de là que le problème des trois corps, dans le cas même le plus ſimple, en ſuppoſant le ſoleil immobile, dépendroit d'une pareille équation à quatorze variables.

rences partielles du premier ordre . . . (Aa)

$$A\frac{d\vartheta}{dz}+B\frac{d\vartheta}{dy}+C\frac{d\vartheta}{du}+\ldots+L\frac{d\vartheta}{dx}=0,$$

entre un nombre quelconque $n+2$ (qui soit $=m$) de variables, y compris la variable principale ϑ ; pourvu que celle-ci ne complique aucun des coèfficiens, à celle d'un systême de n $(=m-2)$ équations différentielles du premier ordre entre $n+1$ $(=m-1)$ variables . . . (Ab)

$$\alpha dz+\varepsilon dx=0,\ \zeta dy+\eta dx=0,\ \ldots\ \varkappa dw+\omega dx=0.$$

En effet, nous avons vu (*chap.* 2) que l'intégrale de ce dernier étoit donnée par n $(=m-2)$ équations $A=$ *const.*, $B=$ *const.*, $C=$ *const.*, &c., où A, B, C, &c. sont les mêmes fonctions que celles Π, Ω, Γ, &c. qui constituent l'intégrale $\vartheta=F(\Pi,\Omega,\Gamma,\&c.)$ de l'équation Aa, dont les coèfficiens ont la forme indiquée (§ 9). Donc si on parvenoit, par quelqu'autre voie, à déterminer *à priori* l'intégrale du systême Ab, c'est-à-dire, à connoître les fonctions A, B, C, &c., on auroit par-là même l'intégrale $\vartheta=F(A,B,C,\&c.)$ de l'équation Aa, en supposant toujours la même forme aux coèfficiens de celle ci. Il ne reste plus, pour rendre cette proposition générale, qu'à montrer que dans toute équation aux différences partielles du premier ordre, on peut, au moyen d'un facteur, donner aux coèfficiens la forme prescrite.

22. Commençons par l'hypothêse la plus simple, celle de quatre variables ; & soit (Ac) . . . $M\frac{d\vartheta}{dy}+N\frac{d\vartheta}{dx}+P\frac{d\vartheta}{dz}=0$. Je multiplie cette équation par le facteur indéterminé g, & en la comparant terme à terme avec celle E (§ 7) dans laquelle B remplace ϑ,

aux équations telles que Ae dans laquelle il n'y a pas de terme ſans différence partielle : elle l'eſt également à la formule plus générale (Af) . . . $M\frac{dz}{dy} + N\frac{dz}{dx} + P\frac{dz}{du} + Q = 0$, où Q contient ſeule la variable principale z d'une manière quelconque. Pour le démontrer, nous prendrons une voie plus directe. Conſidérons une des formules de l'article 24 (*prem. mém. recueil préc.*), par exemple la ſeconde. Les facteurs q & r étant arbitraires, nous pouvons ſubſtituer $q' + \varpi r'$ à q & $r' + \mu q'$ à r; & donner enſuite à cette formule la forme . . . (Ag)

$$Ndz + Qdx = q' \left\{ \begin{array}{c} Ndy - Mdx \\ + \mu\,(Ndu - Pdx) \end{array} \right\} + r' \left\{ \begin{array}{c} Ndu - Pdx \\ + \varpi\,(Ndy - Mdx) \end{array} \right\};$$

c'eſt-à-dire, . . . (Ah)

$$Ndz + Qdx = q\,[Ndy + \mu Ndu - (M + \mu P)\,dx] + r\,[Ndu + \varpi Ndy - (P + \varpi M)\,dx].$$

Or ſi on ſavoit intégrer *à priori* le ſyſtème de deux équations $Ndy - Mdx = 0$, $Ndu - Pdx = 0$, les premiers membres de leurs deux intégrales $\Psi = conſt.$, $\Omega = conſt.$, ſeroient néceſſairement celles des deux trinomes différentiels. En effet, pour intégrer deux pareilles équations ſimultanées, il faut multiplier l'une par un facteur indéterminé, & prendre la ſomme des deux ; enſuite déterminer le facteur par la condition de l'intégrabilité *médiate* (§ 4) de ce réſultat à trois variables ; & enfin multiplier ce même réſultat par ſon facteur afin d'effectuer l'intégration. Or l'intégrale de chacun des trinomes de la formule Ah ſera préciſément le réſultat de ces mêmes opérations. Ainſi en admettant la ſuppoſition ci-deſſus, on donneroit à cette équation Ah la forme

$$Ndz + Qdx + qd\Psi + rd\Omega = 0;$$

& le reste de l'opération feroit entièrement conforme à celle de l'art. 24 cité précédemment.

Cette démonstration s'applique également aux formules à cinq variables de l'art. 35 du même mémoire, en combinant ensemble les trois binomes différentiels, comme nous venons de faire pour les deux dans celles à quatre variables : & en général elle s'étend à toutes les formules à un nombre quelconque m de variables. Mais il ne faut pas se dissimuler qu'au-delà du nombre $m = 4$ de variables, les difficultés se multiplient de plus en plus, puisqu'on a toujours $m - 3$ facteurs à déterminer ; & que l'analyse ne peut les donner que par une formule assez compliquée pour les présenter tous à-la-fois.

Ce feroit encore la même chose si les coëfficiens M, N, P, &c. de la proposée contenoient la variable principale z ; car par exemple dans la même formule de l'art. 24 employée ci-dessus, on est évidemment le maître de donner au premier binome $Ndz + Qdx$ un coëfficient arbitraire s, & conséquemment de substituer ensuite $q' + \varpi r' + \rho s'$ à q; $r' + \mu q' + \nu s'$ à r; & enfin $s' + \tau q' + \zeta r'$ à s.

CINQUIEME MÉMOIRE.

Sur différens sujets.

I.

Sur la surface de fracture des corps durs.

UN corps dur, de figure quelconque, étant fixé par une de ses extrémités à un obstacle inébranlable, & éprouvant à l'autre l'effort d'une puissance capable de le rompre, on demande quelle surface sera le lieu de tous les points où se fera la séparation des deux portions, au moment où le corps viendra à se rompre ?

Je commencerai par établir quelques lemmes dont on trouvera aisément la démonstration.

1°. Si un systême *caténiforme* de petits corps unis ensemble & rangés en ligne droite, étant fixé par une de ses extrémités, vient à être tiré par l'autre, chaque lien qui unit deux de ces petits corps consécutifs, éprouvera la même tension. S'ils sont tous également solides, ils se rompront tous au même instant; & le corps, sur lequel agit immédiatement la puissance qui tend à désunir ce systême, obéira seul à son impression.

2°. S'il y a un de ces liens plus foible que les autres, il se rompra seul, en quelque endroit qu'il se trouve placé, & quelle que soit la force qui tend à le rompre.

3°. Si un corps dur ne peut se rompre qu'autour d'un certain axe déterminé, placé dans sa surface inférieure, la surface de fracture sera donnée par la condition que, de toutes celles qui passent par cet axe, elle opposera la moindre résistance; c'est-à-dire, que le moment total de sa ténacité sera en équilibre autour de cet axe avec la moindre puissance possible, ou qu'elle sera elle même un *minimum*. Je dis puissance, parce que j'ai fait voir* qu'un corps dur, c'est-à-dire non élastique, ne peut être rompu par l'effet seul de la pesanteur.

4°. Si ce même corps ne peut se rompre qu'autour d'un axe quelconque placé dans cette même surface inférieure, la fracture se fera toujours de manière que la résistance qu'oppose la surface de fracture, ou le moment de la ténacité totale des molécules qui la composent, soit en équilibre autour de l'axe de fracture avec la moindre puissance possible, appliquée au bras de levier relatif à cet axe; c'est-à-dire, que ce moment divisé par ce bras de levier variable sera un *minimum*.

Toutes ces démonstrations tiennent au seul principe que, lorsqu'il y a une partie foible, elle ne peut ni réagir de manière à faire rompre une partie plus voisine de la puissance; ni transmettre à une partie plus éloignée l'action qu'elle éprouve; & que conséquemment elle doit céder seule.

Supposons d'abord que ce corps soit un solide engendré par le mouvement de translation *in latus* d'une surface ou simplement une surface AFHNROEB (*fig. I*) terminée par les deux courbes données AFHN, BEOR, ou par deux branches d'une même

* Voyez 1er recueil, dernier mémoire n°. VI.

courbe. Qu'elle soit fixée en AB, & qu'un corps P tombant d'une hauteur quelconque, fasse effort en NR pour la rompre. On demande quelle sera la courbe de fracture OIH? Soient $BD = z$, $DE = u$, $DF = w$ les coordonnées des deux courbes; $BK = x$, $KI = y$ celles de la courbe cherchée; $BG = a$, $GO = b$ qui déterminent le point O autour duquel la surface doit se rompre, & qui est conséquemment l'origine de la courbe cherchée; $BQ = f$, $QH = g$ qui repondent à l'extrémité H de cette courbe; & enfin h la distance BM du fardeau P. D'après les principes que je viens d'établir, il faut.

1°. Que la somme des momens de ténacité de la courbe OIH au tour du point O; c'est-à-dire $\int ds \sqrt{[(x-a)^2 + (y-b)^2]}$ soit un *minimum* en regardant a & b comme constantes, & s représentant l'arc OI;

2°. Et de plus, qu'en exprimant cette somme par Q, $\frac{Q}{h-a}$ soit aussi un *minimum* en faisant varier a & b.

On trouvera d'abord facilement, au moyen des formules connues du calcul des variations, * que cette courbe OIH n'est autre chose qu'une ligne droite passant par le point O, puisque a & b sont constans; ce qui n'étoit pas difficile à prévoir. Quant à la direction de cette ligne, on la connoîtra en déterminant f & g par les mêmes formules, & on verra qu'elle doit être perpendiculaire à la courbe supérieure AFHN. Le problème est donc réduit au suivant : déterminer sur la courbe BEOR le point O par où il fau-

* Voyez leçons de calc. différ. & intég. par M. Cousin chap. 6 édit. de 1777 ou chap. 4 édit. de 1796.

droit mener à celle AFHN la normale H'OV, de manière que $\frac{\overline{H'O}^2}{2 \cdot OP}$, qui eſt la valeur de la réſiſtance totale que la ligne OH' oppoſe par ſa ténacité à la puiſſance P avec qui elle eſt ſuppoſée en équilibre, ſoit un *minimum* : problème trop facile pour nous y arrêter.

Si on vouloit avoir la ſurface de fracture dans un ſolide quelconque conſidéré ſous ſes trois dimenſions, on trouveroit, pour la formule du *minimum*, * $\int\int dx\,dy\,\sqrt{(1+p^2+q^2)}\,\sqrt{(z^2+x^2)} = min.$, z, x, y étant les coordonnées de cette ſurface comptées depus l'axe de fracture qui paſſe par le point O. Soit $\sqrt{(1+p^2+q^2)} = \mu$, $\sqrt{(z^2+x^2)} = \lambda$; $\mathcal{E}$ ſera $= \mu\lambda$, $N = \frac{z\mu}{\lambda}$, $P = \frac{p\lambda}{\mu}$, $P' = \frac{q\lambda}{\mu}$; & l'équation de la ſurface cherchée, qui eſt donnée par $N - \frac{dP}{dx} - \frac{dP'}{dy} = 0$**, deviendra

$$\frac{z\mu}{\lambda} - \frac{d\left(\frac{\lambda p}{\mu}\right)}{dx} - \frac{d\left(\frac{\lambda q}{\mu}\right)}{dy} = 0;$$

c'eſt-à-dire, en effectuant les opérations indiquées, réduiſant, & ſubſtituant à λ & μ leurs valeurs,

$$(z^2+x^2)(1+q^2)\frac{dp}{dx} - (z^2+x^2)\cdot 2pq\frac{dp}{dy} + (z^2+x^2)(1+p^2)\frac{dq}{dy} + (px-z)$$
$$(1+p^2+q^2) = 0;$$

équation qui a quelque analogie avec celle au *minimum* de ſurface, mais qui eſt plus compliquée.

---

* Voyez l'ouv. cité art. 64 dans la 1re. édit. & 353 dans la 2de.

** Voyez les deux édit. de l'ouvr. cité, chap. dernier.

II.

II.

De l'intérêt sur intérêt continu.

ON place un capital a à m pour cent d'intérêt par an. Ce capital au bout d'un an est devenu $a + \frac{m}{100} a$, ou faisant $\frac{m}{100} a = b$, $a + b$. Maintenant si on applique de nouveau ce capital entier $a + b$, il deviendra, l'année d'après, $a + b + \frac{b}{a} (a + b) = \frac{(a+b)^2}{a}$, & ainsi de suite; de manière que le premier capital a, après n années, deviendroit $\frac{(a+b)^n}{a^{n-1}}$: c'est ce qu'on appelle placer à intérêt sur intérêt. On pourroit varier à l'infini cette manière de placer, en stipulant que, l'intérêt restant le même, l'échéance du payement fût tous les trois mois, ou tous les mois, ou &c.; & dans chacune de ces hypothèses, le capital croîtroit différemment. Supposons que l'échéance soit à chaque instant, alors l'intérêt sur intérêt devient *continu*. Le capital étant a, b le produit de l'intérêt simple au bout du tems déterminé T qui est ordinairement un an, soit après un certain tems t, ce capital devenu $= s$. Il est clair que tout se passe comme si on plaçoit à cet instant la somme s au même intérêt $\frac{b}{a}$; ce qui, au bout du tems T, produiroit la somme $\frac{b}{a} s$. Mais comme ce capital s ne reste le même que pendant l'instant dt, son produit, au bout de ce petit tems, sera $\frac{bsdt}{aT}$ qui est l'augmentation de s pendant cet instant. On a donc $ds =$

Ff

$\frac{bsdt}{aT}$, d'où l. $s = c + \frac{bt}{aT}$. Or quand $t = 0$, $s = a$, donc $c = $ l. a;

& enfin $s = ae^{\frac{bt}{aT}}$, formule qui donne la valeur de s au bout de chaque tems t.

Faisons, comme c'est l'usage, $T = 1$ *an*, on aura $s = ae^{\frac{bt}{a}}$, t exprimant un nombre entier ou fractionnaire d'années; par exemple, au bout d'un mois $t = \frac{1}{12}$ & $s = ae^{\frac{b}{12a}}$. On sait d'ailleurs que

$$e^{z} = 1 + z + \frac{1}{2} z^2 + \frac{1}{2 \cdot 3} z^3 + \&c.;\ \text{d'où}\ s = a \left(1 + \frac{b}{a} t + \frac{b^2}{2a^2} t^2 + \&c.\right).$$

On aura donc, quand $t = 1$ *an*,

$$s = a\left(1 + \frac{b}{a} + \frac{b^2}{2a^2} + \frac{b^3}{2 \cdot 3a^3} + \&c.\right) = a + b + \frac{b^2}{2a} + \frac{b^3}{2 \cdot 3a^2} + \&c.$$

Qui est la suite donnée par *Jacques Bernoulli*, pour ce seul cas de $t = 1$ *an**.

LII.

Sur un principe fondamental du calcul des jeux de hazard.

LE principe en question est que l'enjeu de chaque joueur doit être en raison du nombre des chances qui lui sont favorables. Ce principe n'est réellement évident que dans le cas du pari à égalité; c'est-à-dire, lorsque m joueurs parient chacun pour une des m combinaisons possibles : car alors tout étant égal, les mêmes raisons qu'on allégueroit pour augmenter ou diminuer l'enjeu de l'un d'eux, seroit

* *Jacobi Bernoullii opera* page 429. Item page 970. Voyez aussi *ars conjectandi* du même page 303.

applicable à chacun des autres. Voici une manière bien simple de présenter le cas général avec la même évidence. Il n'y a qu'à imaginer qu'un certain nombre n de ces m joueurs se réunisse ; ce qui ne change rien à l'état de la chose. Cette société que je nommerai A, aura alors pour elle n chances favorables, & le reste des joueurs, qui soit B, en aura $m - n$. Mais aussi l'enjeu de A sera à celui de B dans la même raison de $n : m - n$. Or ce sera la même chose si à chacune de ces deux sociétés on substitue un seul individu A & B ; donc, &c.

On pourroit également partager la totalité des m joueurs en trois ou plus de sociétés pareilles, & le résultat donneroit toujours la confirmation de ce même principe.

IV.

Sur la construction de la constante arbitraire dans le calcul intégral aux différences finies.

ON sait qu'il n'en est pas de la constante arbitraire dans le calcul intégral aux différences finies, comme dans le calcul intégral ordinaire. Dans celui-ci, elle ne peut en aucune manière contenir la variable ; dans celui-là au contraire, elle peut la renfermer sous la forme d'une certaine fonction telle, qu'elle n'éprouve aucune variation, lorsque x devient $x + \Delta x$: & cette forme dépend uniquement de la relation donnée entre x & Δx.

Supposons qu'on demande la courbe ADE (*fig.* 2) telle que prenant toujours AB = BC, on ait CF = ½ CE. Soit AB = x,

$BD = y$, $BC = \Delta x$ & $CE = y + \Delta y$. $AB : BD = AC : CF$ donne $CF = \frac{y(x + \Delta x)}{x}$, où à cause de $\Delta x = x$, $CF = 2y$. Ainsi $2y = \frac{1}{2}(y + \Delta y)$ ou $\Delta y - 3y = 0$. Soit $y = e^u$, on aura $\Delta u = \text{l. } 4$. Mais on a d'un autre côté $\Delta x - x = 0$, soit donc aussi $x = e^z$, & on aura de même $\Delta z = \text{l. } 2$. Ainsi $2\Delta z = \Delta u$, $2z = u + c$, ou $2 \text{l. } x = \text{l. } y + \text{l. } c$, ou enfin $x^2 = cy$ qui est à la parabole ordinaire *convexe*. Mais cette propriété appartient également à toutes les courbes contenues dans l'équation

$$x^2 = y \, \phi\left(\text{sin. } \frac{\varpi \text{ l. } x}{\text{l. } 2}, \text{ cos. } \frac{\varpi \text{ l. } x}{\text{l. } 2}\right)$$

qui est la forme de la fonction arbitraire constante dans cette hypothèse de $\Delta x = x$. Si on avoit supposé $\Delta x = nx$, on auroit trouvé de même

$$x^{\text{l.}(2 \cdot \overline{n+1})} = y^{\text{l.}(n+1)} \phi\left(\text{sin. } \frac{\varpi \text{ l. } nx}{\text{l. } (n+1)}, \text{ cos. } \frac{\varpi \text{ l. } nx}{\text{l. } (n+1)}\right).$$

M. *Monge* * a donné la construction de la courbe qui représente la fonction arbitraire pour le cas de $\Delta x = a$. A son exemple je vais construire ici celle qui convient à la formule générale $\Delta x = nx$ ou $= \overline{a - 1} \cdot x$, en commençant par le cas de $\Delta x = x$, ou de $a = 2$.

Remarquons d'abord que la somme σ d'une progression géométrique quelconque décroissante $m : \frac{m}{a} : \frac{m}{a^2} : \frac{m}{a^3} :$ &c., dont le dernier terme est P, est $\sigma = \frac{am - P}{a - 1}$. Donc $am = (a - 1)\sigma + P$. Si cette suite est infinie, $P = 0$, & on a $am = (a - 1)\sigma$. Or σ est la somme de tous les termes depuis zéro jusqu'à m inclusivement ; am est évidemment le terme immédiatement plus grand que m ;

* Mém. des Savans étrangers tome IX, page 345.

donc, dans une progreffion géométrique décroiffante infinie, un terme quelconque eft égal au produit de la fomme de tous ceux qui le fuivent, par $a - 1$, $\frac{1}{a}$ étant la raifon de la progreffion.

Cela pofé, fur une ligne indéfinie AB (*fig.* 3) je prens un fegment à volonté, qui foit qr $= m$. Je le partage en deux également, & je porte cette moitié pq $= \frac{1}{2} m$ fur qA de droite à gauche. Je divife de nouveau qp en deux également, & je porte encore la valeur lp $= \frac{1}{4} m$ de cette moitié, dans la même direction, de p en l; & ainfi de fuite *à l'infini.* Il eft clair par ce que nous venons de démontrer, que la fomme de tous ces fegmens qp, pl, &c. à l'infini fera égale à qr à caufe de $a - 1 = 1$. Ainfi l'origine A eft fixée à la diftance qA $=$ qr. Par la même raifon, on aura rs $=$ rA; &c. Sur qr je décris une courbe quelconque *continue* ou *difcontinue* qD'E'; je partage qr, rs, pq, &c. en un nombre quelconque mais égal de parties par la biffection continuelle; & ayant, dans la première courbe qD'E', mené des ordonnées telles que C'D', j'élève la même ordonnée C'D' aux points de fection correfpondans des autres fegmens; c'eft-à-dire, ici en C, C'', &c. & ainfi de tous les points. Par les extrémités de ces ordonnées je décris les courbes pDE, rD''E'', &c., & je dis que le fyftème de toutes ces courbes fatisfait à l'équation

$$z = \phi\left(\mathit{fin.}\ \frac{\varpi\,\mathrm{l}.\,x}{\mathrm{l}.\,2},\ \mathit{cof.}\ \frac{\varpi\,\mathrm{l}.\,x}{\mathrm{l}.\,2}\right)$$

z étant l'ordonnée, & le fecond membre étant la fonction arbitraire conftante pour le cas de $\Delta x = x$.

En effet, il faut pour cela, & il fuffit qu'en quelque endroit qu'on prenne x depuis l'origine A, l'ordonnée foit la même que

lorsque x devient $x + \Delta x = 2x$. Soit $AC = x$; l'ordonnée en ce point est CD. L'abscisse $2x$ sera AC', puisque nous avons vu que $pq = Ap$, & $qC' = 2pC$. Donc $AC' = Aq + qC' = 2Ap + 2pC = 2AC$. Or par construction l'ordonnée $C'D' = CD$; donc &c.

Il en sera de même, quelque valeur qu'on donne à a; car supposant $qr = m$, $pq = \frac{m}{a}$, $lp = \frac{m}{a^2}$, &c., on aura $qr = (a-1)Aq$; donc $AC = Ap + pC$; $AC' = Ap + pq + qC' = Ap + (a-1)Ap + qC' = a\cdot Ap + qC'$. Or $qC' : pC = qr : pq = a : 1$; donc $qC' = a\cdot pC$, & $AC' = a(Ap + pC) = a\cdot AC$. Donc quand x devient ax, ou ce qui est la même chose, quand $\Delta x = (a-1)x$, l'ordonnée reste constante.

En appliquant à notre problème le résultat que nous avons trouvé ci-dessus pour le cas de $\Delta x = x$, on verra qu'outre la parabole convexe, il y a une infinité d'autres courbes qui y satisferont également. Pour les construire, il suffira de marquer sur chacune des ordonnées CD ou z du système arbitraire, prolongées s'il est nécessaire, un point d tel que AC ou l'abscisse x soit toujours moyenne proportionnelle entre l'ordonnée correspondante $CD = z$ & $Cd = y$; son expression étant alors $x^2 = zy = y\phi$. Ceci jette un nouveau jour sur la nature de cette constante arbitraire. En effet on voit évidemment qu'à chaque abscisse AC répond une constante particulière CD, qui varie à mesure que x croît, mais qui revient à son premier état, aussitôt que cet accroissement de x est devenu égal à Δx.

V.

Sur la projection orthogonale des surfaces courbes.

LOrsqu'au moyen des formules $\int\int z dx dy$, ou $\int\int dx dy \sqrt{(1 + m^2 + n^2)}$ *, (z étant la variable principale qu'on regarde comme fonction des deux autres & qui représente la coordonnée verticale, & dz étant $= m dy + n dx$) on veut déterminer la *cubature* ou la *complanation* ** d'une surface courbe, on intègre celle $\int\int z dx dy$ par exemple (on dira la même chose de l'autre formule) d'abord par y, ce qui, nommant K l'intégrale de $\int z dy$ prise dans l'hypothèse de x constante, donne $\int z dy = K + \phi : x$. Or la détermination de $\phi : x$ exige qu'on ait l'équation entre x & y qui exprime le lieu de tous les points où $\int z dy$ prend son origine ; c'est à dire, qu'on connoisse la projection horizontale de la branche de courbe à double courbure qui sert de limite initiale à cette intégrale, afin d'obtenir, par la substitution de cette valeur de y dans K, une expression $'K$ qui ne contienne plus que x, & d'en conclure $\phi : x + 'K = 0$ d'où $\phi : x = - 'K$. Il faut de même connoître la relation entre x & y pour le lieu de tous les points où $\int z dy$ est complète ; c'est-à-dire, la projection horizontale de l'autre branche de courbe à double courbure qui sert de limite finale à la même intégrale. Nommant ensuite K' ce que devient K par la substitu-

* Voyez leçons de calc. diff. & de calc intég. par M. Cousin édit. in-8°. page 383 ou édit. in-4°. tome 1er n°. 353.

** J'ai adopté cette expression, parce qu'elle m'a paru parfaitement analogue à celle de *rectification* des lignes courbes.

tion de cette seconde valeur de y en x, on n'a plus que la formule $\int dx\,(K' - 'K)$ à intégrer à l'ordinaire par x seule.

Lorsque ces deux branches sont données, il n'y a aucune difficulté ; mais lorsqu'il s'agit de *cuber* ou de *complaner* une *nappe* * entière, il faut savoir déterminer, d'après l'équation même de la surface, la projection de la courbe, soit à simple, soit à double courbure, qui lui sert de limite. J'ignore s'il existe dans quelque ouvrage une solution de ce problème. En voici une qui aura du moins le mérite d'une grande simplicité.

Le caractère distinctif de la courbe en question étant de séparer deux *nappes* contigües, chaque ordonnée z qui répond à quelqu'un de ses points, a deux valeurs égales. Ainsi ordonnant l'équation à la surface proposée par z, & multipliant chacun de ses termes par l'exposant de cette variable, qui lui est propre, on parviendra à un résultat qui, conformément à la propriété des équations à plusieurs racines égales, appartiendra uniquement aux points de cette surface où viennent se confondre deux valeurs égales de z. Éliminant ensuite cette dernière variable au moyen de l'équation à la surface, on aura celle à la projection demandée.

* Cette expression pour désigner dans les surfaces courbes ce qu'on entend par *branche* dans les lignes courbes, appartient à M. S. F. la Croix (*voyez son traité de calc. diff. & intég. tom.* 1er *page* 448). Elle réunit en elle les deux idées de *courbure* & de *développabilité*, & est par là très-appropriée aux surfaces développables telles que les cylindroïdes, &c. Mais elle présente, par rapport aux autres, le concours de deux qualités incompatibles. Peut-être la dénomination de *Tés* seroit-elle plus convenable. Je crois cependant qu'il seroit encore préférable d'adopter quelque mot de nouvelle création, & qui se rapportât uniquement à cet objet : tel seroit celui de *co-radicalité* ou celui de *syrrhizie* ; le premier tiré du latin, & le second du grec, qui expriment tous deux exactement *le lieu d'une seule & même racine*, & qui pourroient conséquemment s'appliquer également aux lignes & aux surfaces courbes.

On

On parviendroit au même résultat par des considérations tirées du calcul différentiel. En effet on sait* que la normale & la sous-normale d'une surface courbe sont exprimées, l'une par $z\sqrt{(1+m^2+n^2)}$ & l'autre par $z\sqrt{(m^2+n^2)}$. Or dans tous les points de la courbe où deux *nappes* se réunissent, il faut; ou que le plan tangent commun soit vertical, & alors la normale & la sous-normale se confondant, on aura $m^2+n^2=\infty$; ou qu'il y ait deux plans tangens qui se croisent, & alors les deux expressions ci-dessus doivent, comme dans les points de rebroussement & en général comme dans les points multiples des lignes courbes, être indéterminées, d'où $m^2+n^2=\frac{0}{0}$. Maintenant si $\Pi=0$ est l'équation à la surface, on en tire $\frac{d\Pi}{dz}\frac{dz}{dy}+\frac{d\Pi}{dy}=0$ & $\frac{d\Pi}{dz}\frac{dz}{dx}+\frac{d\Pi}{dx}=0$. Donc

$$\frac{dz^2}{dy}+\frac{dz^2}{dx}=m^2+n^2=\left(\frac{d\Pi^2}{dy}+\frac{d\Pi^2}{dx}\right):\frac{d\Pi^2}{dz}.$$

Ainsi lorsque $m^2+n^2=\infty$, on a $\frac{d\Pi}{dz}=0$; & lorsque $m^2+n^2=\frac{0}{0}$, on a $\frac{d\Pi^2}{dx}+\frac{d\Pi^2}{dy}=0$ & $\frac{d\Pi}{dz}=0$; c'est-à-dire, que la formule $\frac{d\Pi}{dz}=0$ comprend les deux cas énoncés ci-dessus. La projection demandée est donc toujours donnée par la combinaison des deux équations $\Pi=0$ & $\frac{d\Pi}{dz}=0$; & cette dernière est évidemment la même que le résultat qu'on obtiendroit par la première méthode.

Soit par exemple l'équation à la surface donnée $\Pi=0$ celle $az^2-2z(x^2+y^2)-y(a^2-y^2)=0$. En la différentiant par z seule

---

* Voyez leçons de calc. diff. & de calc. intég. par M. Cousin édit. in-8°., nos. 42 & 43; ou édit. in-4°. tome 1er n°. 250.

Gg

comme par une variable simple, on aura $az-(y^2+x^2)=0=\frac{d\Pi}{dz}$. Prenant ensuite de celle-ci la valeur de z pour la substituer dans la proposée, il en résultera celle à la projection cherchée; savoir, $y^4-ay^3+2x^2y^2+a^3y+x^4=0$. Si on avoit éliminé x au lieu de z, on auroit trouvé, pour la projection sur le plan des z & y,

$$az^2+y(a^2-y^2)=0.$$

V E

Sur la courbure qu'il faut donner aux deux rangées d'arbres qui forment une allée, pour qu'étant apperçue d'un certain point, elle présente réellement sur toute sa longueur deux lignes droites parallèles.

CETTE question, à la vérité, n'est pas neuve; mais on jugera, d'après la lecture de cet article, si elle a en effet jamais été complètement résolue. Soient EFKI (*fig.* 4) le plan du terrain, & E, F les deux premiers arbres. Je partage leur distance EF en deux également au point G; & je lui mène par ce point la perpendiculaire AH qui sera la direction & le milieu de l'allée. Soit l'œil du spectateur placé au point B lequel est déterminé par la ligne GA $=a$ & par la verticale AB $=h$; & nommons EF $=2l$. Maintenant du même point B comme centre, & d'un rayon quelconque, soit décrit dans le plan vertical BAH le cercle CnD; & sur sa circonférence comme base soit élevé le cylindre creux dont on apperçoit la portion dprqob; sa longueur rq étant déterminée par l'intersection des deux rayons visuels BE, BF avec la surface

convexe du cylindre. Cela posé, il est évident que si l'œil parcourt successivement de bas en haut le quart de cercle D n C, il appercevra toujours une ligne horizontale de même longueur r q, p o, &c. Il faut donc faire ensorte que la même chose ait lieu, lorsqu'il parcourra la longueur de l'allée. Pour cela il suffit de mener, par les deux extrémités de chacune des horizontales p o, les deux rayons visuels B p, B o prolongés jusqu'au plan du terrain ; & chacun des points I & K où ils se terminent, sera un de ceux de la courbe cherchée. La nature de cette courbe est donc donnée par la suite de proportions B n : o p = B G : F E = B H : K I = &c. ; c'est-à-dire, qu'en faisant A H $= x$, H I $= y$, on aura pour son équation, B G : G E = B H : H I, ou

$$\sqrt{(a^2 + h^2)} : l = \sqrt{(x^2 + h^2)} : y ;$$

d'où il résulte enfin $(a^2 + h^2)y^2 - l^2x^2 - h^2l^2 = 0$, qui est celle d'une hyperbole e E I rapportée au second axe ; les abscisses étant comptées du centre A, & le premier axe f e étant $= \frac{2hl}{\sqrt{(a^2+h^2)}}$.

Si on fait $h = 0$, on aura la solution relative au cas où l'œil est supposé dans le plan même E F K I, qui est le seul qu'on ait coutume d'examiner. L'équation se réduit alors à $ay = lx$, qui est à la ligne droite dont la position est donnée par celles de l'œil en A & du premier arbre en E.

La même considération nous servira à résoudre l'inverse de ce problème. Qu'on se propose, par exemple, de déterminer sous quelle forme l'œil placé en B apperçoit une allée composée de deux rangées d'arbres e I, f K qui sont réellement parallèles entr'elles. Il s'agit dans ce problème d'assigner le rapport apparent que l'illusion optique

établit entre les lignes égales FE, KI. Il faut donc les considérer dans une position où cette illusion ne puisse plus en altérer le rapport; c'est-à-dire qu'il faut les rapporter à une surface telle, qu'elles soient toutes à une égale distance de l'œil placé dans la perpendiculaire élevée sur le milieu de chacune d'elles : propriété qui appartient visiblement au cylindre dprqb. C'est donc comme si on demandoit quelle courbe à double courbure formeroient sur cette surface, de part & d'autre du cercle CnD, les intersections des rayons visuels BI, BE, &c. Nous simplifierons cette question en élevant sur ML le plan vertical MLPN qui est conséquemment coupé perpendiculairement dans la ligne AB par celui HAB, & en considérant uniquement la projection tB de la courbe cherchée sur ce nouveau plan. Nous aurons donc

IK:po = HB : nB, ou HK (= GF = l) : ag (= no) = AB:aB; c'est-à-dire, en nommant Aa = z, ag = u, $l:u = h:h - z$; & l'équation à cette projection est $hu + lz - hl = 0$, qui est évidemment à la ligne droite Bgt. Ainsi plus l'arc Dn approche de 90°; plus la constante IK paroîtra petite; mais ce ne feroit que lorsqu'il a atteint complètement cette valeur, ce qui ne peut jamais arriver, que la largeur de l'allée disparoîtroit entièrement.

Si au contraire on avoit déterminé la projection de la même courbe sur le plan horizontal IKML, on auroit eu, en nommant an = t & le rayon BC = r, $h^2u^2 + l^2t^2 - l^2r^2 = 0$, qui est en général à l'ellipse.

En faisant successivement $h = 0$ dans ces deux équations de projection, elles se réduisent, la première à $z = 0$, ce qui est évident; & la seconde à $t = r$, ce qui ne l'est pas moins. En effet, dans

cette hypothèse de l'œil placé sur le plan même IKML, il est impossible qu'il y ait une courbe *apperçue* ; puisque les intervalles GH n'étant plus sensibles à la vue, toutes les ordonnées IK, EF, &c. semblent se confondre dans une quelconque d'entr'elles, à la distance indéterminée *r*. Aussi la formule est-elle entièrement indépendante de la valeur de l'ordonnée *u* ; ce qui signifie qu'à cette distance *r* du point A, sont réunies, sans aucun ordre, dans une seule horizontale KI, toutes les ordonnées depuis la largeur 2*l* de l'allée, jusqu'à zéro. Cette réflexion me paroît avoir échappé à tous les géomètres qui ont examiné cette question.

VII.

Sur la mesure des parallélogrammes rectangles.

LA manière dont on a coutume d'exposer cette partie des élémens de géométrie m'a toujours paru bien peu géométrique, & bien peu propre à donner une idée nette de ce qu'on doit entendre par la règle ordinaire, *que pour avoir la surface d'un parallélogramme, il faut multiplier sa base par sa hauteur.* Au-lieu de commencer par démontrer ou plutôt par montrer à l'œil la vérité de cette règle, & d'en conclure ensuite, par forme de corollaire, *que les surfaces des parallélogrammes sont entr'elles comme les produits des bases par les hauteurs*, il me semble que c'est au contraire sur ce dernier principe qu'il faudroit établir la démonstration de la règle en question. En effet, supposons ce principe démontré ; & le pied, par exemple, étant l'unité de mesure linéaire, prenons pour l'unité s

vraie lorſque les baſes CD, CF ſont entr'elles comme un nombre entier m à un autre nombre entier n; ou ce qui eſt la même choſe, lorſque le rapport de ces baſes eſt comme l'unité à une fraction $\frac{n}{m}$. Suppoſons $Cd : CD = 1 : \frac{n}{m}$; $Cd : DF = 1 : \frac{n'}{m'}$; & ainſi de ſuite au nombre de r. On aura, en ajoutant ces différentes proportions,

$$r \cdot aCdb : aCDe + eDFf + \&c. = r : \frac{n}{m} + \frac{n'}{m'} + \&c., \text{ c'eſt-à-dire,}$$

$$aCdb : aCDe + eDFf + \&c. = 1 : \frac{n}{m} + \frac{n'}{m'} + \&c.$$

Or toute quantité irrationnelle peut s'exprimer par une ſuite infinie de pareilles fractions. Donc en général, quel que ſoit le rapport des baſes Cd : CD, deux rectangles de même hauteur ſont dans le rapport de ces baſes. Donc &c. Nous avons ſuppoſé $m = n = 1$, ce qui a réduit s à un pied quarré. Si on leur avoit donné toute autre valeur; par exemple, ſi on avoit pris la *toiſe-pied* pour unité de meſure ſuperficielle, on auroit eu $m = 6$, $n = 1$ & s égal à un rectangle de ſix pieds ſur un. Donc S auroit eu $\frac{ab}{6}$ pareils rectangles de ſurface.

La meſure des parallélipipèdes découle évidemment des mêmes principes; & il n'y aura aucune difficulté à en faire l'application.

VIII.

Sur la loi de l'équilibre dans le choc des corps.

LA théorie de la communication du mouvement dans le choc des corps eſt fondée ſur le théorème ſuivant; ſavoir, *que deux*

commune à rencontrer un troisième corps *C* égal à *A* & animé en sens contraire de la même vîtesse qu'avoit ce dernier corps seul, il en résulte, dis-je, que le système de ces trois corps sera en équilibre.

Pour le prouver, il suffit de considérer le corps *B*, lorsqu'il est choqué par les deux corps *A* & *C* à-la-fois, comme ayant reçu de celui *A* toute la vîtesse que celui-ci lui auroit réellement imprimé, si le corps *C* n'eût point existé; & d'imaginer que les deux corps *A* & *B*, avec cette vîtesse commune, rencontrent le troisième corps *C* animé de sa vîtesse primitive *V* en sens contraire. Or nous venons de voir que le système de ces trois corps est nécessairement en équilibre; donc &c.

Il résulte encore ultérieurement de là que si un corps, se mouvant en vertu d'une vîtesse *u* imprimée à une partie seulement de sa masse, rencontre un autre corps dont la masse entière soit égale à cette même partie, & qui soit animé en sens contraire d'une vîtesse égale à celle *u*, ces deux corps se feront aussi équilibre.

Cela posé, dans le moment du choc, on peut évidemment considérer le corps $M = 2m$ comme se mouvant en vertu de la vîtesse *V* imprimée à la partie *m* de sa masse, & en même tems comme se mouvant en vertu de la même vîtesse *V* imprimée à son autre partie *m*. Or il est clair, par notre principe, qu'une masse *m* animée de la vîtesse *V* feroit équilibre à celle *M* dans chacune de ces deux tendances au mouvement; donc une masse $2m$ ayant une vîtesse *V* fera équilibre à une masse *m* ayant en sens contraire une vîtesse $2V$. On prouvera de même qu'en général deux masses *M*

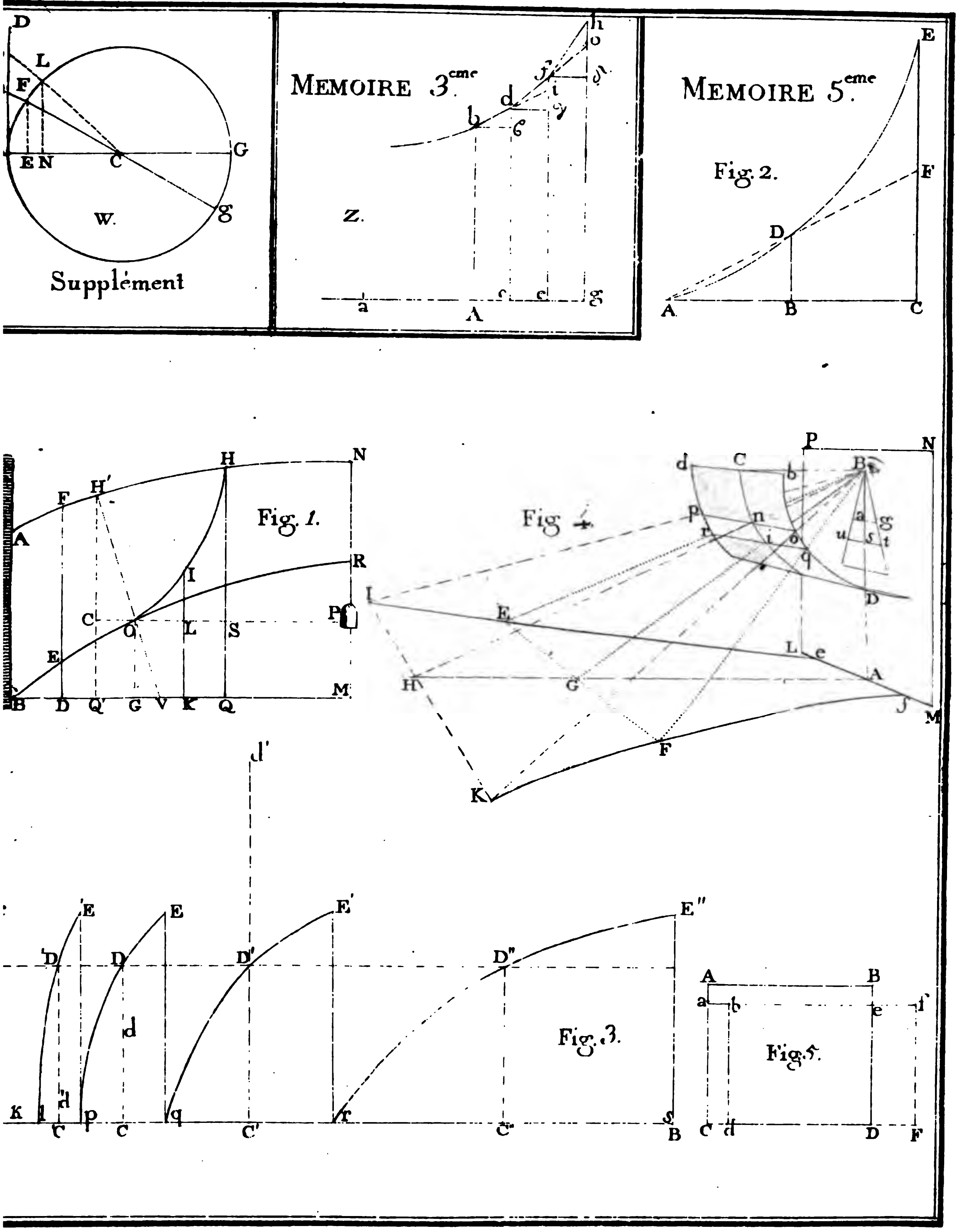

Supplement
W.
Memoire 3.eme
Z.
Memoire 5.eme
Fig. 2.
Fig. 1.
Fig 4
Fig. 3.
Fig. 5.

TABLE.

AVant-Propos.

Supplément au premier recueil. . . . . xvij

PREMIER MEMOIRE.

Suite du premier mémoire du recueil précédent, sur l'intégration des équations aux différences partielles qui admettent une intégration de l'ordre immédiatement inférieur.

CHAPITRE DIXIEME.

Recherches ultérieures sur l'équation générale du troisième ordre. 1

CHAPITRE ONZIEME.

Recherches ultérieures sur l'intégration générale des équations à trois variables du premier degré & d'un ordre quelconque supérieur au premier, qui ont une intégrale de l'ordre immédiatement inférieur. 34

CHAPITRE DOUZIEME.

Des équations aux différences partielles du second ordre & du premier degré entre quatre variables. 51

Suite du tableau récapitulatif. 77

TABLE.

QUATRIEME MEMOIRE.

Sur l'intégration des équations & systêmes d'équations différentielles d'un ordre quelconque, quels que soient leur nombre & celui de leurs variables.

CHAPITRE PREMIER.

Sur l'intégration des équations différentielles du premier ordre entre un nombre quelconque de variables. 186

CHAPITRE SECOND.

Sur l'intégration d'un systême de n *équations du premier ordre entre* n + 1 *variables.* 199

CHAPITRE TROISIEME.

Sur l'intégration d'un systême de n *équations différentielles des ordres supérieurs entre* n + 1 *variables.* 212

CHAPITRE QUATRIEME.

Sur l'intégration des équations aux différences partielles du premier ordre par l'inverse de la méthode précédente. 216

CINQUIEME MEMOIRE.

Sur différens sujets.

I. Sur la surface de fracture des corps durs. 221

TABLE.

II. De l'intérêt sur intérêt continu. 225
III. Sur un principe fondamental du calcul des jeux de hazard. 226
IV. Sur la construction de la constante arbitraire dans le calcul intégral aux différences finies. 227
V. Sur la projection orthogonale des surfaces courbes. . . 231
VI. Sur la courbure qu'il faut donner aux deux rangées d'arbres qui forment une allée, pour qu'étant apperçue d'un certain point, elle présente réellement sur toute sa longueur deux lignes droites parallèles. 234
VII. Sur la mesure des parallélogrammes rectangles. . . 237
VIII. Sur la loi de l'équilibre dans le choc des corps. . . 239

Fin de la Table.

ERRATA.

Page.	Ligne.	
72	*A la réclame*,	Σ *lisez* tions
88	dito	mais *lisez* Mais
158	7	*dans la seconde partie du second membre de l'expression de* b ; *le premier e est un peu trop élevé, aussi-bien que le facteur final y*,
185	8	(§ 102) lisez (*prem. rec. prem. mém.* § 102).

AVIS AU RELIEUR.

La planche doit être placée entre la page 242 & la Table des matières, de manière qu'étant étendue, toutes les figures en débordent le livre, et se montrent au lecteur.

Equations (differential
(I.C)

MÉMOIRE

SUR

L'INTÉGRABILITÉ médiate des équations différentielles, d'un ordre quelconque, et entre un nombre quelconque de variables,

Par C. F. DE NIEUPORT, de l'Institut national,

FAISANT SUITE A SES MÉLANGES MATHÉMATIQUES.

Has mihi nemo invidit opes; hæc una supersunt,
Et jam vergenti sat erunt solatia vitæ.

A BRUXELLES,
De l'Imprimerie de M. LEMAIRE.
ET SE TROUVE A PARIS,
Chez J. B. M. DUPRAT, Libraire, Quai des Augustins.

An X = 1802.

AVERTISSEMENT.

CE Mémoire étoit destiné à entrer dans la collection de l'Institut national, auquel j'avois eu l'honneur de le présenter peu de tems après mon admission au nombre des ses Associés. * Mais sa longueur et le rapport intime qu'il a avec différens sujets traités précédemment dans mes *Mélanges mathématiques*, m'ayant déterminé depuis à le faire imprimer à part dans le même format, comme faisant suite à ces Mélanges, j'ai profité de cette occasion pour placer à la fin un supplément au second tome ou recueil du même ouvrage.

* Il fut envoyé en Nivose an VIII (vers la fin de 1799); mais par la négligence du libraire de Paris qui en étoit chargé, il ne fut remis qu'en Floréal suivant (au commencement de mai 1800).

MÉMOIRE.

Sur l'intégrabilité médiate *des équations différentielles d'un ordre quelconque et entre un nombre quelconque de variables.*

1. L'INTÉGRABILITÉ dont il sera question ici, n'est pas cette intégrabilité *immédiate* qui consiste en ce qu'une équation, ou une fonction soit, dans son état actuel même, une différentielle exacte. Cette matière a déja été si parfaitement traitée, que depuis longtems elle ne présente plus aucune difficulté. Il n'en est pas de même de l'intégrabilité *médiate* qui sera seule l'objet de ce Mémoire, et qu'on peut définir *l'aptitude à devenir une différentielle exacte au moyen d'un facteur.* Cette dernière théorie, dans les points même les plus simples, laisse encore beaucoup d'incertitude. En effet malgré l'accord unanime des Géomètres, à reconnoître que l'équation du premier ordre entre deux variables $\alpha dy + \beta dx = 0$ est toujours intégrable de cette manière, personne jusqu'ici n'a réussi à donner de cette vérité une démonstration satisfaisante. Ce sujet s'étoit déja offert à moi, et je m'en suis occupé, mais très-superficiellement, et uniquement comme d'un sujet accessoire, dans le second tome de mes *Mélanges mathématiques page* 193. La lecture d'un nouveau Mémoire sur *l'intégration des équations différentielles* *

* Par P. Franchini, etc.

scisse x, x', x'', *&c.* selon la loi $y = \phi : x$. Si ayant pris une quelconque de ces abscisses x et son ordonnée y pour les deux coordonnées primitives, on suppose que x devienne $x + h$; on aura la nouvelle ordonnée résultante de ce changement, $Y = \phi(x + h)$ qui, comme on sait, sera exprimée par (A)

$$Y = y + h\frac{dy}{dx} + \frac{1}{2}.h^2\frac{d^2y}{dx^2} + \&c.$$

Maintenant si $y = \phi : x$ étoit déterminée, toute cette formule le seroit évidemment aussi, et elle ne contiendroit plus que x et h, x étant telle grandeur constante a qu'on voudroit; c'est-à-dire, qu'en faisant $h = t - a$, on auroit

$$Y = \phi : a + (t - a)\phi' : a + \frac{1}{2}(t - a)^2\phi'' : a + \&c.$$

Mais cette même formule sera également déterminée, si on connoît seulement $\frac{dy}{dx} = -\frac{\varepsilon}{\alpha}$. En effet, on a alors, à cause de la constante arbitraire c qu'introduit toujours une pareille équation du premier ordre, la liberté de fixer à volonté l'ordonnée $y = b$, aussi bien que l'abscisse $x = a$. Ainsi la formule A ne contenant que h, y et x, ou plutôt h, b et a, ne variera plus qu'à raison de h. Et conséquemment la valeur de chaque ordonnée Y ou y sera déterminée par une loi uniforme qui règnera entr'elle, son abscisse $a + h$ ou x, et les coordonnées primitives a, b. Donc toute équation différentielle $\alpha dy + \varepsilon dx = 0$ emporte la coexistence d'une série A, qui se rapporte uniquement à elle. Or une pareille série est toujours le développement d'une certaine équation déterminée $Y = \phi\ (x + h)$, et celle-ci n'est que l'équation $y = \phi : x$ rapportée à un point éloigné, d'une quantité quelconque h, du premier; donc toute équation $\alpha dy +$

$\beta dx = 0$ emporte la coexistence d'une équation déterminée $y = \phi : x$, ou $f(y, x) = c$, entre les variables finies y et x, c étant la constante arbitraire qui reçoit sa détermination des deux coordonnées primitives a et b. Donc &c.

Ce raisonnement me semble lever tous les doutes que j'avois laissé subsister à ce sujet, dans le quatrième Mémoire du second tome de mes *Mélanges mathématiques*, en terminant l'art. 4.

4. Je passe aux équations à trois variables ; mais avant de me livrer à cette discussion, je m'arrêterai à quelques réflexions sur ces équations, qui en feront mieux connoître la nature. Toute équation finie entre trois variables z, y, x et des constantes peut évidemment désigner une surface courbe continue, puisqu'elle détermine la grandeur de chaque ordonnée verticale z, par rapport aux deux co-ordonnées, ou plutôt aux deux co-abscisses y et x. Il n'en est pas de même de l'équation différentielle du premier ordre entre ces trois mêmes variables, $\alpha dz + \beta dy + \gamma dx = 0$. Celle-ci n'établit de relation qu'entre les *rapports différentiels* $\frac{dz}{dx}$ et $\frac{dy}{dx}$ (que je nommerai ainsi, pour les distinguer des *coèfficiens différentiels* $\frac{dz}{dy}$ et $\frac{dz}{dx}$, que les Géomètres désignent quelquefois par $\left(\frac{dz}{dy}\right)$ et $\left(\frac{dz}{dx}\right)$, et pour lesquels il seroit peut-être plus commode d'adopter la caractéristique d en cette manière $\frac{\mathrm{d}z}{dy}$ et $\frac{\mathrm{d}z}{dx}$, dans les cas où cette distinction devient nécessaire) * entre ces *rapports différentiels*, dis-je,

* Le principe de cette notation seroit donc que le caractère *italique* d resteroit affecté aux différentielles des variables indépendantes ; et que le caractère *romain* d le seroit à celles des

et les coordonnées finies. Or une pareille relation prise généralement est insuffisante pour lier entr'eux les différens points d'une surface courbe. En effet, si nous déterminons d'une manière quelconque z en x ; c'est-à-dire, si nous imaginons une certaine courbe dans le plan vertical des z et des x, il restera une équation différentielle entre y et x, dont le lieu est une quelconque des courbes, en nombre infini, représentées par cette équation (à cause de la constante arbitraire qu'admet son intégrale) tracée sur le plan horizontal de ces deux co-abscisses. Ainsi l'équation $\alpha\, dz + \beta\, dy + \gamma\, dx = 0$ ne désigne en général que la *famille* de courbes à double courbure dont deux pareilles courbes planes sont les deux projections ; *famille* immense, dont l'ensemble ne peut présenter qu'un faisceau incohérent de courbes à double courbure, se croisant et se coupant en tout sens, sans ordre, dans l'espace.

5. L'équation aux différences partielles $A \frac{dz}{dy} + B \frac{dz}{dx} + C = 0$ est, au contraire, toujours propre à exprimer une surface courbe. On peut même la construire par un procédé analogue à celui qu'on emploie pour la construction de l'équation différentielle à deux variables $\alpha\, dy + \beta\, dx = 0$.* En effet, ayant pris trois

---

quantités qu'on différentie comme fonctions de plusieurs de ces mêmes variables. Ainsi on écriroit $dz = \frac{dz}{dy} dy + \frac{dz}{dx} dx +$ &c. Quant aux fonctions ϖ qui contiendroient, non seulement ces variables indépendantes y, x, &c., mais encore une fonction *implicite* z de ces mêmes variables, on pourroit y ajouter, comme fait Mr. Lacroix (traité de calc. différ. et intég. tom 1, § 70) deux parenthèses ; ainsi $\frac{d(\varpi)}{dy} = \frac{d\varpi}{dz}\frac{dz}{dy} + \frac{d\varpi}{dy}$, &c.

(*) Voyez Traité du calcul intég. par M. De Bougainville, seconde partie, pag. 27.

axes qui se coupent à angles droits ; l'un vertical, qui est celui des ordonnées z ; et les deux autres horizontaux, qui sont les axes des co-abscisses y et x, imaginons une courbe quelconque *continue* ou *discontinue*, tracée sur un plan vertical placé à une distance y, parallèlement à celui des z et des x. Cela posé, on peut à chaque point de cette courbe, regarder comme connus y, z, x et $\frac{dz}{dx}$ ou si l'on veut, selon l'expression proposée ci-dessus, $\frac{dz}{dx}$ qui est toujours la tangente *trigonométrique* de l'angle que forme, en chaque point de cette courbe, la tangente avec l'axe des abscisses x. Ainsi au moyen de l'équation $A\frac{dz}{dy}+B\frac{dz}{dx}+C=0$ il sera toujours possible de déterminer, ou du moins, dans le cas de la courbe *discontinue*, de construire $\frac{dz}{dy}$ ou $\frac{dz}{dy}$; c'est-à-dire la tangente *trigonométrique* de l'angle que formeroit, en ce même point, avec l'abscisse correspondante y, la tangente d'une courbe décrite sur un plan vertical, dont cette même abscisse seroit la section avec le plan horizontal. Achevant ensuite le petit parallélogramme dont la partie de chacune de ces deux tangentes correspondante à chacun des deux élémens constans dy et dx forme un des deux côtés, on fixera, par la rencontre mutuelle des deux autres, le point où se termine, en vertu de sa double variation, l'ordonnée suivante z'. Et comme la même opération est applicable à chacune des ordonnées z de cette courbe primitive, il s'ensuit qu'on aura déterminé de cette manière le cours entier d'une autre courbe infiniment voisine de la première. Regardant ensuite celle-ci comme la courbe primitive, on en assignera de même une seconde, et ainsi de suite.

6. Cette différence dans la manière de considérer les varia-

tions co-instantanées de trois variables, est ce qui constitue véritablement le caractère distinctif du calcul différentiel ou intégral ordinaire, à celui aux différences partielles. On voit en effet, comme je l'ai déjà dit *, que dans le premier il n'y a qu'une variable indépendante x, dont la variation arbitraire dirige, et sert de *module* unique à celle des deux autres variables z, y, qui sont regardées comme des fonctions de celle-ci. Dans l'autre au contraire, toutes les variables, excepté une, par exemple z, sont considérées comme indépendantes, et chacune de leurs variations concourt à diriger et à servir de *module* à la totalité de la variation de z.

C'est d'après ces raisons que j'ai proposé à l'endroit cité les dénominations de calcul différentiel ou intégral *unimodulaire*, et de calcul différentiel ou intégral *plurimodulaire*, qui me semblent définir d'une manière si adéquate ces deux différentes branches des calculs différentiel et intégral. Un examen ultérieur m'a même déterminé, non seulement à les adopter en effet ici, mais encore à les étendre aux équations différentielles qui dérivent de chacune de ces deux hypothèses. Il est vrai, comme je l'ai observé au même endroit, qu'une équation différentielle *unimodulaire* peut quelquefois résulter de l'hypothèse *plurimodulaire ;* mais elle n'en est pas moins *unimodulaire*. En général, une équation différentielle *unimodulaire* est celle qui lie entr'eux et avec les variables finies, les *rapports différentiels* $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dy}{dx}$, *&c.* qui dépendent d'un seul module dx ; et une équation différentielle *plurimodulaire* est

* Dans l'avant-propos du second recueil de mes Mélang. mathém. page XII, à la note.

celle qui lie entr'eux et avec les variables finies les *coèfficiens différentiels* $\frac{d\zeta}{dy}$, $\frac{d\zeta}{dx}$, &c. ou $\frac{d\zeta}{dy}$, $\frac{d\zeta}{dx}$, &c. qui dépendent de plusieurs *modules* dy, dx, &c. Tout ceci s'appliquera également aux ordres supérieurs.

Dans le second Mémoire du même recueil j'ai nommé *indéterminées* les équations entre un nombre quelconque de quantités α, β, γ, etc. qui sont elles-mêmes des fonctions implicites des variables indépendantes x, y, u, &c. Je saisirai cette occasion de faire remarquer qu'il seroit préférable de les désigner en général par le nom de *plurifonctionnelles*, et en particulier par ceux de *bifonctionnelles*, *trifonctionnelles*, etc. Ainsi les équations différentielles ordinaires de l'ordre n entre cinq variables seront des équations *quadrifonctionnelles unimodulaires* de ce même ordre. Celle $A\frac{d\zeta}{dy} + B\frac{d\zeta}{dx} + C = 0$ seroit *unifonctionnelle bimodulaire* du premier. L'équation

$$A\left(\frac{d\alpha}{dx}\frac{d\beta}{dy} - \frac{d\alpha}{dy}\frac{d\beta}{dx}\right) + B\left(\frac{d\alpha}{dx}\frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\alpha}{dy}\frac{d\gamma}{dx}\right) + C\left(\frac{d\beta}{dx}\frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dy}\frac{d\gamma}{dx}\right) + E = 0;$$

soit que ces coèfficiens, outre les fonctions α, β, γ, contiennent aussi les variables indépendantes x, y, ou non, seroit une équation *trifonctionnelle bimodulaire* du premier ordre, et ainsi de suite.

Il sera facile d'approprier ces dénominations, quels que soient et l'ordre et le nombre, tant des fonctions que des variables indépendantes qui caractérisent ces différentes équations. Cette nomenclature a l'avantage de les réunir toutes en un même système, et de faire apercevoir constamment leur dépendance mutuelle, et l'analogie qui règne entr'elles : je reviens à mon sujet.

7. Nous

7. Nous venons de voir 1°. que l'équation *unimodulaire* à trois variables désigne seulement une famille de courbes à double courbure, sans établir dans leur système une loi de continuité qui puisse le constituer en surface courbe ; et 2°. que l'équation *plurimodulaire* entre les mêmes variables désigne au contraire une famille de surfaces courbes, mais sans restreindre la famille de courbes à double courbure qu'on peut former sur ces mêmes surfaces, ou par lesquelles ces mêmes surfaces peuvent passer. Donc pour qu'une équation différentielle désigne une certaine famille de surfaces courbes, qui n'admette qu'une certaine forme limitée de courbes à double courbure, il faut que cette équation satisfasse aux deux hypothèses en question. Nous allons voir en effet que c'est précisément le concours de ces deux conditions qui détermine une équation différentielle *unimodulaire* du premier ordre, à avoir une intégrale finie ; c'est-à-dire, à être propre à définir une surface courbe.

8. Soit donc $\alpha dz + \beta dy + \gamma dx = 0$. Cette équation n'aura une intégrale de la forme $f(z, y, x) = c$, qu'autant que z pourra être exprimée par une fonction de y et de x ; c'est-à-dire, qu'il faut que l'hypothèse $z = \phi(y, x)$ puisse avoir lieu en même tems que la proposée ; et conséquemment, que $dz = Mdy + Ndx$, avec la seule condition générale de $\frac{dM}{dx} = \frac{dN}{dy}$. Or $dz = -\frac{\beta}{\alpha} dy - \frac{\gamma}{\alpha} dx$; donc $M = -\frac{\beta}{\alpha}$, $N = -\frac{\gamma}{\alpha}$ et ensuite $\frac{d\frac{\beta}{\alpha}}{dx} = \frac{d\frac{\gamma}{\alpha}}{dy}$ ou $\alpha\frac{d\beta}{dx} - \beta\frac{d\alpha}{dx} = \alpha\frac{d\gamma}{dy} - \gamma\frac{d\alpha}{dy}$.

Mais il faut observer de plus que α, β et γ contenant, outre

équations à deux variables, nous verrons que dans le dévelop-pement de la formule $Z = \phi\,(y + k, x + h)$; savoir,

$$Z = z + k\frac{dz}{dy} + \tfrac{1}{2}k^2\frac{d^2z}{dy^2} + \&c.$$
$$+ h\frac{dz}{dx} + h\,k\frac{d^2z}{dxdy} +$$
$$+ \tfrac{1}{2}h^2\frac{d^2z}{dx^2} +$$

il suffit que $\frac{dz}{dy}$ et $\frac{dz}{dx}$ soient déterminés, pour que cette expres-sion entière le soit. Or lorsque l'équation de condition B a lieu, et seulement alors, on a $\frac{dz}{dy} = M = -\frac{\beta}{\alpha}$ et $\frac{dz}{dx} = N = -\frac{\gamma}{\alpha}$. Donc il y a toujours dans ce cas, mais dans ce seul cas, une équation $\phi\,(z, y, x) = c$ qui est l'intégrale de la proposée.

9. Arrêtons-nous un moment ici, pour faire quelques réflexions sur le n°. 31 du Mémoire cité (§ 1) que je suppose sous les yeux du lecteur, ouvert à la page 38. L'auteur doute que, quoique l'équation B (qui répond précisément à la nôtre) soit identique, on puisse en inférer généralement que les trois équations A, d'où celle-ci dérive, le sont en même tems. Il appuie ce doute d'un exemple qu'il regarde comme faisant exception à la règle; savoir, celui où l'équation B devient identique par le concours des trois équations de condition à l'intégrabilité *immédiate* $\frac{dR}{dy} - \frac{dQ}{dy} = 0$, $\frac{dR}{dx} - \frac{dP}{dz} = 0$, $\frac{dQ}{dx} - \frac{dP}{dy} = 0$. Mais on peut répondre 1°. que dans ce même cas les trois équations A sont identiques comme dans tous les autres, puisque le facteur M ne pouvant être alors que constant ou égal à une fonction de $\int (Pdx + Qdy + Rdz)$ qui se trouve être une différentielle exacte, fonction que nous re-

présenterons par $\phi : \Pi$, on aura dans le premier cas $\frac{dM}{dx}$, $\frac{dM}{dy}$ et $\frac{dM}{dz}$ égaux à zéro ; et dans le second à cause de $M = \phi : \Pi$, on aura,

$$\frac{dM}{dx} = \frac{d\Pi}{dx} \phi' : \Pi = P \phi' : \Pi ; \frac{dM}{dy} = Q \phi' \Pi ; \frac{dM}{dz} = R \phi' : \Pi,$$

et conséquemment $R \frac{dM}{dy} - Q \frac{dM}{dz} = 0$, $R \frac{dM}{dx} - P \frac{dM}{dz} = 0$, $Q \frac{dM}{dx} - P \frac{dM}{dy} = 0$.* 2°. Que cette *identicité* doit nécessairement avoir lieu dans ce cas, comme dans les autres, puisque rien n'exprime ici dans le calcul que telle équation, *qui n'est point une différentielle exacte*, en devient une, mais seulement que telle équation, *soit qu'elle fût d'abord une différentielle exacte, ou non*, en est une actuellement, étant multipliée par le facteur M. Or il est évident que cette condition est satisfaite dans l'exemple allégué, lorsque ce facteur est constant ou $= \phi : \Pi$; donc &c.

10. Mais examinons cette difficulté sous le point de vue le plus général, toujours en suivant l'ouvrage cité. Il est certain que l'équation B peut *absolument* être identique, sans que pour cela les trois équations A le soient. En effet, si nous représentons celles-ci par $\Gamma = 0$, $\Gamma' = 0$, $\Gamma'' = 0$, il est évident que l'équation B, qui n'est autre chose que $P\Gamma - Q\Gamma' + R\Gamma'' = 0$, admettra une infinité de solutions toutes différentes du seul système en question $\Gamma = 0$, $\Gamma' = 0$, $\Gamma'' = 0$.

Commençons par déterminer la formule générale de ces solutions. Pour cela, nous supposerons qu'au lieu des trois équa-

* C'est ainsi qu'il faut corriger les équations A du Mémoire cité, qui ne sont que les trois équations de condition à l'intégrabilité *immédiate* de $M (P\,dx + Q\,dy + R\,dz) = 0$ qu'on suppose rendue exacte au moyen du facteur M, voyez ci-après § 11.

tions A, on ait $\Gamma = m$, $\Gamma' = n$, $\Gamma'' = p$, m, n et p étant des indéterminées. Multipliant ensuite ces trois dernières, dans le même ordre, par P, — Q, et R, nous prendrons la somme de ces produits ; savoir $P\Gamma - Q\Gamma' + R\Gamma'' = Pm - Qn + Rp$. Or pour que cette équation coïncide avec B, il suffit que $Pm - Qn + Rp = 0$; c'est-à-dire, que $n = \frac{Pm + Rp}{Q}$. Donc de ce que l'équation B est identique, on ne peut, dans le sens absolu, rien inférer, sinon qu'un quelconque du nombre infini de systèmes particuliers contenus dans le système général (C).... $\Gamma = m$, $\Gamma' = \frac{Pm + Rp}{Q}$, $\Gamma'' = p$, a nécessairement lieu.

Mais la généralité de ce système est elle réellement admissible dans la question présente ? Il est aisé de prouver que non. En effet, quelle que soit la proposée, intégrable ou non, il est certain que la somme de deux quelconques de ses termes peut toujours devenir une différentielle exacte au moyen d'un facteur M, en supposant la troisième variable constante. Ainsi chacune des trois équations A individuellement est nécessairement vraie dans tous les cas ; et conséquemment de tous les systèmes particuliers contenus dans le système général C, le seul admissible ici est celui A. Ce qui constitue la différence d'une équation intégrable à celle qui ne l'est pas, n'est point la forme de chacune des trois équations A en particulier, mais l'identicité simultanée de ces trois équations en vertu d'une seule et même valeur de M, ce qui ne sauroit avoir lieu lorsque la proposée n'est point intégrable.

Nous avons vu 1°. que l'identicité de l'équation B emporte nécessairement celle d'un quelconque des systèmes particuliers

renfermés dans le système général C ; 2°. que d'ailleurs la question présente n'admet, de tous ces systèmes particuliers, que le seul système A. Nous pouvons donc conclure que l'identicité de l'équation B détermine aussi nécessairement celle des trois équations A, que celle-ci détermine celle de B.

11. La manière dont je déduis ces trois équations de condition dans le second tome de mes *Mélanges mathématiques*, *page* 192, me paroît très-propre à jeter sur tout ceci un nouveau degré de clarté. La proposée étant toujours $Pdx + Qdy + Rdz = 0$, si je la multiplie par M, il faut que deux quelconques de ces trois termes constituent une différentielle exacte, par exemple les deux derniers termes en supposant x constante. Nous aurons donc $M\left(\frac{dR}{dy} - \frac{dQ}{dz}\right) + R\frac{dM}{dy} - Q\frac{dM}{dz} = 0$, et cette condition pourra toujours être satisfaite ; soit que la proposée soit intégrable, ou non. Mais la seconde condition fera bientôt disparoître toute incertitude. En effet, pour que le premier cas ait lieu, il faut en outre que $\frac{d.\int(MQdy + MRdz)}{dx} = MP$; ou ce qui est la même chose, $\int\frac{d(MQdy + MRdz)}{dx} = MP$; ou en différentiant les deux membres par y et z, auxquels seuls se rapporte le signe $\int$,

$$dy\left(M\frac{dQ}{dx} + Q\frac{dM}{dx}\right) + dz\left(M\frac{dR}{dx} + R\frac{dM}{dx}\right) = M\left(\frac{dP}{dy}dy + \frac{dP}{dz}dz\right) + P\left(\frac{dM}{dy}dy + \frac{dM}{dz}dz\right).$$

Donc enfin $M\left(\frac{dQ}{dx} - \frac{dP}{dy}\right) + Q\frac{dM}{dx} - P\frac{dM}{dy} = 0$, et

$$M\left(\frac{dR}{dx} - \frac{dP}{dz}\right) + R\frac{dM}{dx} - P\frac{dM}{dz} = 0 ;$$

qui sont les deux autres équations A.

Nous pouvons donc conclure généralement que toute équation

différentielle à trois variables $\alpha dz + \beta dy + \gamma dx = 0$, qui satisfait à l'équation B ci-dessus (§ 8), a une intégrale de la forme $\phi(z, y, x) = c$.

Quant à celles qui n'y satisfont pas, on sait qu'elles n'en sont pas moins intégrables, mais que leur intégrale ne peut être exprimée par une seule équation.

12. On réussiroit également, d'après le principe ci-dessus (§ 8), à assigner d'une manière très-simple, les trois équations de condition à l'intégrabilité *médiate*, que comporte le cas de quatre variables z, y, u, x. Je m'abstiendrai donc de répéter ici ces opérations; d'autant que cette même méthode, à laquelle son analogie avec la marche que j'avois suivie pour le cas de deux variables, et mes réflexions préliminaires sur la nature des équations différentielles qui en contiennent trois, n'ont pu manquer de me conduire, est déjà connue. * Il ne sera pas moins facile d'appliquer à ce nouveau cas, tant le raisonnement (§ 8) par où je prouve qu'au moyen de ces équations de condition, la formule

$$\begin{aligned} Z = z &+ l \frac{dz}{du} + \&c. \\ &+ k \frac{dz}{dy} + \\ &+ h \frac{dz}{dx} + \end{aligned}$$

et conséquemment aussi la fonction $\phi(z, u, y, x)$ est entièrement déterminée, que ceux (§ 9, 10, 11) par lesquels je répons à l'objection tirée de ce que l'identicité de l'équation de con-

* Voyez Traité de calcul différ. et intég. par S. F. Lacroix, tome 2d, art. 710.

dition à l'intégrabilité *médiate* B n'emporte pas nécessairement celle des équations dont elle dérive.

Nous conclurons donc finalement de tout ce qui précède, que toute équation du premier ordre entre un nombre quelconque n de variables est intégrable par une seule formule $\phi(z, t, u, y, x, \&c.) = c$, dès qu'elle satisfait à ses $\frac{n-1 . n-2}{1 . 2}$ équations de condition à l'intégrabilité *médiate*. Je passe aux équations des ordres supérieurs.

13. J'ai déjà fait remarquer, dans le second tome de mes *Mélanges mathématiques*, *page* 195, que toute équation différentielle d'un ordre quelconque entre deux variables présente, aussi bien que toute équation du premier ordre, la possibilité d'une construction, idéale à la vérité, mais suffisante pour prouver que l'existence d'une pareille équation emporte nécessairement la co-existence d'une loi uniforme entre des co-ordonnées finies. Je vais maintenant prouver ultérieurement, par le même raisonnement que j'ai employé pour le premier ordre, que non seulement la co-existence de cette loi est une suite nécessaire de l'existence d'une pareille équation, mais encore la co-existence successive d'une équation de chacun des ordres inférieurs, jusques et y compris l'équation finie propre à définir cette même loi.

14. En effet étant donnée l'équation (D)... $\alpha \frac{d^2y}{dx^2} + \beta = 0$, où α et β contiennent, d'une manière quelconque, y, x et $\frac{dy}{dx}$, je dis qu'on peut toujours en inférer une certaine équation de l'ordre inférieur, de la forme ou réductible à la forme (E)... $A \frac{dy}{dx} + B = 0$. Il suffit, pour s'en convaincre, de considérer que

que dans la formule A (§ 3) la détermination du *rapport* ou *coèfficient* différentiel $\frac{d^2y}{dx^2}$ (car lorsqu'il n'y a que deux variables, il est évident (§ 4) qu'on peut indistinctement lui donner l'une ou l'autre de ces deux dénominations) détermine elle seule complettement toute cette formule, qui dès-lors exprimera la loi particulière qui résulte de l'équation D, entre chaque ordonnée Y ou y, son abscisse correspondante $a+k$ ou x, les co-ordonnées primitives arbitraires a, b, et enfin la tangente *trigonométrique* également arbitraire $\frac{db}{da}$ de l'angle que forme la tangente en ce premier point avec l'axe des x. Il suit évidemment delà que l'équation D suffit pour donner à l'expression de Y ou y; c'est-à-dire, à la fonction $\phi(a+k)$ ou $\phi:x$, et conséquemment aussi à celle $f(y, x)$, une forme déterminée. Donc l'existence de cette même équation D emporte la co-existence d'une équation finie entre les co-ordonnées y, x et deux constantes arbitraires C, c qui recevront leurs déterminations particulières de celles des quantités primitives ci-dessus : équation qui n'est autre que son intégrale finie. Donc toute équation du second ordre entre deux variables seulement, et réductible à la forme D est intégrable au moins *médiatement*. Et comme les mêmes raisonnemens s'appliquent à un ordre quelconque nous conclurons généralement que toute équation d'un ordre quelconque m, qu'on peut mettre sous la forme $\alpha\frac{d^my}{dx^m}+\beta=0$, α et β contenant y, x, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, &c. jusqu'à l'ordre $m-1$, sera intégrable au moyen d'un facteur; que cette première intégrale, qui sera de l'ordre $m-1$, aura pareillement une intégrale au moins *médiate* de l'ordre $m-2$; &c.; et qu'enfin on parviendra toujours ainsi successivement à son intégrale finie.

Or pour que l'équation G ait lieu en même tems que celle... (H)

$$dp+\eta dq+\rho dz+\varsigma dy+(\zeta-\rho p-\varsigma q)\,dx=0,$$

il faut que $M=-\eta$, $N=-\rho$, $P=-\varsigma$, $Q=-(\zeta-\rho p-\varsigma q)$. Ainsi en substituant ces valeurs dans les équations g, nous aurons, dans le même ordre, les six équations suivantes (I), où on observera 1°. que tous les coëfficiens, tant ceux connus η, ζ; que les inconnus ρ, ς, pouvant outre q, z, y et x, contenir encore la letttre p qui, conformément à l'hypothèse de la formule G, est elle-même fonction de ces quatre mêmes variables, on a, par exemple, $\frac{dM}{dz}=-\frac{d\eta}{dz}=-\frac{d\eta}{dp}\frac{dp}{dz}-\frac{d\eta}{dz}$; &c.

2°. que j'ai substitué dans ces équations, aux coëfficiens différentiels $\frac{dp}{dq}$, $\frac{dp}{dz}$, $\frac{dp}{dy}$ et $\frac{dp}{dx}$, leurs valeurs $-\eta$, $-\rho$, $-\varsigma$, et $-(\zeta-\rho p-\varsigma q)$, de manière que $-\frac{d\eta}{dp}\frac{dp}{dz}$, par exemple, est devenu $+\rho\frac{d\eta}{dp}$.

Cela posé, nous aurons les six équations (I)

1°. $\eta\frac{d\rho}{dp}-\frac{d\rho}{dq}-\rho\frac{d\eta}{dp}+\frac{d\eta}{dz}=0$,

2°. $\eta\frac{d\varsigma}{dp}-\frac{d\varsigma}{dq}-\varsigma\frac{d\eta}{dp}+\frac{d\eta}{dy}=0$.

3°. $\eta p\frac{d\rho}{dp}-p\frac{d\rho}{dq}+\eta q\frac{d\varsigma}{dq}-q\frac{d\varsigma}{dq}-\eta\frac{d\zeta}{dp}+\frac{d\zeta}{dq}+(\zeta-\rho p-\varsigma q)\frac{d\eta}{dp}-\frac{d\eta}{dx}+\eta\rho-\varsigma=0$;

4°. $\varsigma\frac{d\rho}{dp}-\frac{d\rho}{dy}-\rho\frac{d\varsigma}{dp}+\frac{d\varsigma}{dz}=0$,

5°. $(\zeta-\varsigma q)\frac{d\rho}{dp}-p\frac{d\rho}{dz}-\frac{d\rho}{dx}+\rho q\frac{d\varsigma}{dp}-q\frac{d\varsigma}{dz}-\rho\frac{d\zeta}{dp}+\frac{d\zeta}{dz}+\rho^2=0$,

6°. $\varsigma p\frac{d\rho}{dp}-p\frac{d\rho}{dy}+(\zeta-\rho p)\frac{d\varsigma}{dp}-q\frac{d\varsigma}{dy}-\frac{d\varsigma}{dx}-\varsigma\frac{d\zeta}{dp}+\frac{d\zeta}{dy}+\rho\varsigma=0$.

On réduira aisément la troisième, au moyen des deux premières, à.... (J)

a) $\eta\rho-\varsigma=p\frac{d\eta}{dz}+q\frac{d\eta}{dy}-\zeta\frac{d\eta}{dp}+\frac{d\eta}{dx}+\eta\frac{d\zeta}{dp}-\frac{d\zeta}{dq}$;

la cinquième, au moyen de la quatrième, à

b) $z\frac{d\rho}{dp}-p\frac{d\rho}{dz}-q\frac{d\rho}{dy}-\frac{d\rho}{dx}-\rho\frac{d\zeta}{dp}+\rho^2+\frac{d\zeta}{dz}=0$;

et la sixième, au moyen de la même, à

c) $z\frac{d\zeta}{dp}-p\frac{d\zeta}{dz}-q\frac{d\zeta}{dy}-\frac{d\zeta}{dx}-\zeta\frac{d\zeta}{dp}+\rho\zeta+\frac{d\zeta}{dy}=0$.

Ainsi tout se borne à trouver deux fonctions ρ et ζ de p, q, z, y et x qui satisfassent à ces trois équations : ce qui réduit désormais p à l'état de variable simple et indépendante comme les autres.

16. Pour y parvenir, nous soustrairons l'équation c de celle b multipliée par η, d'où (K)

$$)-p\left(\eta\frac{d\rho}{dz}-\frac{d\zeta}{dz}\right)-q\left(\eta\frac{d\rho}{dy}-\frac{d\zeta}{dy}\right)-\left(\eta\frac{d\rho}{dx}-\frac{d\zeta}{dx}\right)+(\eta\rho-\zeta)\left(\rho-\frac{d\zeta}{dp}\right)+\eta\frac{d\zeta}{dz}-$$

Or par la première équation a, en représentant son second membre qui est tout-à-fait déterminé, par Π, on a $\eta\rho-\zeta=\Pi$; donc $\eta d\rho-d\zeta=d\Pi-\rho d\eta$; ce qui change l'équation K en (L)

$$\frac{I}{;}-p\frac{d\Pi}{dz}-q\frac{d\Pi}{dy}-\frac{d\Pi}{dx}-\Pi\frac{d\zeta}{dp}+\eta\frac{d\zeta}{dz}-\frac{d\zeta}{dy}+\rho\left(\Pi-z\frac{d\eta}{dp}+p\frac{d\eta}{dz}+q\frac{d\eta}{dy}+\frac{d\eta}{dx}\right)=0;$$

d'où résulte pour ρ une valeur déterminée, et conséquemment aussi pour $\zeta=\eta\rho-\Pi$.

Ce résultat satisfait pleinement à l'équation a; mais il n'en est pas de même de celles b et c. En effet, nous avons seulement employé la combinaison ηb — c, formule beaucoup plus étendue que le système particulier b et c qui doit seul avoir lieu, et auquel on la ramènera évidemment en réalisant ultérieurement b ou c; c'est-à-dire, qu'il faut encore vérifier l'une de ces deux équations, qui doivent devenir toutes deux identiques, lorsqu'on y substitue, à ρ et ζ, leurs valeurs. Ainsi le résultat de cette substitution, dans l'une ou l'autre des deux équations b, c, est

l'équation de condition à l'intégrabilité *médiate* de l'équation différentielle $dp + \eta dq + \zeta dx = 0$.

Cette formule prise dans toute sa généralité seroit d'une complication rebutante : aussi ne chercherons nous point à la développer, et nous y suppléerons par la règle suivante, qui est aussi générale qu'elle est simple.

Ayant déterminé les valeurs de ρ *et* ς, *on vérifiera l'une ou l'autre des deux équations* b, c, *et si elle a lieu, la proposée est nécessairement intégrable, du moins au moyen d'un facteur* μ.

17. Appliquons ceci à l'équation

$$zyd^2z + (1-z)zd^2y - 2(1-z)dzdy - (1-z+y^2)dzdx - 2ydz^2 + zydydx = 0;$$

ou en faisant $dz = pdx$, $dy = qdx$,

$$zydp + (1-z)zdq + \left(qzy - 2(1-z)pq - (1-z+y^2)p - 2yp^2\right)dx = 0.$$

On a ici $\eta = \frac{1-z}{y}$, $\zeta = \frac{qzy - 2(1-z)pq - (1-z+y^2)p - 2yp^2}{zy}$, et on en conclut, par la formule a,

$$\Pi = \frac{pzy - 2py + 3qz - qz^2 - 2q - z^2 + 2z - y^2 - 1}{zy^2},$$

d'où il résultera ultérieurement, par celle L, $\rho = \frac{qz + z - 2py - 2q - y^2 - 1}{zy}$, et ensuite $\varsigma = \frac{p+y}{y}$; Donc $\zeta - \rho p - \varsigma q = 0$. Il ne reste plus qu'à vérifier l'une des équations b, c; et comme elles se trouvent toutes deux identiques, les valeurs de ρ et de ς satisfont à toutes les conditions. Ainsi en donnant à la proposée la forme . . . (M)

$$zydp + z(1-z)dq + (qz + z - 2py - 2q - y^2 - 1)dz + z(p+y)dy = 0,$$

on est sûr qu'elle est intégrable en cet état, en la considérant comme une équation du premier ordre entre les quatre variables p, q, z et y, puisque la cinquième x n'y paroît plus. On parviendra

aisément à cette intégration de la manière que j'ai enseignée dans le second recueil de mes *Mélanges mathématiques*, *mém.* 4, *chap.* 1; et on trouvera pour intégrale,

$$\frac{2yp + 2(1-z)q + y^2 - 2z + 1}{u\ z^2} = c.$$

18. Cette méthode s'étend généralement à toutes les équations du second ordre à trois variables, sans exception. Nous en ferons un nouvel essai sur un exemple très-compliqué des *rapports* différentiels p, q; savoir, $(3yp + xq)\,dp + 2pxdq + 2pq(p+1)\,dx = 0$. Ici $\eta = \frac{2px}{3yp + xq}$, $\zeta = \frac{2pq(p+1)}{3yp + xq}$, et au moyen de l'équation a on trouve $\Pi = \frac{-2p^2}{3yp + xq}$ qui est la valeur de $\eta\rho - \zeta$. D'un autre côté l'équation L donne $\rho = 0$; donc $\zeta = -\Pi = \frac{2p^2}{3yp + xq}$. D'ailleurs ces valeurs satisfont aussi aux équations b et c; donc la proposée est intégrable du moins *médiatement*. Nous connoissons $\rho = 0$, $\zeta = \frac{2p^2}{3yp + xq}$; donc $\zeta - \rho p - \zeta q = \frac{2pq}{3yp + xq}$. Ainsi nous pourrons donner à cette même proposée la forme $(3yp + xq)\,dp + 2pxdq + 2p^2dy + 2pqdx = 0$, et la traiter comme une équation du premier ordre entre les quatre variables p, q, y et x. Maintenant si on cherche son intégrale par la méthode indiquée ci-dessus, en prenant ici p pour t, et q pour u, on aura $a = 2pq$, $b = 2p^2$, $c = 2px$; $g = 3yp + xq$ (*Rec.* 2[d]. *mém.* 4, § 2); et au moyen de l'équation $2px\frac{d\sigma}{dp} - (3yp + xq)\frac{d\sigma}{dq} = 0$, on trouvera $\sigma = \phi(\overline{yp + xq}^{\,2} . p)$ qui satisfait à toutes les autres. Ainsi l'intégrale de la proposée est $(yp + xq)^2 p = c$, ou $y^2p^3 + 2p^2qxy + pq^2x^2 = c$, ou enfin $y^2dz^3 + 2xydydz^2 + x^2dy^2dz - cdx^3 = 0$.

19. Mais voici une difficulté qui ne peut manquer de se pré-

senter, quand on se rappelle que l'algèbre embrasse nécessairement dans ses réponses toutes les solutions relatives à une même question ; c'est qu'y ayant, dans les cas où la proposée du second ordre a une intégrale finie, deux intégrales du premier ordre, il faut alors que ρ et ζ ayent deux, ou plutôt une infinité de valeurs, à cause des différentes combinaisons, en nombre infini, dont ces deux valeurs sont susceptibles entr'elles.

Prenons pour exemple l'équation finie $zy = ax + b$. Il en résulte d'abord les deux équations différentielles du premier ordre $ydz + zdy - adx = 0$, et $x(ydz + zdy) - (zy - b)dx = 0$; c'est-à-dire (M 1) ... $py + qz - a = 0$ et $pxy + qzx - zy + b = 0$, dont la première donne ultérieurement $ydp + zdq + qdz + pdy = 0$; et la seconde, $xydp + zxdq + (qx - y)dz + (px - z)dy + (py + qz)dx = 0$, qui à cause de $pydx = ydz$, et de $qzdx = zdy$, ne sont qu'une seule et même équation. Il suit évidemment delà que les deux valeurs $\frac{q}{y}$ et $\frac{qx-y}{xy}$ de ρ, ainsi que celles $\frac{p}{y}$ et $\frac{px-z}{xy}$ de ζ ont nécessairement lieu en même tems ; et conséquemment que non seulement chacune de ces deux valeurs de ρ et de ζ, mais encore toutes les valeurs à l'infini que donneroient à ces indéterminées les combinaisons sans nombre qu'on peut faire subir aux deux équations M 1 ; comme si, par exemple, ayant fait $(py + qz)^m = a^m$, on l'ajoutoit à $(pxy + qzx - zy)^n = (-b)^n$, et qu'on fît $a^m + (-b)^n$ égal à une nouvelle constante arbitraire c ; &c. toutes ces valeurs, dis-je, doivent être comprises dans les expressions de ρ et de ζ.

20. Voici la réponse à cette difficulté : c'est qu'alors l'algèbre ne s'exprime, selon sa coutume, que d'une manière vague et

insignifiante. En effet, on a dans notre exemple $\eta = \frac{1}{y}$, $\zeta = \frac{zyq}{y}$; et on conclut delà $\Pi = \eta\rho - \zeta = \frac{qz - py}{y^2}$, ce qui réduit l'équation L (§ 16) à $0 + 0\rho = 0$, ou $\rho = \frac{0}{0}$. Ainsi il faut alors tirer, de la seconde équation b elle-même, la valeur de ρ; ce qui fera connoître celle de ζ au moyen de la première a ou $\eta\rho - \zeta = \Pi$. Et on sera sûr que la troisième équation sera également satisfaite par ces valeurs de ρ et de ζ, puisque celle L, c'est-à-dire le système des deux équations a et ηb — c (§ 16) est identique, et qu'on a de plus satisfait en particulier à l'équation b par la valeur de ρ.

Nous aurons, par exemple, ici en substituant dans b la valeur de ζ ... (M2)

$$2pq\frac{d\rho}{dp} - py\frac{d\rho}{dz} - qy\frac{d\rho}{dy} - y\frac{d\rho}{dx} - 2q\rho + \rho^2 y = 0,$$

dont on trouvera aisément l'intégrale au moyen de la première formule de l'art. 35 (*Mél. mathém.* 1^er^ *rec.* 1^er^ *mém.*) en y mettant, pour la compléter, $dz + \frac{R}{Q}dt$ au lieu de dz, R étant le terme sans différence partielle que j'ai supposé nul dans cet article; savoir, $\frac{py\rho - pq}{\rho} = F(py^2, qz + py, qx - y, q)$; et on en conclura ultérieurement $\rho = \frac{pq}{py - F(py^2, qz + py, qx - y, q)}$. Ainsi en faisant ici $F = 0$, on auroit $\rho = \frac{q}{y}$, d'où $\zeta = \eta\rho - \Pi = \frac{qz}{y^2} - \frac{qz - py}{y^2} = \frac{p}{y}$; et ensuite $\zeta - \rho p - \zeta q = 0$.

Une des véritables formes de la proposée réduite à une équation du premier ordre est donc $ydp + zdq + qdz + pdy = 0$, ce qui est parfaitement d'accord avec le résultat auquel nous sommes parvenus

venus par la différentiation. On auroit également obtenu l'autre valeur de ρ et de ζ, en faisant la fonction arbitraire $F = -\frac{py^2}{qx-y}$.

21. Voilà donc deux cas très-différens que l'algèbre nous fait observer; l'un où la proposée du second ordre n'a que son intégrale du premier; et l'autre où elle a deux pareilles intégrales, et conséquemment son intégrale finie. Nous avons déjà assigné le caractère distinctif du premier de ces deux cas : quant à celui du second, il se présente ici d'une manière très-évidente. En effet il suffit, pour que ce cas ait lieu, *que le coëfficient de ρ dans l'équation* L *soit zéro en même tems que la totalité des autres termes sans ρ.* Car il n'y a que trois évènemens possibles; savoir, 1°. que la proposée n'ait point d'intégrale ; 2°. qu'elle en ait une; et enfin 3°. qu'elle en ait deux. Donc si elle n'a pas deux intégrales, ou elle n'en a qu'une, ou elle n'en a pas. Or l'algèbre nous donne, pour indices de ces deux derniers cas, que les équations b et c (§ 15) deviennent, ou ne deviennent point identiques par la substitution des valeurs de ρ et de ζ tirées de celles L et a (§ 15, 16); donc toutes les fois que l'équation L deviendra $0 + \rho 0 = 0$, on peut être assuré que la proposée a une intégrale finie. Donc dans ce même cas, l'équation b sera toujours intégrable.

22. Ce que nous venons de dire sur la formule du second ordre à trois variables $dp + \eta dq + \zeta dx = 0$, s'applique généralement à tous les cas particuliers renfermés dans cette formule. Or un de ces cas très-remarquable est celui où, η étant $= 0$, ζ ne contient ni q, ni y. Alors $\zeta = 0$, $\Pi = 0$, et conséquemment l'équation L se réduit à $0 + \rho 0 = 0$. Il suit delà que l'équation

$dp + \zeta dx = 0$, qui n'est autre que la formule des équations du second ordre entre deux variables z, x, est toujours du nombre des équations qui ont deux intégrales simultanées du premier ordre ; et conséquemment toute équation du second ordre entre deux variables a une intégrale finie, comme je l'ai déjà prouvé ci-dessus.

23. Cette dernière démonstration est parfaitement rigoureuse, étant fondée sur la nature même de l'algèbre. En effet, s'il étoit possible qu'une pareille équation n'eût pas toujours une intégrale finie, ou ce qui est la même chose, qu'elle eût dans certaines circonstances une seule intégrale du premier ordre, l'algèbre ne manqueroit pas de distinguer ces deux différens cas d'une manière analogue à celle dont elle nous les fait apercevoir dans la formule à trois variables. Ici au contraire les trois équations I se réduisent à celle b, en y supprimant le terme $\frac{dp}{dy}$. Ainsi on ne peut jamais avoir ρ que sous une forme susceptible d'une infinité de solutions différentes; ce qui a lieu ici, comme dans le cas de trois variables, parce que les deux intégrales du premier ordre pouvant se combiner entr'elles d'une infinité de manières, il en résulte la possibilité d'une infinité de pareilles intégrales, et conséquemment de valeurs différentes de l'inconnue ρ.

24. Examinons maintenant les mêmes équations du second ordre, en y ajoutant une quatrième variable u. Nous aurons, pour formule générale, en désignant $\frac{du}{dx}$ par r, $dp + \eta dq + \vartheta dr + \zeta dx = 0$. Supposons que si chacun des termes de cette équation étoit connu, elle auroit la forme.... (n)

$$dp + \eta dq + \vartheta dr + \rho dz + \varsigma dy + \tau du + (\zeta - \rho p - \varsigma q - \tau r)\, dx = 0 ;$$

et comme pour le concours des deux hypothèses *unimodulaire* et *plurimodulaire*, il faut en outre que dp satisfasse à une équation de la forme

$$dp = Mdq + Ldr + Ndz + Pdy + Rdu + Qdx,$$

nous conclurons $M = -\eta$, $L = -\vartheta$, $N = -\rho$, $P = -\varsigma$, $R = -\tau$, $Q = -(\zeta - \rho p - \varsigma q - \tau r)$. D'ailleurs ces différens coëfficiens M, L, *&c.* sont liés entr'eux par les quinze équations de condition suivantes,

$$\frac{dM}{dr} = \frac{dL}{dq}, \quad \frac{dM}{dz} = \frac{dN}{dq}, \quad \frac{dM}{dy} = \frac{dP}{dq}, \quad \frac{dM}{du} = \frac{dR}{dq}, \quad \frac{dM}{dx} = \frac{dQ}{dq}, \quad \frac{dL}{dz} = \frac{dN}{dr},$$

$$\frac{dL}{dy} = \frac{dP}{dr}, \quad \frac{dL}{du} = \frac{dR}{dr}, \quad \frac{dL}{dx} = \frac{dQ}{dr}, \quad \frac{dN}{dy} = \frac{dP}{dz}, \quad \frac{dN}{du} = \frac{dR}{dz}, \quad \frac{dN}{dx} = \frac{dQ}{dz},$$

$$\frac{dP}{du} = \frac{dR}{dy}, \quad \frac{dP}{dx} = \frac{dQ}{dy}, \quad \frac{dR}{dx} = \frac{dQ}{du}.$$

Faisant donc, dans ces équations, les substitutions ci-dessus, nous parviendrons, dans le même ordre, aux quinze équations ...(N)

$$1^{\circ}.\ \vartheta\frac{d\eta}{dp} - \frac{d\eta}{dr} - \eta\frac{d\vartheta}{dp} + \frac{d\vartheta}{dq} = 0; \qquad 2^{\circ}.\ \eta\frac{d\rho}{dp} - \frac{d\rho}{dq} - \rho\frac{d\eta}{dp} + \frac{d\eta}{dz} = 0,$$

$$3^{\circ}.\ \eta\frac{d\varsigma}{dp} - \frac{d\varsigma}{dq} - \varsigma\frac{d\eta}{dp} + \frac{d\eta}{dy} = 0; \qquad 4^{\circ}.\ \eta\frac{d\tau}{dp} - \frac{d\tau}{dq} - \tau\frac{d\eta}{dp} + \frac{d\eta}{du} = 0,$$

$$5^{\circ}.\ \eta p\frac{d\rho}{dp} - p\frac{d\rho}{dq} + \eta q\frac{d\varsigma}{dp} - q\frac{d\varsigma}{dq} + \eta r\frac{d\tau}{dp} - r\frac{d\tau}{dq} - \eta\frac{d\zeta}{dp} + \frac{d\zeta}{dq} + (\zeta - \rho p - \varsigma q - \tau r)\frac{d\eta}{dp} - \frac{d\eta}{dx} + \eta\rho - \varsigma = 0;$$

$$6^{\circ}.\ \vartheta\frac{d\rho}{dp} - \frac{d\rho}{dr} - \rho\frac{d\vartheta}{dp} + \frac{d\vartheta}{dz} = 0, \quad 7^{\circ}.\ \vartheta\frac{d\varsigma}{dp} - \frac{d\varsigma}{dr} - \varsigma\frac{d\vartheta}{dp} + \frac{d\vartheta}{dy} = 0, \quad 8^{\circ}.\ \vartheta\frac{d\tau}{dp} - \frac{d\tau}{dr} - \tau\frac{d\vartheta}{dp} + \frac{d\vartheta}{du} = 0;$$

$$9^{\circ}.\ \vartheta p\frac{d\rho}{dp} - p\frac{d\rho}{dr} + \vartheta q\frac{d\varsigma}{dp} - q\frac{d\varsigma}{dr} + \vartheta r\frac{d\tau}{dp} - r\frac{d\tau}{dr} + (\zeta - \rho p - \varsigma q - \tau r)\frac{d\vartheta}{dp} - \frac{d\vartheta}{dx} - \vartheta\frac{d\zeta}{dp} + \frac{d\zeta}{dr} + \vartheta\rho - \tau = 0,$$

$$10^{\circ}.\ \varsigma\frac{d\rho}{dp} - \frac{d\rho}{dy} - \rho\frac{d\varsigma}{dp} + \frac{d\varsigma}{dz} = 0; \qquad 11^{\circ}.\ \tau\frac{d\rho}{dp} - \frac{d\rho}{du} - \rho\frac{d\tau}{dp} + \frac{d\tau}{dz} = 0;$$

$$12^{\circ}.\ (\zeta - \varsigma q - \tau r)\frac{d\rho}{dp} - p\frac{d\rho}{dz} - \frac{d\rho}{dx} + \rho q\frac{d\varsigma}{dp} - q\frac{d\varsigma}{dz} + \rho r\frac{d\tau}{dp} - r\frac{d\tau}{dz} - \rho\frac{d\zeta}{dp} + \frac{d\zeta}{dz} + \rho^2 = 0;$$

$$13^{\circ}.\ \tau\frac{d\varsigma}{dp} - \frac{d\varsigma}{du} - \varsigma\frac{d\tau}{dp} + \frac{d\tau}{dy} = 0;$$

$$\zeta\frac{d\Pi}{dp}-p\frac{d\Pi}{dz}-q\frac{d\Pi}{dy}-r\frac{d\Pi}{du}-\frac{d\Pi}{dx}-\Pi\frac{d\zeta}{dp}+\eta\frac{d\zeta}{dz}-\frac{d\zeta}{dy}+\rho\left(\Pi-\zeta\frac{d\eta}{dp}+p\frac{d\eta}{dz}+q\frac{d\eta}{dy}+r\frac{d\eta}{du}+\frac{d\eta}{dx}\right)=0;$$

On trouvera de même, en soustrayant l'équation l de celle g multipliée par ϑ, et mettant ensuite, pour $\vartheta\rho-\tau$ et $\vartheta d\rho-d\tau$, leurs valeurs respectives Ψ et $d\Psi-\rho d\vartheta$, une seconde équation..(Q)

$$\zeta\frac{d\Psi}{dp}-p\frac{d\Psi}{dz}-q\frac{d\Psi}{dy}-r\frac{d\Psi}{du}-\frac{d\Psi}{dx}-\Psi\frac{d\zeta}{dp}+\vartheta\frac{d\zeta}{dz}-\frac{d\zeta}{du}+\rho\left(\Psi-\zeta\frac{d\vartheta}{dp}+p\frac{d\vartheta}{dz}+q\frac{d\vartheta}{dy}+r\frac{d\vartheta}{du}+\frac{d\vartheta}{dx}\right)=0.$$

Maintenant les deux équations P et Q donnant chacune une valeur de ρ, il faudra que ces deux valeurs coïncident; d'où résulte une nouvelle équation de condition. Enfin comme, au lieu de satisfaire, dans ce qui précède, aux trois équations mêmes g, h et l, nous y avons substitué deux de leurs combinaisons ηg − h et ϑg − l, il faudra en outre vérifier l'équation g en particulier: et par là elle se trouvera être la troisième équation de condition. Voici donc la règle générale pour discerner si une équation du second ordre à quatre variables est intégrable du moins *médiatement*.

On examinera 1°. *si l'équation* d *est identique;* 2°. *si les deux valeurs de* ρ*, résultantes des deux équations* P *et* Q*, coïncident; et enfin* 3°. *si cette valeur de* ρ *satisfait à l'équation* g.

Cela fait, il ne s'agira plus que de conclure, au moyen de e et de f, celles de ζ et de τ. Dèslors tous les termes de l'équation n (§ 24) seront connus, et la proposée ne présentera plus à intégrer qu'une équation du premier ordre entre les sept variables p, q, r, z, y, u et x; ce qui s'opèrera par la méthode que j'ai donnée dans le 4[eme] *Mém.* de mes *Mélang. mathém. chap.* 1.

26. Nous retrouverons encore ici la même distinction, que

$Q = -(\zeta - \vartheta r - \lambda s - \rho p - \zeta q)$. D'ailleurs ces coèfficiens sont liés entr'eux par les quinze équations connues à l'intégrabilité *immédiate* $\frac{dK}{dp} = \frac{dL}{ds}$, $\frac{dK}{dq} = \frac{dM}{ds}$, $\frac{dK}{dz} = \frac{dN}{ds}$, *&c.* Ainsi en y substituant leurs valeurs ci-dessus, nous parviendrons aux quinze suivantes..(R)

1°. $\vartheta \frac{d\eta}{dr} - \frac{d\eta}{dp} - \eta \frac{d\vartheta}{dr} + \frac{d\vartheta}{ds} = 0$, 2°. $\lambda \frac{d\eta}{dr} - \frac{d\eta}{dq} - \eta \frac{d\lambda}{dr} + \frac{d\lambda}{ds} = 0$,

3°. $\rho \frac{d\eta}{dr} - \frac{d\eta}{dz} - \eta \frac{d\rho}{dr} + \frac{d\rho}{ds} = 0$, 4°. $\zeta \frac{d\eta}{dr} - \frac{d\eta}{dy} - \eta \frac{d\zeta}{dr} + \frac{d\zeta}{ds} = 0$,

5°. $r\left(\eta \frac{d\vartheta}{dr} - \frac{d\vartheta}{ds}\right) + s\left(\eta \frac{d\lambda}{dr} - \frac{d\lambda}{ds}\right) + p\left(\eta \frac{d\rho}{dr} - \frac{d\rho}{ds}\right) + q\left(\eta \frac{d\zeta}{dr} - \frac{d\zeta}{ds}\right) + (\zeta - \vartheta r - \lambda s$
$- \rho p - \zeta q)\frac{d\eta}{dr} - \frac{d\eta}{dx} - \eta \frac{d\zeta}{dr} + \frac{d\zeta}{ds} + \eta\vartheta - \lambda = 0$,

6°. $\lambda \frac{d\vartheta}{dr} - \frac{d\vartheta}{dq} - \vartheta \frac{d\lambda}{dr} + \frac{d\lambda}{dp} = 0$, 7°. $\rho \frac{d\vartheta}{dr} - \frac{d\vartheta}{dz} - \vartheta \frac{d\rho}{dr} + \frac{d\rho}{dp} = 0$,

8°. $\zeta \frac{d\vartheta}{dr} - \frac{d\vartheta}{dy} - \vartheta \frac{d\zeta}{dr} + \frac{d\zeta}{dp} = 0$;

$\zeta - \lambda s - \rho p - \zeta q)\frac{d\vartheta}{dr} - r\frac{d\vartheta}{dp} - \frac{d\vartheta}{dx} + s\left(\vartheta \frac{d\lambda}{dr} - \frac{d\lambda}{dp}\right) + p\left(\vartheta \frac{d\rho}{dr} - \frac{d\rho}{dp}\right) + q\left(\vartheta \frac{d\zeta}{dr} - \frac{d\zeta}{dp}\right) - \vartheta \frac{d\zeta}{dr} + \frac{d\zeta}{dp} + \vartheta^2 - \rho = 0$,

10. $\rho \frac{d\lambda}{dr} - \frac{d\lambda}{dz} - \lambda \frac{d\rho}{dr} + \frac{d\rho}{dq} = 0$; 11°. $\zeta \frac{d\lambda}{dr} - \frac{d\lambda}{dy} - \lambda \frac{d\zeta}{dr} + \frac{d\zeta}{dq} = 0$,

$r\left(\lambda \frac{d\vartheta}{dr} - \frac{d\vartheta}{dq}\right) + (\zeta - \vartheta r - \rho p - \zeta q)\frac{d\lambda}{dr} - s\frac{d\lambda}{dq} - \frac{d\lambda}{dx} + p\left(\lambda \frac{d\rho}{dr} - \frac{d\rho}{dq}\right) + q\left(\lambda \frac{d\zeta}{dr} - \frac{d\zeta}{dq}\right) - \lambda \frac{d\zeta}{dr} + \frac{d\zeta}{dq} + \vartheta\lambda - \zeta = 0$,

13°. $\zeta \frac{d\rho}{dr} - \frac{d\rho}{dy} - \rho \frac{d\zeta}{dr} + \frac{d\zeta}{dz} = 0$,

$r\left(\rho \frac{d\vartheta}{dr} - \frac{d\vartheta}{dz}\right) + s\left(\rho \frac{d\lambda}{dr} - \frac{d\lambda}{dz}\right) + (\zeta - \vartheta r - \lambda s - \zeta q)\frac{d\rho}{dr} - p\frac{d\rho}{dz} - \frac{d\rho}{dx} + q\left(\rho \frac{d\zeta}{dr} - \frac{d\zeta}{dz}\right) - \rho \frac{d\zeta}{dr} + \frac{d\zeta}{dz} + \vartheta\rho = 0$;

$r\left(\zeta \frac{d\vartheta}{dr} - \frac{d\vartheta}{dy}\right) + s\left(\zeta \frac{d\lambda}{dr} - \frac{d\lambda}{dy}\right) + p\left(\zeta \frac{d\rho}{dr} - \frac{d\rho}{dy}\right) + (\zeta - \vartheta r - \lambda s - \rho p)\frac{d\zeta}{dr} - q\frac{d\zeta}{dy} - \frac{d\zeta}{dx} - \zeta \frac{d\zeta}{dr} + \frac{d\zeta}{dy} + \vartheta\zeta = 0$;

que nous combinerons entr'elles de la manière suivante; savoir, 1, 2, 3 et 4 avec 5; 6, 7 et 8 avec 9; 6, 10 et 11 avec 12; 7, 10 et 13 avec 14; et enfin 8, 11 et 13 avec 15. Il en ré-

sultera, dans le même ordre, les cinq équations..(S)

a) $\eta\vartheta - \lambda = r\frac{d\eta}{dp} + s\frac{d\eta}{dq} + p\frac{d\eta}{d\xi} + q\frac{d\eta}{dy} - \zeta\frac{d\eta}{dr} + \frac{d\eta}{dx} + \eta\frac{d\zeta}{dr} - \frac{d\zeta}{dx} = \Pi$,

b) $\zeta\frac{d\vartheta}{dr} - r\frac{d\vartheta}{dp} - s\frac{d\vartheta}{dq} - p\frac{d\vartheta}{d\xi} - q\frac{d\vartheta}{dy} - \frac{d\vartheta}{dx} - \vartheta\frac{d\zeta}{dr} + \vartheta^2 + \frac{d\zeta}{dp} - \rho = 0$,

c) $\zeta\frac{d\lambda}{dr} - r\frac{d\lambda}{dp} - s\frac{d\lambda}{dq} - p\frac{d\lambda}{d\xi} - q\frac{d\lambda}{dy} - \frac{d\lambda}{dx} - \lambda\frac{d\zeta}{dr} + \vartheta\lambda + \frac{d\zeta}{dq} - \varsigma = 0$,

d) $\zeta\frac{d\rho}{dr} - r\frac{d\rho}{dp} - s\frac{d\rho}{dq} - p\frac{d\rho}{d\xi} - q\frac{d\rho}{dy} - \frac{d\rho}{dx} - \rho\frac{d\zeta}{dr} + \vartheta\rho + \frac{d\zeta}{d\xi} = 0$,

e) $\zeta\frac{d\varsigma}{dr} - r\frac{d\varsigma}{dp} - s\frac{d\varsigma}{dq} - p\frac{d\varsigma}{d\xi} - q\frac{d\varsigma}{dy} - \frac{d\varsigma}{dx} - \varsigma\frac{d\zeta}{dr} + \vartheta\varsigma + \frac{d\zeta}{dy} = 0$.

28. Il s'agit maintenant de conclure delà les valeurs de ϑ, λ, ρ et ς. Pour cela nous soustrairons l'équation c de celle b multipliée par η. Et comme la première a nous donne $\eta\vartheta - \lambda = \Pi$, où Π est une quantité entièrement déterminée, et conséquemment $\eta d\vartheta - d\lambda = d\Pi - \vartheta d\eta$, il résultera de cette combinaison des trois équations a, b et c...(T)

$$\zeta\frac{d\Pi}{dr} - r\frac{d\Pi}{dp} - s\frac{d\Pi}{dq} - p\frac{d\Pi}{d\xi} - q\frac{d\Pi}{dy} - \frac{d\Pi}{dx} - \Pi\frac{d\zeta}{dr} + \eta\frac{d\zeta}{dp} - \frac{d\zeta}{dq} + \vartheta\Big(\Pi - \zeta\frac{d\eta}{dr} + r\frac{d\eta}{dp} + s\frac{d\eta}{dq} + p\frac{d\eta}{d\xi} + q\frac{d\eta}{dy} + \frac{d\eta}{dx}\Big) = \eta\rho - \varsigma$$

dont pour simplifier, nous supposerons que le premier membre est représenté par $A + \vartheta B$, d'où $\eta d\rho - d\varsigma = dA + \vartheta dB + Bd\vartheta - \rho d\eta$. Nous multiplierons donc encore l'équation d par η, et nous en soustrairons celle e. Nous aurons par-là...(V)

$$\zeta\frac{dA}{dr} - r\frac{dA}{dp} - s\frac{dA}{dq} - p\frac{dA}{d\xi} - q\frac{dA}{dy} - \frac{dA}{dx} - A\frac{d\zeta}{dr} + \eta\frac{d\zeta}{d\xi} - \frac{d\zeta}{dy} + \vartheta\Big(\zeta\frac{dB}{dr} - r\frac{dB}{dp} - s\frac{dB}{dq} - p\frac{dB}{d\xi} - q\frac{dB}{dy} - \frac{dB}{dx} + A\Big) + B\Big(\zeta\frac{d\vartheta}{dr} - r\frac{d\vartheta}{dp} - s\frac{d\vartheta}{dq} - p\frac{d\vartheta}{d\xi} -$$

q

$$q\frac{d\vartheta}{dy} - \frac{d\vartheta}{dx} - \vartheta\frac{d\zeta}{dr} + \vartheta^2\Big) - \rho\Big(\zeta\frac{d\eta}{dr} - r\frac{d\eta}{dp} - s\frac{d\eta}{dq} - p\frac{d\eta}{dz} - q\frac{d\eta}{dy} - \frac{d\eta}{dx}\Big) = 0.$$

Or en vertu de l'équation b le coèfficient de B se réduit à $\rho - \frac{d\zeta}{dp}$; ainsi celle V prendra la forme $G + \vartheta H + B\left(\rho - \frac{d\zeta}{dp}\right) - \rho K = 0$; c'est-à-dire, en faisant $\frac{H}{K-B} = C$, et $\frac{B\frac{d\zeta}{dp} - G}{K-B} = E$, qu'elle se réduira à $C\vartheta - \rho = E$; C, E étant, aussi bien que G, H, K et A, B, des quantités entièrement déterminées. Nous conclurons delà $Cd\vartheta - d\rho = dE - \vartheta dC$; et ayant multiplié l'équation b par C, nous en soustrairons celle d, d'où résultera une seconde équation entre ϑ et ρ; savoir, (W)

$$\zeta\frac{dE}{dr} - r\frac{dE}{dp} - s\frac{dE}{dq} - p\frac{dE}{dz} - q\frac{dE}{dy} - \frac{dE}{dx} - E\frac{d\zeta}{dr} + C\frac{d\zeta}{dp} - \frac{d\zeta}{dz} + \vartheta\Big(E - \zeta\frac{dC}{dr} + r\frac{dC}{dp} + s\frac{dC}{dq} + p\frac{dC}{dz} + q\frac{dC}{dy} + \frac{dC}{dx}\Big) - C\rho = 0.$$

Au moyen de ces deux équations il sera facile de déterminer ϑ et ρ, et ensuite λ par celle a, et enfin ζ par celle c ou T.

29. Ces déterminations satisfont pleinement à chacune des cinq équations S. En effet nous avons d'abord réalisé le système ηb — c et l'équation a, pour obtenir le résultat T. Delà la réalisation de ηd — é jointe aux précédentes nous a conduits à celui V, que nous avons modifié ultérieurement en satisfaisant à b. Enfin nous avons employé le système Cb — d, d'où est résultée l'équation finale W. Ainsi les valeurs de ϑ et de ρ sont fondées sur la réalisation simultanée des systèmes et équations ηb — e, a, ηd — e, b, Cb — d; c'est-à-dire, des équations a, b, c, d et e. Celle de λ dépend de ϑ, et de la vérité de l'équation a; et enfin celle

de ζ dépend de λ, de ϑ, et de la verité de l'équation c. Il suit delà que la détermination des quatre inconnues ϑ, λ, ρ et ζ suffit pour absorber toutes les équations S, et conséquemment pour satisfaire à toutes les conditions du problème. Concluons donc enfin que dans les équations à trois variables du troisième ordre, toute proposée dont il résultera réellement une valeur pour chacune des inconnues ϑ, λ, ρ et ζ sera nécessairement intégrable au moyen d'un facteur.

30. Il se présente ici, comme dans le second ordre, plusieurs cas à distinguer; 1°. la proposée, n'a qu'une intégrale de l'ordre immédiatement inférieur; 2°. elle en a deux et conséquemment une intégrale du premier ordre; 3°. elle en a trois et conséquemment une intégrale finie; et enfin 4°. elle n'est point intégrable. Examinons successivement ces différens cas.

Si la proposée n'a qu'une première intégrale, on parvient immédiatement, par les deux équations V, W, à la détermination de ϑ et de ρ. Qu'on demande, par exemple, si l'équation

$$(dz + zdx)\,(d^2yd^3z + d^2zd^3y) - 2d^2z^2d^2y - 2dzdxd^2zd^2y = 0$$

est intégrable ? Je la mets sous la forme $(p+z)\,(sdr + rds) - 2rs\,(p+r)\,dx = 0$, ou $dr + \frac{r}{s}ds - \frac{2r}{p+z}(p+r)\,dx = 0$. On a ici $\eta = \frac{r}{s}$, $\zeta = -\frac{2r\,(p+r)}{p+z}$. On trouve ensuite, en vertu de l'équation a, $\Pi = \frac{-2r^2}{(p+z)s}$; en vertu de celle T, $\frac{2r^2(p-z)}{s\,(p+z)^2} + \vartheta\frac{2pr}{s\,(p+z)} = \eta\rho - \zeta$, d'où $A = \frac{2r^2(p-z)}{s\,(p+z)^2}$, $B = \frac{2pr}{s\,(p+z)}$; et enfin en substituant ces deux dernières valeurs dans l'équation V, celle-ci se change en

$$2r\frac{p^2 + 2rz + pr}{s\,(p+z)^2}\vartheta - \frac{4pr + 2r^2}{s\,(p+z)}\rho = 4r^2\frac{p^2 + 2pz - rz}{s\,(p+z)^3},$$

dont on variera le système à l'infini en combinant entr'elles (§ 19) les deux intégrales premières dont peut dériver immédiatement la proposée. On voit tout de suite que $\vartheta = 1$ satisfait à cette équation; ainsi on aura $\vartheta = 1$, $\lambda = 1$, $\rho = \zeta = 0$; et une véritable forme de la proposée est $dr - xds + dp + dq - sdx = 0$, dont l'intégrale est $r - sx + p + q = a$, ou $dp - xdq + dz + dy = adx$. Celle-ci peut de même se mettre sous la forme $dp - xdq + (p + q)\,dx = adx$, ou $dp - xdq - qdx + (p + 2q)\,dx = adx$; c'est-à-dire, $dp - xdq - qdx + dz + 2dy = adx$, dont l'intégrale ultérieure est $p - qx + z + 2y = ax + b$, ou $dz - xdy + zdx + 2ydx = axdx + bdx$ qui n'est plus intégrable. Maintenant si nous différentions deux fois $p - qx + z + 2y = ax + b$ en faisant évanouir la constante a la première, nous aurons

$$dr - xds + \frac{(x-1)\,dp + 2xdq - dz - 2dy + (r - 2sx + p + 2q)\,dx}{x} = 0$$

qui est au fond la même que la proposée, mais qui nous donne ici, pour une seconde valeur de ϑ, $\vartheta = \frac{x-1}{x}$; d'où $\rho = -\frac{1}{x}$, $\lambda = 2$ et $\zeta = -\frac{2}{x}$.

32. Avant de nous livrer aux réflexions que présente cet exemple, nous examinerons d'abord ce que deviennent les équations V, W lorsque la proposée a trois premières intégrales, et conséquemment une intégrale finie, afin de découvrir, par la comparaison de ces deux résultats, à quels signes on pourra distinguer les équations différentielles du troisième ordre, qui n'ont que deux premières intégrales, de celles qui en ont trois.

Soit $yd^3z + zd^3y + 3dyd^2z + 3dzd^2y = 0$ ou $ydr + zds + 3\,(qr$

$+ps)\,dx = 0$. On a ici $\eta = \frac{1}{y}$, et $\zeta = \frac{z\,(qr+ps)}{y}$; donc $\Pi = \frac{z\,(q\zeta - py)}{y^2}$. On trouve ensuite, par l'équation T, $A = \frac{y\zeta s - y^2 r + 2ypq - 2\zeta q^2}{y^3}$, $B = \frac{q\zeta - py}{y^2}$; et la substitution de ces valeurs dans V la réduit à $0 = 0$.

Nous avons représenté cette équation par $C\vartheta - \rho = E$: il sera plus commode ici de lui donner sa forme complette $P + H\vartheta + Q\rho = 0$, en faisant (§ 28) $G - B\frac{d\zeta}{dp} = P$ et $B - K = Q$; ce qui revient à supposer $C = \frac{-H}{Q}$, $E = \frac{P}{Q}$. On aura donc $dE = \frac{QdP - PdQ}{Q^2}$, $dC = \frac{HdQ - QdH}{Q^2}$, et on voit évidemment que le cas actuel de $P = 0$, $H = 0$, $Q = 0$, réduit également l'équation W à $0 = 0$. Ainsi aucune des méthodes des deux articles précédens n'est applicable à ce dernier exemple. Nous pouvons seulement en conclure que les trois équations a, b, c, ainsi que le système ηd — e, sont satisfaits, puisque toutes ces équations ont concouru à la formation de celle V qui devient identique. Nous aurons donc satisfait également aux deux autres d et e, si nous employons en particulier une des deux. Pour cela nous prendrons de celle b la valeur de ρ qui ne contient que ϑ d'inconnue, et nous la substituerons dans celle d qui ne contiendra plus aussi que ϑ et ses coëfficiens différentiels des deux premiers ordres. La détermination de ϑ dépend donc ici de l'intégration d'une équation différentielle *unifonctionnelle sexmodulaire* du second ordre (§ 6 *à la fin*).

Nous ne poursuivrons pas, dans un pareil labyrinthe, nos recherches sur cette équation. Notre but n'est point ici de parvenir à la connoissance même de l'intégrale, mais uniquement d'as-

Soit encore $\frac{d\Pi_1}{dx} = \Pi_2$; Π_2 contiendra en outre tous les *rapports différentiels* du second ordre, et les équations précédentes prendront la forme... (Ad)

$$\Pi_2 = 2a, \quad x^2\Pi_2 - 2x\Pi_1 + 2\Pi = -2c, \quad x\Pi_2 - \Pi_1 = -b;$$

d'où, au moyen d'une troisième différentiation, on conclura, pour toutes les trois, $d\Pi_2 = 0$. Ainsi quel que soit le nombre des variables contenues dans l'équation du troisième ordre $d\Pi_2 = 0$, la forme de ses trois intégrales premières sera toujours telle, qu'on puisse en éliminer Π_2 et Π_1, et en conclure l'intégrale finie, ou l'équation primitive $\Pi = ax^2 + bx + c$. De même, en éliminant seulement Π_2 entre deux des équations Ad., on trouveroit une des intégrales secondes Ab, et comme tout cela aura également lieu pour un ordre quelconque n, on peut regarder la propofition comme vraie dans tous les cas. Dans celui de deux variables seulement, elle ne présente aucune difficulté. Il y a n intégrales premières, et $n - 1$ rapports différentiels; ainsi il est évident qu'il y a toujours assez d'équations pour éliminer tous ces rapports. Mais dans les cas plus compliqués, où le nombre des rapports différentiels surpasse toujours celui des équations propres à les éliminer, il falloit prouver que tous ces rapports des différens ordres restent invariablement *groupés* de manière que leur totalité ne constitue qu'une fonction, qu'on peut éliminer comme le rapport différentiel unique dans le cas de deux variables seulement.

Quant aux intégrales plus compliquées qui n'appartiennent point à cette classe; telle est, par exemple, la plus simple, à trois variables et deux constantes arbitraires, $z + ay + bx = 0$, voici

Soit d'abord celui ci-dessus $z + ay + bx = 0$. On a, en faisant $dz = pdx$, $dy = qdx$, les deux différentielles *primes* $(\Pi)\ \frac{qz - py}{y - qx} = b$, $(\Psi)\ \frac{px - z}{y - qx} = a$; et ensuite la différentielle seconde $(qx - y)\, dp - (px - z)\, dq = 0$. Supposant donc que celle-ci soit la proposée, on aura, pour les deux intégrales premières, les deux équations Π et Ψ, d'où on éliminera p, par exemple, en multipliant Π par x, Ψ par y, et les additionnant. Il résultera delà $\frac{qzx - zy}{y - qx} = ay + bx$, ou en réduisant, $z + ay + bx = 0$.

Soit maintenant $z + ay - abu - bx = 0$. Les deux différentielles *primes* sont, en faisant de plus $du = rdx$,

$$(bu - y)p + (z - bx)q - (bz - b^2x)r + by - b^2u = 0,$$

$$(au + x)p + (a^2u + ax)q - (az + a^2y)r - z - ay = 0,$$

qui sont en même tems les deux intégrales premières de la seconde différentielle. Nous en éliminerons donc p, par exemple, et nous obtiendrons un résultat auquel on peut donner la forme

$$([au + x]q - [ay + bx]r + bu - y)(z + ay - abu - bx) = 0,$$

et qui se réduit évidemment à l'intégrale primitive, l'autre facteur ne devant aucunement être pris en considération, puisqu'il renferme les quantités qu'on veut éliminer. Cela posé, je reviens à mon sujet.

34. Les deux exemples ci-dessus (§ 31, 32) nous ont fourni l'occasion de prendre, pour ainsi dire, l'algèbre sur le fait. Nous avons vu que dans le premier, qui n'admet que deux intégrations successives, les deux équations V et W se confondent en une seule ; et que dans le second, qui est susceptible de trois pareil-

les intégrations, ces deux mêmes équations non seulement se confondent, mais encore deviennent identiques indépendamment des valeurs de ϑ et ρ. Il ne s'agiroit donc que d'avoir démontré que ces deux résultats auront toujours lieu respectivement dans les mêmes circonstances, pour être fondés à les établir comme les véritables caractères distinctifs de ces deux classes d'équations.

Nous examinerons d'abord si les expressions de ϑ et ρ ne nous donnent pas quelque éclaircissement sur ce point. Soit donc encore (§ 32) l'équation V représentée par $P+H\vartheta+Q\rho=0$, et désignons dans celle W par M le terme tout connu, et par N le coëfficient de ϑ, en nous rappelant de plus (§ 32) que $C=\frac{-H}{Q}$. Elle prendra la forme $QM+QN\vartheta+H\rho=0$. : et on observera dans chaque application particulière, de multiplier l'une de ces deux équations, s'il est nécessaire, par un facteur qui rende en effet le coëfficient de ϑ dans V égal à celui de ρ dans W. Déduisant ensuite de ces deux équations les valeurs générales de ϑ et de ρ, on aura (Ae) $\vartheta=\frac{Q^2M-PH}{H^2-Q^2N}$ et $\rho=\frac{Q(PN-MH)}{H^2-Q^2N}$. Or dans le premier cas, où les deux équations V et W coïncident seulement sans devenir identiques, on a $P=\mu QM$, $H=\mu QN$ et $Q=\mu H$. Donc $Q(PN-MH)=0$, $Q^2M-PH=0$, et $H^2-Q^2N=0$; c'est-à-dire, $\vartheta=\frac{0}{0}$ et $\rho=\frac{0}{0}$. Dans le second, où chacune de ces deux équations devient identique, on a $P=0$, $H=0$, $Q=0$, d'où $\vartheta=\frac{0^2-0^2}{0^2-0^3}$, et $\rho=\frac{0(0-0)}{0^2-0^3}$; c'est-à-dire, $\vartheta=\rho=\frac{0^2}{0^3}$; car $0^2-0^2=(0-0)(0+0)=0.0=0^2$. Cette différence de résultat suffiroit donc peut-être pour établir la démonstration en question ; mais comme de pareilles expressions pourroient paroître trop vagues, voici une autre route qui, quoique moins directe, nous mènera

plus sûrement au but. J'ai démontré ci-dessus (§ 22) que toute équation du second ordre entre deux variables a une intégrale finie. Donc toute intégrale première d'une pareille équation du troisième ordre est par la même raison susceptible de deux intégrations consécutives; ou ce qui en est encore une conséquence évidente, une équation à deux variables du troisième ordre, ne peut avoir une intégrale première, sans en avoir en même tems trois. Remarquons maintenant que le cas de deux variables z, x est un cas particulier de celui des trois variables z, y, x, qui exige seulement qu'on fasse, dans la formule générale Q1 (§ 27), $\eta=0$, $\lambda=0$, $\zeta=0$, et qu'on supprime tous les coëfficiens différentiels par s, q et y. Or il arrive delà que les cinq équations S se réduisent aux deux b et d, qui abstraction faite des coëfficiens différentiels relatifs à la variable y, sont précisément celles qu'on a employées pour la détermination de ϑ (§ 32) dans le cas de trois variables.

De plus, comme un résultat de formules particulières ne peut être que celui des formules générales dont celles-ci dérivent, modifié par les circonstances qui ont concouru à les particulariser, et qu'un résultat général ne peut contenir un moindre nombre de solutions que le résultat particulier qui en dérive, il s'ensuit, de ce que la valeur de ϑ déduite dans le cas de deux variables des deux seules équations b et d contient trois solutions différentes, que cette même valeur déduite des mêmes équations dans le cas de trois variables, en contiendra le même nombre. Ainsi

1°. *Lorsque les deux équations* V *et* W *ou seulement la première* V (§ 32) *devient identique, la proposée a nécessairement trois intégrales premières.*

D'un autre côté, l'équation *plurimodulaire* du premier ordre, résultante (§ 31) de la substitution de la valeur de ρ en ϑ, que donne la formule V, dans l'équation b, ne contient jamais trois solutions simultanées, puisque toute application de V au cas particulier de deux variables qui exige constamment ce nombre de solutions, annullant, comme on a vu plus haut, dans cette formule les quantités ν, λ et ζ, ainsi que tous les coëfficiens différentiels par s, q et y, la rend identique et insignifiante ; ce qui est toujours l'indice d'une multiplicité de valeurs supérieure au nombre de celles que peut renfermer la formule en question. D'ailleurs cette même formule V, dans l'hypothèse actuelle de sa coïncidente avec celle W, n'est pas propre à exprimer une solution unique (§ 31) ; elle appartient donc exclusivement au cas de deux solutions simultanées ; c'est-à-dire,

2°. *que toutes les fois que les deux équations* V *et* W *coïncideront sans être identiques, on doit en conclure que la proposée a précisément deux intégrales premières.*

35. Il nous reste à examiner le quatrième cas (§ 30) ; savoir, celui où la proposée n'est pas susceptible d'intégration. Il est évident que cette circonstance sera définie d'une manière adéquate par la condition que les valeurs de ϑ et ρ tirées des deux équations V et W soient, non pas indéterminées, mais absurdes. Il s'agit donc de voir si cette absurdité peut exister, et comment elle doit se manifester. Conservons à ces deux équations les formes que nous leur avons données (§ 34) : il est certain qu'en considérant les ϑ et les ρ comme des abscisses et des ordonnées, ces deux équations déterminent toujours le point d'intersection de deux lignes droites. Or aucune position de deux pareilles li-

gnes ne rend cette intersection impossible, pas même le parallélisme, puisque dans ce dernier cas l'intersection doit être considérée comme se faisant à une distance infinie. Alors ou ϑ et ρ seront toutes deux infinies, si les deux lignes parallèles entr'elles sont inclinées aux deux axes des coordonnées; ou ϑ sera infinie et ρ indéterminée (*et vice versâ*) si ces mêmes lignes sont en même tems parallèles à l'axe des ϑ (ou à celui des ρ). Ainsi dans aucun cas le résultat des deux équations V, W ne peut être absurde. Nous conclurons donc, en nous résumant, *que généralement toute équation entre trois variables du troisième ordre est susceptible d'une, ou de deux, ou de trois intégrations successives*; et ensuite,

1°. *que le premier de ces trois cas a, pour caractère distinctif, que les équations V, W donnent une valeur determinée de ϑ et de ρ*;

2°. *que dans le second, ces deux équations se confondent en une seule, mais sans devenir identiques*;

3°. *et enfin que dans le troisième, ces deux mêmes équations, ou seulement celle V devient identique indépendamment des valeurs de ϑ et ρ.*

36. On aura peut-être quelque répugnance à admettre que toute équation à trois variables du troisième ordre a au moins une intégrale première, tandis que, parmi les mêmes équations du second ordre, un grand nombre n'en a point. On ne sauroit en effet disconvenir que cette conséquence n'ait d'abord l'air d'un paradoxe. Mais une réflexion suffit pour en faire disparoître tout le merveilleux. Il est évident que lorsqu'un problème présente un certain nombre de conditions à remplir, elles ne peuvent l'être que par la détermination des indéterminées. Donc s'il y a trop

tielle a η pour coëfficient dans Q1) à celle de $\frac{dZ}{dp}$ (p étant la variable dont la différentielle a ϑ pour coëfficient). Ainsi lorsqu'on aura calculé la première de ces équations, il sera aisé d'en conclure toutes les suivantes.

38. J'ai supposé, dans tout ce qui précède, qu'aucune des différentielles de l'ordre le plus élevé ne manquoit dans la proposée. Cette nouvelle circonstance n'exigeroit aucun changement à notre méthode. En effet, si une équation du second ordre à trois variables, par exemple, ne contenoit pas d^2y, ou en divisant tout par dx, $\frac{d^2y}{dx} = d\frac{dy}{dx} = dq$, il en résulteroit seulement que, dans la formule F (§ 15), on auroit $\eta = 0$, et tout se passeroit de la même manière. Si au contraire c'étoit d^2z; c'est-à-dire, dp qui manquât dans cette proposée, il suffiroit de permuter entr'elles, pendant le cours de l'opération, les deux variables z et y.

39. La même méthode pourra servir à découvrir les conditions d'où dépend l'intégrabilité *médiate* des systèmes d'équations différentielles *unimodulaires* simultanées d'un ordre quelconque. Je me bornerai à donner ici une esquisse de cette théorie, qui exigeroit à elle seule un mémoire entier. Commençons par le cas de deux pareilles équations du premier ordre entre trois variables z, y et x. Soit en général (A1) $Adz + Bdx = 0$, $Cdy + Ddx = 0$. Je prens la somme de ces deux équations, après avoir multiplié une d'elles, par exemple la seconde, par le facteur indéterminé λ; d'où (B1) $Adz + \lambda Cdy + (B + \lambda D)\, dx = 0$. Ainsi il faut que cette équation soit intégrable au moyen d'un facteur; c'est-à-dire, qu'on peut la rapporter à celle $\alpha dz + \epsilon dy + \gamma dx = 0$ de l'art. 8, en faisant dans

dans la formule B de ce même article, $\alpha = A$, $\beta = \lambda C$, $\gamma = B + \lambda D$. On tire delà, au lieu d'une équation de condition entre les coèfficiens A, B, &c., une équation différentielle *plurimodulaire* du premier ordre entre la variable principale ou dépendante λ, et les trois variables indépendantes z, y et x, au moyen de laquelle il s'agira de déterminer le facteur λ. Et comme son expression ne peut qu'être de la forme $F(\Pi, \Psi)$, on voit que λ aura toujours deux différentes valeurs, d'où il résultera conséquemment deux différentes intégrales de B1, ou du système A1 ; c'est-à-dire, que l'on parviendra toujours au système de deux équations finies, entre z, y et x, dont le concours constituera l'intégrale entière du système différentiel A1.

40. Mais comme on pourroit objecter qu'il existe peut-être des cas, où cette équation *plurimodulaire* elle même n'étant point intégrable, le facteur λ n'a point de valeur assignable, nous allons démontrer, d'un autre manière, que le système A1 est toujours susceptible d'intégration. Nous remarquerons d'abord que le lieu d'un pareil système ne peut être qu'une courbe à double courbure, déterminée par l'intersection mutuelle de deux surfaces. Ainsi ayant pris deux axes horizontaux y et x, et un axe vertical z, qui se coupent tous trois à angle droit dans une même origine, nous assignerons à volonté trois coordonnées primitives déterminées z, y et x. Fixant ensuite sur l'axe des x, une quantité infiniment petite pour dx, nous conclurons, des deux équations A1, les valeurs de $\frac{dz}{dx}$ et de $\frac{dy}{dx}$; ce qui nous donnera deux nouvelles ordonnées $z' = z + dz$ et $y' = y + dy$. Nous déterminerons donc ainsi successivement toutes les ordonnées des deux

courbes, qui servent de bases aux deux cylindres droits dont l'intersection doit produire la courbe à double courbure, qui est le lieu du système A1. Et chacune de ces deux courbes de projection aura nécessairement son équation finie, puisque (§ 3) $\frac{dz}{du}$ et $\frac{dy}{du}$ sont déterminés chacun en particulier. Donc tout système de deux équations différentielles *unimodulaires* du premier ordre, entre trois variables, est intégrable, et son intégration dépend uniquement de celle d'une équation entre les mêmes variables, formée en additionnant ensemble les deux proposées, après avoir multiplié l'une d'elles par un facteur λ qui est donné par une équation *plurimodulaire* du premier ordre.

41. On sait, et je l'ai demontré d'une manière très-simple, * que l'intégration de toute équation *plurimodulaire* à quatre variables... (C1)

$$M\frac{dz}{dy}+N\frac{dz}{dx}+P\frac{dz}{du}+Q=0,$$

Q contenant seul la variable principale z, dépend uniquement de celle du système $Ndy-Mdx=0$, $Ndu-Pdx=0$. Ainsi de ce qu'un pareil système est toujours intégrable, il s'ensuit que toute équation différentielle *plurimodulaire* de la forme C1 l'est également.

42. Passons maintenant au système de trois équations simultanées entre quatre variables (D1) $Adz+Bdx=0$, $Cdy+Ddx=0$, $Edu+Fdx=0$. Multipliant la seconde par λ, la troisième par μ, et prenant la somme des trois nous aurons $Adz+\lambda Cdy+\mu Edu$

---

* *Mélang. mathém.* tome 2, Mém. 4, art. 23.

$+(B+\lambda D+\mu F)\,dx=0$, qui présente trois équations de condition à satisfaire. Chacune d'elles sera compliquée à la fois des deux facteurs λ et μ ; et quand on sera parvenu à les éliminer, on connoîtra la loi qui doit regner entre les différens coëfficiens A, B, C, &c. Les facteurs λ, μ devront aussi être donnés par une équation qui assigne à chacun d'eux trois valeurs simultanées. Et comme l'intégrale d'une équation quelconque *plurimodulaire* à quatre variables, c'est-à-dire, (§ 6) *unifonctionnelle trimodulaire*

$$M\frac{dz}{dy}+N\frac{dz}{dx}+P\frac{dz}{du}+Q=0,$$

tous ces coëfficiens contenant d'une manière quelconque les quatre variables z, y, x et u, dépend entièrement de celle du système $Ndz+Qdx=0$, $Ndy-Mdx=0$, $Ndu-Pdx=0$, ces mêmes conditions indiqueront les cas d'intégration de toute pareille équation.

FIN.

SUPPLÉMENT

Au second Tome des Mélanges Mathématiques.

Page V, *lig.* 13, *après* qui est le dixième, *mettez un renvoi à la note suivante* l'ordre des matières exigeroit que ce chapitre dixième prît la place du neuvième, et réciproquement.

Page XXIX, *lig.* 1, x lis. y.

Page XXXII, *lig.* 25, *ajoutez l'alinea suivant*

On peut présenter ce résumé d'une manière encore plus claire. Pour cela, dans la fig. II tirons la corde Q'R' prolongée jusqu'en ρ', et celle R'S. Nous avons vu que la différence entre les deux hypothèses en question consiste en ce que dans celle de la courbe *rigoureuse*, l'incrément d'espace ρS, qui pendant chaque instant dt est l'effet de la force accélératrice ϕ, flue lui-même d'un mouvement uniformément accéléré, depuis l'état zéro, jusqu'à celui ρS; c'est-à-dire, qu'on a $\rho S = \frac{1}{2} \phi dt^2$; au lieu que dans celle de la courbe *polygone*, cet incrément, qui est alors $\rho' S$, est considéré comme fluant uniformément avec une vitesse $= \phi dt$, et conséquemment, que $\rho' S = \phi dt \cdot dt = \phi dt^2$. Or $\rho' S = RS - QR'$ est évidemment $= d^2 e$, et d'Alembert a démontré que $\rho S = \frac{1}{2} \rho' S$. Donc, &c.

Page XXXIV, *lig.* 19, Ca *lis.* CA.

Page 11, *lig.* 14, $\Omega = \frac{uy}{x}$. On *lis.* $\Omega = \frac{ny}{x}$, on

Page 39, *lig. dern.* [ΓΛ] *lis.* [Γ, Λ].

Page 48, *lig. pen.* § 177. *lis.* § 77.

Page 60, *lig.* 7, φ *lis.* φ'.

Page 83, *lig.* 2, *e* lis. e.

Page 118, *lig.* 17, dY *lis.* *dY*.

Page 120, *lig.* 10, C *lis.* *C*.

Page 123, *lig.* 19, $\mu\phi'\omega$: *lis.* $\mu\phi'{:}\omega$.

Page 131, *lig.* 22, ep^2 lis. ep^2.

Page 138, *lig.* 15, (Aa) *lis.* (aa).

Page 140, *lig.* 19, mz²dx *lis.* mz²*d*x.

Page 141, *lig.* 11, n² *lis.* n².

Page 147, *lig.* 15, *après les mots* forme aussi simple, *ajoutez*, ou plutôt que ce système n'est point intégrable par un système de trois équations seulement, tout comme une équation différentielle à plus de deux variables n'est pas toujours intégrable par une seule équation.

Page 165, *lig.* 2, F:η *lis.* *F*:η, *et lig. antép.* pour *lis.* peut.

Page 166, *lig.* 12, log. *a* *lis.* log. *b*, *et lig* 13, log. *b* *lis.* log. *a*.

Page 169, *lig.* 6, $F{:}\varepsilon - \frac{1}{h}F'{:}\varepsilon$ *lis.* $\mathrm{F}{:}\varepsilon - \frac{1}{\mathrm{h}}\mathrm{F}'{:}\varepsilon$.

Page 170, *lig.* 9, b *lis.* ϐ.

Page 193, *lig.* 2, $\frac{d}{dx}$ *lis.* $\frac{db}{dx}$.

Page 207, *lig.* 1, *gα* *lis.* *ga*.

Page 222, *lig. antép.* *in latus* lis. *in planum*

Page 231, *lig.* 11, ou *lis.* où.

Fautes à corriger dans le Mémoire.

Page 2, *lig.* 13, $\frac{dk}{dy}$ et $\frac{dk}{dx}$ lis. $\frac{dK}{dy}$ et $\frac{dK}{dx}$.

Page 42, *lig.* 9, Q*ρ* *lis.* Q*p*.